經典原函數：計算與方法

對於定義在連通區間 I 上的函數 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ，我們把他的其中一個原函數記作 F 。不要忘記，原函數並沒有唯一性，兩個相同函數的原函數只會相差一個加法常數。在下面表格，你可以找到一些基礎函數的原函數。

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\ln x $
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$

計算原函數的經典方法當中有：變數變化（命題 5.3.33）、分部積分（命題 5.2.11）、數學歸納法（習題 A1.2）等等。下面我們會根據被積分函數的長相，介紹一些其他常見的方法。

第一節 有理函數

令 f 為 $\mathbb{R}$ 上的有理函數，也就是說 $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ ，其中 $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ 而且 $Q \neq 0$ 。他可以被看作函數 $x \mapsto f(x)$ ，只有當 $x \in \mathbb{R}$ 且 $Q(x) \neq 0$ 時是有定義的。多項式 Q 可以在 $\mathbb{R}[X]$ 中分解為不可約多項式的乘積，也就是說：

$$Q(x) = \text{cst} \cdot \prod_{i=1}^m (x^2 + b_i x + c_i)^{m_i} \prod_{j=1}^n (x - r_j)^{n_j},$$

其中 $m, n \in \mathbb{N}_0$ ，而且

- 對於每個 $1 \leq i \leq m$ ，我們有 $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ 滿足 $b_i^2 - 4c_i < 0$ 和 $m_i \in \mathbb{N}$ ；
- 對於每個 $1 \leq j \leq n$ ，我們有 $r_j \in \mathbb{R}$ 且 $n_j \in \mathbb{N}$ 。

第一章 經典原函數：計算與方法

因此，我們可以把 f 分解成部份分式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{i=1}^m \frac{M_i(x)}{(x^2 + b_i x + c_i)^{m_i}} + \sum_{j=1}^n \frac{N_j(x)}{(x - r_j)^{n_j}},$$

其中

- $T \in \mathbb{R}[X]$ 是個多項式；
- 對於每個 $1 \leq i \leq m$ ， $M_i \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數滿足 $\deg(M_i) \leq 2m_i - 1$ 的多項式；
- 對於每個 $1 \leq j \leq n$ ， $N_j \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數滿足 $\deg(N_j) \leq n_j - 1$ 的多項式。

這還可以被重新寫成

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{m_i} \frac{M_{i,r}(x)}{(x^2 + b_i x + c_i)^r} + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{n_j} \frac{N_{j,s}}{(x - r_j)^s},$$

其中

- $T \in \mathbb{R}[X]$ 是個多項式；
- 對於每個 $1 \leq i \leq m$ 還有 $1 \leq r \leq m_i$ ， $M_{i,r} \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數最多為 1 的多項式；
- 對於每個 $1 \leq j \leq n$ 還有 $1 \leq s \leq n_j$ ， $N_{j,s} \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數最多為 0 的多項式，也就是說是個常數。

因此，我們只需要找出下面這些類型有理函數的原函數即可：

$$\frac{1}{(x - r)^n}, n \in \mathbb{N} \quad \text{以及} \quad \frac{sx + t}{(x^2 + bx + c)^m}, b^2 - 4c < 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

對於第一種類型的有理函數，我們不難得到：

$$\int \frac{dx}{(x - r)^n} = \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + \text{cst} & \text{若 } n \neq 1, \\ \ln|x - r| + \text{cst} & \text{若 } n = 1. \end{cases}$$

對於第二種類型的，我們把他改寫成下列形式：

$$\frac{sx + t}{(x^2 + bx + c)^m} = \frac{2\alpha(x - p)}{[(x - p)^2 + q^2]^m} + \frac{\beta}{[(x - p)^2 + q^2]^m}$$

第一項的原函數可以寫做：

$$\int \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^m} dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-m)[(x-p)^2+q^2]^{m-1}} + \text{cst} & \text{若 } m \geq 2, \\ \alpha \ln [(x-p)^2+q^2] + \text{cst} & \text{若 } m = 1. \end{cases}$$

針對第二像，我們先使用變數變換 $x-p = q \tan \theta$ 其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。這會讓我們得到：

$$\int \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^m} dx = \frac{\beta}{q^{2m-1}} \int \cos^{2m-2} \theta d\theta,$$

這可以透過歸納法來求值（參見習題 A1.2 中的 Wallis 積分），或是第 A1.2 節。

範例 A1.1.1：求 $\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$ 的一個原函數。我們寫

$$\frac{x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x+\frac{1}{2}}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}$$

從上面的討論，我們有

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \text{cst} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \text{cst},$$

此外，設 $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ ，我們得到

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} dx &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \int \cos^2 \theta d\theta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)\right) + \text{cst} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\theta + \frac{\tan \theta}{1+\tan^2 \theta}\right) + \text{cst} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3} \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \text{cst}. \end{aligned}$$

因此，我們有

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1} + \text{cst}.$$

第二節 正弦和餘弦函數的多項式

令 $m, n \in \mathbb{N}_0$ ，我們想找 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的原函數。

- 如果 $m = 2k + 1$ 是奇數，那麼我們這樣算：

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x,$$

然後我們可以透過變數變換 $t = \cos x$ 總結。

- 如果 $n = 2\ell + 1$ 是奇數，那麼我們這樣算：

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^\ell \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^\ell d \sin x,$$

- 如果 m 和 n 都是偶數，我們使用下列關係式：

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{以及} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

這讓我們可以把被積分函數化簡為 e^x 的多項式，他的原函數是好計算的。

我們注意到，在最前面的兩點中，我們也可以使用第三點的方式來計算，但這樣的計算會比較繁瑣一點。

第三節 正弦和餘弦函數的有理函數

令 $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ 為雙變數的有理函數，我們想找 $R(\sin x, \cos x)$ 的原函數。透過變數變換 $t = \tan(\frac{x}{2})$ 並注意到下面關係式：

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{以及} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})},$$

我們可以得到：

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2},$$

當中的被積分函數是個 t 的有理函數，因此我們可以使用第 A1.1 節當中提到的方法。

範例 A1.3.1：找 $\frac{1}{\sin x}$ 的原函數。透過變數變換 $t = \tan(\frac{x}{2})$ ，我們得到

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + \text{cst} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + \text{cst}.$$

第四節 雙曲正弦和雙區餘弦函數的有理函數

令 $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找 $R(\sinh x, \cosh x)$ 的原函數。根據被積分函數的形式，我們可以使用不同方法。比較常使用的技巧如下：

- 透過變數變換 $t = \tanh(\frac{x}{2})$ 並注意到

$$\sinh x = \frac{2 \tanh(\frac{x}{2})}{1 - \tanh^2(\frac{x}{2})} \quad \text{以及} \quad \cosh x = \frac{1 + \tanh^2(\frac{x}{2})}{1 - \tanh^2(\frac{x}{2})}.$$

這樣被積分函數會變成 t 的有理函數。

- 我們使用變數變換 $t = e^x$ ，這樣被積分函數會變成 t 的有理函數。

第五節 e^x 的有理函數

如果 f 是個 e^x 的有理函數，也就是 $f(x) = R(e^x)$ 其中 $R \in \mathbb{R}(X)$ ，那麼使用變數變換 $t = e^x$ ，我們會有

$$\int f(x) dx = \int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt,$$

這會是個 t 的有理函數。

範例 A1.5.1：求 $\frac{1}{\cosh x}$ 的原函數。我們考慮變數變換 $t = e^x$ ，這會給出

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2 dt}{t} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \arctan(e^x) + \text{cst}.$$

第六節 第一型 Abel 積分

令 $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

的原函數。

- 如果 $ad - bc = 0$ ，那麼 n 次方根不取決於 x ，這情況下的計算是簡單的。
- 如果 $ad - bc \neq 0$ ，我們考慮下面這個變數變換：

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{以及} \quad x = g(t) = \frac{dt^n - b}{a - t^n c}.$$

這讓我們可以改寫：

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(g(t), t)g'(t) dt,$$

當中的被積分函數是 t 的有理函數。

範例 A1.6.1：我們想計算

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}.$$

我們考慮變數變換 $t = \sqrt[6]{1+x}$ ，這樣我們有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|1+t| + \text{cst} \\ &= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6 \ln|1 + \sqrt[6]{1+x}| + \text{cst}. \end{aligned}$$

第七節 第二型 Abel 積分

令 $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找 $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 的原函數。

- 如果 $a = 0$ ，我們回到第 A1.6 節的情況。
- 如果 $a \neq 0$ ，但 $b^2 - 4ac = 0$ ，平方根可以被化簡，我們會直接得到 x 的有理函數，接著我們使用第 A1.1 節中的方法即可。

因此，我們可以假設 $a \neq 0$ 以及 $b^2 - 4ac \neq 0$ 。

- 首先，我們先看 $b^2 - 4ac > 0$ 的情況。
 - 對於 $a < 0$ ，我們改寫

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}\sqrt{q^2 - (x - p)^2},$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 。這樣的話，變數變換 $x - p = q \cos \theta$ 讓我們得到

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(p + q \cos \theta, q\sqrt{-a} \sin \theta) d\theta.$$

這可以化簡為由正弦和餘弦函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.3 節。

- 對於 $a > 0$ ，我們改寫

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{(x - p)^2 - q^2},$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 。我們考慮變數變換 $x - p = q\varepsilon \cosh(t)$ ，其中根據我們想要找原函數的區間，我們取 $\varepsilon \in \{1, -1\}$ 。這讓我們得到

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(p + q \cosh t, q\sqrt{a} \sinh t) dt.$$

這可以化簡為由雙曲函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.4 節。

- 當 $b^2 - 4ac < 0$ 時，我們一定要有 $a > 0$ 。我們改寫

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{(x - p)^2 + q^2},$$

這樣一來，變數變換 $x - p = q \sinh \theta$ 讓我們得到

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(p + q \sinh t, q\sqrt{a} \cosh t) dt.$$

這可以化簡為由雙曲函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.4 節。

範例 A1.7.1：我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $(-1, 1)$ 上的原函數。根據上面的討論，我們考慮變數變換 $x = \cos \theta$ ，所以會得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = -\int d\theta = -\theta + \text{cst},$$

和

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} &= \int (-\sin^2 \theta) d\theta = \int \frac{\cos(2\theta) - 1}{2} d\theta = \frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} + \text{cst} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \text{cst} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + \text{cst}. \end{aligned}$$

範例 A1.7.2：我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的原函數。函數 $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 是定義在 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上的，在每個連通元件上，我們可以有不同的原函數。從上面的方法，我們可以考慮變數變換 $x = \varepsilon \cosh t$ ，如果我們考慮區間 $I \subseteq (1, +\infty)$ ，則我們取 $\varepsilon = 1$ ；如果我們考慮區間 $I \subseteq (-\infty, -1)$ ，則我們取 $\varepsilon = -1$ 。注意到在這兩種情況下，我們都有 $t > 0$ 。這讓我們得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\varepsilon \sinh t}{\sinh t} dt = \varepsilon t + \text{cst} = \varepsilon \operatorname{arccosh}(\varepsilon x) + \text{cst} \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + \text{cst}. \end{aligned}$$

範例 A1.7.3：我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 的原函數。從上面的討論，我們可以考慮變數變換 $x = \sinh t$ ，進而得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\cosh t dt}{\cosh t} = t + \text{cst} = \operatorname{arsinh} x + \text{cst}.$$

下面有個比較完整的原函數表格。不要忘記，計算原函數不是容易的事情，而且對很多函數來說，我們無法把原函數用封閉形式來描述。在這種情況下，我們會使用均值定理（第 5.3.5 小節）或是積分的比較（第 7.1.4 小節）來估計我們要求的積分值。

$f(x)$	$F(x)$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\cot x$	$\ln \sin x $
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\tanh x$	$\ln(\cosh x)$
$\coth x$	$\ln(\sinh x)$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, a > 0$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, a \neq 0$	$\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a \neq 0$	$\ln x + \sqrt{x^2-a^2} $
$\frac{1}{x^2+a^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right $