附錄一

經典原函數：計算與方法

對於定義在連通區間 I 上的函數 $f: I \to \mathbb{R}$，我們把他的其中一個原函數記作 F。不要忘記，原函數並沒有唯一性，兩個相同函數的原函數只會相差一個加法常數。在下面表格，你可以找到一些基礎函數的原函數。

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$

計算原函數的經典方法當中有：變數變化（命題 5.3.33）、分部積分（命題 5.2.11）、數學歸納法（習題 A1.2）等等。下面我們會根據被積分函數的長相，介紹一些其他常見的方法。

第一節 有理函數

令 f 為 $\mathbb{R}$ 上的有理函數，也就是說 $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$，其中 $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ 而且 $Q \neq 0$。他可以被看作函數 $x \mapsto f(x)$，只有當 $x \in \mathbb{R}$ 且 $Q(x) \neq 0$ 時是有定義的。多項式 Q 可以在 $\mathbb{R}[X]$ 中分解為不可約多項式的乘積，也就是說：

$$Q(x) = \mathrm{cst} \cdot \prod_{i=1}^{m} (x^2 + b_i x + c_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{n} (x - r_j)^{n_j},$$

其中 $m, n \in \mathbb{N}_0$，而且

- 對於每個 $1 \leqslant i \leqslant m$，我們有 $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ 滿足 $b_i^2 - 4c_i < 0$ 和 $m_i \in \mathbb{N}$；
- 對於每個 $1 \leqslant j \leqslant n$，我們有 $r_j \in \mathbb{R}$ 且 $n_j \in \mathbb{N}$。

因此，我們可以把 f 分解成部份分式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{M_i(x)}{(x^2 + b_i x + c_i)^{m_i}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{N_j(x)}{(x - r_j)^{n_j}},$$

其中

- $T \in \mathbb{R}[X]$ 是個多項式；

- 對於每個 $1 \leqslant i \leqslant m$，$M_i \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數滿足 $\deg(M_i) \leqslant 2m_i - 1$ 的多項式；
- 對於每個 $1 \leqslant j \leqslant n$，$N_i \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數滿足 $\deg(N_j) \leqslant n_j - 1$ 的多項式。

這還可以被重新寫成

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{m_i} \frac{M_{i,r}(x)}{(x^2+b_i x + c_i)^r} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n_j} \frac{N_{i,s}}{(x-r_j)^s},$$

其中

- $T \in \mathbb{R}[X]$ 是個多項式；
- 對於每個 $1 \leqslant i \leqslant m$ 還有 $1 \leqslant r \leqslant m_i$，$M_{i,r} \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數最多為 1 的多項式；
- 對於每個 $1 \leqslant j \leqslant n$ 還有 $1 \leqslant s \leqslant n_j$，$N_{i,s} \in \mathbb{R}[X]$ 是個度數最多為 0 的多項式，也就是說是個常數。

因此，我們只需要找出下面這些類型有理函數的原函數即可：

$$\frac{1}{(x-r)^n}, n \in \mathbb{N} \quad \text{以及} \quad \frac{sx+t}{(x^2+bx+c)^m}, b^2 - 4c < 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

對於第一種類型的有理函數，我們不難得到：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^n} = \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + \text{cst} & \text{若 } n \neq 1, \\ \ln|x-r| + \text{cst} & \text{若 } n = 1. \end{cases}$$

對於第二種類型的，我們把他改寫成下列形式：

$$\frac{sx+t}{(x^2+bx+c)^m} = \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^m} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^m}$$

第一項的原函數可以寫做：

$$\int \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^m}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-m)\left[(x-p)^2+q^2\right]^{m-1}} + \text{cst} & \text{若 } m \geqslant 2, \\ \alpha \ln\left[(x-p)^2+q^2\right] + \text{cst} & \text{若 } m = 1. \end{cases}$$

針對第二像，我們先使用變數變換 $x - p = q\tan\theta$ 其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。這會讓我們得到：

$$\int \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^m}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{q^{2m-1}} \int \cos^{2m-2}\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

這可以透過歸納法來求值（參見習題 A1.2 中的 Wallis 積分），或是第 A1.2 節。

範例 A1.1.1： 求 $\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$ 的一個原函數。我們寫

$$\frac{x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}$$

從上面的討論，我們有

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \text{cst} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} + \text{cst},$$

此外，設 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$，我們得到

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}x &= \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^3\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^3\int\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}(\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)) + \text{cst}\\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}(\theta+\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}) + \text{cst}\\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + \frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \text{cst}.\end{aligned}$$

因此，我們有

$$\int \frac{x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} + \text{cst}.$$

第二節 正弦和餘弦函數的多項式

令 $m,n\in\mathbb{N}_0$，我們想找 $\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 的原函數。

- 如果 $m=2k+1$ 是奇數，那麼我們這樣算：

  $$\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x = \int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\,\mathrm{d}\cos x,$$

  然後我們可以透過變數變換 $t=\cos x$ 總結。
- 如果 $n=2\ell+1$ 是奇數，那麼我們這樣算：

  $$\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x = \int\sin^m x(1-\sin^2 x)^\ell\cos x\,\mathrm{d}x = \int\sin^m x(1-\sin^2 x)^\ell\,\mathrm{d}\sin x,$$

- 如果 m 和 n 都是偶數，我們使用下列關係式：

  $$\cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,x}+e^{-\mathrm{i}\,x}) \quad 以及 \quad \sin x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,x}-e^{-\mathrm{i}\,x}),$$

  這讓我們可以把被積分函數化簡為 e^x 的多項式，他的原函數是好計算的。

我們注意到，在最前面的兩點中，我們也可以使用第三點的方式來計算，但這樣的計算會比較繁瑣一點。

第三節 正弦和餘弦函數的有理函數

令 $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ 為雙變數的有理函數，我們想找 $R(\sin x, \cos x)$ 的原函數。透過變數變換 $t = \tan(\frac{x}{2})$ 並注意到下面關係式：

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{以及} \quad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})},$$

我們可以得到：

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

當中的被積分函數是個 t 的有理函數，因此我們可以使用第 A1.1 節當中提到的方法。

範例 A1.3.1 ： 找 $\frac{1}{\sin x}$ 的原函數。透過變數變換 $t = \tan(\frac{x}{2})$，我們得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \text{cst} = \ln\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big| + \text{cst}.$$

第四節 雙曲正弦和雙區餘弦函數的有理函數

令 $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找 $R(\sinh x, \cosh x)$ 的原函數。根據被積分函數的形式，我們可以使用不同方法。比較常使用的技巧如下：

- 透過變數變換 $t = \tanh(\frac{x}{2})$ 並注意到

  $$\sinh x = \frac{2\tanh(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})} \quad \text{以及} \quad \cosh x = \frac{1+\tanh^2(\frac{x}{2})}{1-\tanh^2(\frac{x}{2})}.$$

  這樣被積分函數會變成 t 的有理函數。
- 我們使用變數變換 $t = e^x$，這樣被積分函數會變成 t 的有理函數。

第五節 e^x 的有理函數

如果 f 是個 e^x 的有理函數，也就是 $f(x) = R(e^x)$ 其中 $R \in \mathbb{R}(X)$，那麼使用變數變換 $t = e^x$，我們會有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int R(e^x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

這會是個 t 的有理函數。

範例 A1.5.1： 求 $\frac{1}{\cosh x}$ 的原函數。我們考慮變數變換 $t = e^x$，這會給出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 2\arctan(e^x) + \mathrm{cst}.$$

第六節 第一型 Abel 積分

令 $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

的原函數。

- 如果 $ad - bc = 0$，那麼 n 次方根不取決於 x，這情況下的計算是簡單的。
- 如果 $ad - bc \neq 0$，我們考慮下面這個變數變換：

  $$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{以及} \quad x = g(t) = \frac{dt^n - b}{a - t^n c}.$$

  這讓我們可以改寫：

  $$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x = \int R(g(t), t) g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

  當中的被積分函數是 t 的有理函數。

範例 A1.6.1： 我們想計算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}.$$

我們考慮變數變換 $t = \sqrt[6]{1+x}$，這樣我們有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} &= \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3 + t^2} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|1+t| + \mathrm{cst} \\
&= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\ln|1 + \sqrt[6]{1+x}| + \mathrm{cst}.
\end{aligned}$$

第七節 第二型 Abel 積分

令 $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ 為雙變數有理函數，我們想要找 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 的原函數。

- 如果 $a = 0$，我們回到第 A1.6 節的情況。
- 如果 $a \neq 0$，但 $b^2 - 4ac = 0$，平方根可以被化簡，我們會直接得到 x 的有理函數，接著我們使用第 A1.1 節中的方法即可。

因此，我們可以假設 $a \neq 0$ 以及 $b^2 - 4ac \neq 0$。

- 首先，我們先看 $b^2 - 4ac > 0$ 的情況。
  - 對於 $a < 0$，我們改寫
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{q^2-(x-p)^2},$$
    其中 $p, q \in \mathbb{R}$。這樣的話，變數變換 $x - p = q\cos\theta$ 讓我們得到
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = \int R(p + q\cos\theta, q\sqrt{-a}\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$
    這可以化簡為由正弦和餘弦函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.3 節。
  - 對於 $a > 0$，我們改寫
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{(x-p)^2-q^2},$$
    其中 $p, q \in \mathbb{R}$。我們考慮變數變換 $x - p = q\varepsilon\cosh(t)$，其中根據我們想要找原函數的區間，我們取 $\varepsilon \in \{1, -1\}$。這讓我們得到
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = \int R(p + q\cosh t, q\sqrt{a}\sinh t)\,\mathrm{d}t.$$
    這可以化簡為由雙曲函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.4 節。
- 當 $b^2 - 4ac < 0$ 時，我們一定要有 $a > 0$。我們改寫
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{(x-p)^2+q^2},$$
  這樣一來，變數變換 $x - p = q\sinh\theta$ 讓我們得到
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x = \int R(p + q\sinh t, q\sqrt{a}\cosh t)\,\mathrm{d}t.$$
  這可以化簡為由雙曲函數構成的有理函數原函數的計算，見第 A1.4 節。

範例 A1.7.1： 我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 上的原函數。根據上面的討論，我們考慮變數變換 $x = \cos\theta$，所以會得到
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\int \mathrm{d}\theta = -\theta + \mathrm{cst},$$

和

$$\int \sqrt{1-x^2} = \int (-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos(2\theta)-1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} + \mathrm{cst}$$
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \mathrm{cst} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + \mathrm{cst}.$$

範例 A1.7.2 ： 我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的原函數。函數 $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 是定義在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上的，在每個連通元件上，我們可以有不同的原函數。從上面的方法，我們可以考慮變數變換 $x = \varepsilon\cosh t$，如果我們考慮區間 $I \subseteq (1,+\infty)$，則我們取 $\varepsilon = 1$；如果我們考慮區間 $I \subseteq (-\infty,-1)$，則我們取 $\varepsilon = -1$。注意到在這兩種情況下，我們都有 $t > 0$。這讓我們得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\varepsilon\sinh t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t = \varepsilon t + \mathrm{cst} = \varepsilon\,\mathrm{arccosh}(\varepsilon x) + \mathrm{cst}$$
$$= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + \mathrm{cst}.$$

範例 A1.7.3 ： 我們想要找 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 的原函數。從上面的討論，我們可以考慮變數變換 $x = \sinh t$，進而得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t} = t + \mathrm{cst} = \mathrm{arcsinh}\,x + \mathrm{cst}.$$

下面有個比較完整的原函數表格。不要忘記，計算原函數不是容易的事情，而且對很多函數來說，我們無法把原函數用封閉形式來描述。在這種情況下，我們會使用均值定理（第 5.3.5 小節）或是積分的比較（第 7.1.4 小節）來估計我們想要求的積分值。

$f(x)$	$F(x)$
$a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\tanh x$	$\ln(\cosh x)$
$\coth x$	$\ln(\sinh x)$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ a>0$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a>0$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\ a\neq 0$	$\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a\neq 0$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\frac{1}{x^2+a^2},\ a\neq 0$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2-x^2},\ a\neq 0$	$\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x+a}{x-a}\rvert$