第一章 可數集合

此章節的目的是要介紹可數集合。我們會先介紹函數的一些基本概念，討論合成函數，接著定義有限集合、可數集合、不可數集合等，以及給出相關的範例。在此章節的最後面，我們也會介紹一些常見拿來構造無窮可數集合的方式。

第一節 函數

我們從基本概念開始，像是單射函數、滿射函數，以及雙射函數。

定義 1.1.1 ： 給定兩個集合 S 及 T 還有函數 $f : S \to T$。

- 如果對於所有 $x, y \in S$，$x \neq y$ 蘊含 $f(x) \neq f(y)$，則我們說 f 是個單射函數 (injective function or injection)。
- 如果對於任何 $z \in T$，存在 $x \in S$ 滿足 $f(x) = z$，則我們說 f 是個滿射函數 (surjective function or surjection)。
- 如果 f 同時是個單射函數及滿射函數，則我們說他是個雙射函數 (bijective function or bijection)。

註解 1.1.2 ： 在集合論的語言中，一個函數 $f : S \to T$ 也可以被視為集合中的元素 $f \in T^S$。

範例 1.1.3 ： 我們來看下面幾個例子。

(1) 函數 $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ 是個雙射函數。

(2) 若把函數 $x \mapsto x^2$ 看作由 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 上的函數，則他是個單射函數，；若把他看作由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$,，則他是個滿射函數，若把他看作由 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$，則他是個雙射函數。

(3) 令 $\sigma \in S_N$ 為對稱群中的元素。則 σ 是個雙射函數。

(4) 令 $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 且滿足 $\det M \neq 0$。則函數 $X \mapsto MX$ 會是個在 $\mathbb{R}^n$ 上的雙射函數。

下面對單射函數（或滿射函數、雙射函數）取合成函數的結果是大家應該熟悉的，這裡我們不做證明。

命題 1.1.4： 令 $f : S \to T$ 及 $g : T \to U$。

- 若 f 及 g 皆是單射的，則 $g \circ f$ 也是單射的。
- 若 f 及 g 皆是滿射的，則 $g \circ f$ 也是滿射的。
- 若 f 及 g 皆是雙射的，則 $g \circ f$ 也是雙射的。

命題 1.1.5： 令 A, B, C, D 為集合，$f : A \to B, g : B \to C$ 及 $h : C \to D$ 為函數。

(1) 若 $g \circ f$ 是單射的，則 f 也是單射的。

(2) 若 $g \circ f$ 是滿射的，則 g 也是滿射的。

(3) 若 $g \circ f$ 及 $h \circ g$ 皆為雙射函數，則 f, g 及 h 也是雙射函數。

定義 1.1.6： 給定雙射函數 $f : S \to T$，我們下面定義 $f^{-1} : T \to S$。對於任意 $y \in T$，我們可以找到唯一的 $x \in S$ 使得 $y = f(x)$，稱作 y 的像原 (preimage or inverse image)，我們定義 $f^{-1}(y) = x$。函數 f^{-1} 是唯一定義的，稱作 f 的反函數 (inverse function)。

定義 1.1.7： 給定函數 $f : S \to T$，不一定是雙射函數。對於 $A \subseteq S$ 及 $B \subseteq T$，我們定義

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \quad \text{以及} \quad f^{-1}(B) = \{x \in S : f(x) \in B\}.$$

此定義讓我們可以把像及像原的概念推廣到子集合上。

註解 1.1.8： 我們注意到，如果 $f : S \to T$ 是個雙射函數，則 $f(x) = y$ 可以重新寫作

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{且} \quad f^{-1}(\{y\}) = \{x\}.$$

命題 1.1.9： 如果 $f : S \to T$ 是個雙射函數，則

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_S \quad \text{且} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_T.$$

給定函數 $f: S \to T$，我們要怎麼檢查他是個雙射函數？下面命題給我們其中一個檢查的方式。

命題 1.1.10 ： 令 $f: S \to T$ 及 $g: T \to S$ 滿足 $f \circ g = \mathrm{Id}_T$ 及 $g \circ f = \mathrm{Id}_S$。則 f 和 g 皆為雙射函數，且互為對方的反函數。

證明：根據對稱性，我們只需要證明 f 是雙射，且 g 為 f 的反函數即可。

給定 $y \in T$，我們想要找到 $x \in S$ 使得 $f(x) = y$。假設這樣的 x 存在，我們會有 $x = g \circ f(x) = g(y)$。令 $x = g(y)$。我們可以輕易檢查 $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$。這讓我們可以總結 $x = g(y)$ 是 y 在 f 之下唯一的像原。

因此，f 是個雙射函數，且 g 是他的反函數。 □

第二節 等勢集合

定義 1.2.1 ： 給定兩個集合 S 及 T，如果存在由 S 到 T 的雙射函數 f，則我們說他們是等勢 (equinumerous) 集合，記作 $S \sim T$。

註解 1.2.2 ： 我們不難檢查下面性質。

(1) 對於任意集合 S，我們有 $S \sim S$。

(2) 對於任意集合 S 及 T，若且唯若 $S \sim T$，則 $T \sim S$。

(3) 對於任意集合 S, T 及 U，如果 $S \sim T$ 及 $T \sim U$ 成立，則 $S \sim U$。

命題 1.2.3 ： 對於任意集合 S，我們將他的冪集合 (power set) 記做 $\mathcal{P}(S)$，也就是

$$\mathcal{P}(S) := \{T \subseteq S\}.$$

則 S 與 $\mathcal{P}(S)$ 不會是等勢集合。

證明：我們使用反證法來證明。我們假設 S 及 $\mathcal{P}(S)$ 為等勢集合，進而得到矛盾。

令 $f: S \to \mathcal{P}(S)$ 為雙射函數。考慮下面 S 的子集合：

$$T := \{x \in S : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(S).$$

則 T 在 f 之下有個像原，我們可以把他記作 x，也就是說 $f(x) = T$。我們有兩種可能性：

- 如果 $x \in T = f(x)$，則根據 T 的定義，我們會得到 $x \notin f(x) = T$。
- 如果 $x \notin T = f(x)$，則再次根據 T 的定義，我們會得到 $x \in f(x) = T$。

因此我們得到矛盾。 □

問題 1.2.4：反證法 (proof by contradiction) 與對位證明法 (proof by contraposition) 有什麼不同？

一般來說，我們要怎麼知道兩個集合是等勢的呢？根據定義，我們必須要能夠找到他們之間的雙射函數，但這不一定是容易達成的。下面的定理給我們一個檢查的方式，同時也給我們一套演算法來構造這樣的雙射函數。由於此證明有點技巧性，我們不會討論證明的細節，有興趣的同學可以參考習題 1.7 中的步驟。

定理 1.2.5 【Cantor–Schröder–Bernstein 定理】**：**給定兩集合 S 與 T。假設存在由 S 到 T 的單射函數以及由 T 到 S 的單射函數，則存在由 S 到 T 的雙射函數。

第三節 有限集合

定義 1.3.1 ：給定集合 S。若存在非負整數 n 使得

$$S \sim \{1, \ldots, n\} =: [n],$$

則我們說 S 是個有限集合且包含 n 個元素，記作 $n = |S| = \mathrm{Card}(S)$。我們也說 S 的基數 (cardinal number or cardinality) 為 n。

命題 1.3.2 ：對有限集合 S 來說，他的基數是唯一定義的。

證明：我們以反證法來證明。假設存在有限集合 S 有兩個不同的基數 n 及 m，也就是說，存在雙射函數 $f : S \to [n]$ 及 $g : S \to [m]$。把函數做合成，我們可以推得 $h := f \circ g^{-1} : [m] \to [n]$ 也會是個雙射函數。然而，根據鴿籠原理 (pigeonhole principle)，這是不可能的。更確切的說，如果 $m > n$，鴿籠原理告訴我們會存在 $x, y \in [m]$ 且 $x \neq y$ 滿足 $h(m) = h(n)$。如果 $m < n$，我們可以透過 $h^{-1} : [n] \to [m]$ 並且以相同方式總結。 □

範例 1.3.3 ：我們給幾個基數的例子。

(1) 固定正整數 $n \geqslant 1$，對稱群 S_n 的基數為 $n!$。我們可以構造由 S_n 到 $[n] \times S_{n-1}$ 的雙射函數，再透過遞迴來證明此性質。

(2) 給定兩個有限集合 E 及 F，由所有從 E 到 F 的函數所構成的集合的基數為 $|F|^{|E|}$。

(3) 令 p 為質數。在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上次數為 n 的一般線性群

$$GL(n,p) = GL_n(\mathbb{F}_p) = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_p) : \det(M) \neq 0\}$$

的基數為

$$\operatorname{Card} GL(n,p) = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k).$$

第四節 可數集合

接下來，我們會根據英式記號來紀錄自然數集合。我們將正整數集合記作 $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ 以及非負整數集合記作 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。我們注意到，在歐陸記號（法國或德國）中，$\mathbb{N}$ 代表的是非負整數集合，$\mathbb{N}^*$ 代表的是正整數集合。

定義 1.4.1： 給定集合 S。如果 $S \sim \mathbb{N}$，則我們說 S 是個無窮可數 (coutably infinite) 的集合。

註解 1.4.2： 令 S 為無窮可數集合。根據定義 1.2.1 ，存在由 $\mathbb{N}$ 到 S 的雙射函數 f，因此我們可以將 S 中的元素依下列方式編號：

$$S = \{f(1), f(2), \dots\} = \{a_1, a_2, \dots\},$$

其中對於所有 $k \geqslant 1$，我們記 $a_k = f(k)$。

定義 1.4.3： 如果 S 是個無窮可數集合，則我們將他的基數記作 $\aleph_0$。換句話說，$\aleph_0 := |\mathbb{N}| = \operatorname{Card}(\mathbb{N})$。

範例 1.4.4： 整數集合 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 是無窮可數的。要證明這件事，我們可以考慮函數 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 及 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$，定義如下：

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{若 } n \text{ 為偶數}, \\ \frac{n-1}{2} & \text{若 } n \text{ 為奇數}, \end{cases} \qquad \text{以及} \qquad g(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{若 } n \geqslant 0, \\ -2n & \text{若 } n < 0. \end{cases}$$

我們不難檢查 $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ 及 $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$，所以命題 1.1.10 告訴我們 $f = g^{-1}$ 且 f 與 g 皆為雙射函數。

此構造所代表的是，我們可以把 $\mathbb{Z}$ 中的元素依下列方式排列（編號）：

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

範例 1.4.5 ： 集合 $\mathbb{N}^2$ 是無窮可數的，我們可以將其中的元素依下圖中的方式編號。

$$\begin{tikzcd}
7 \arrow[dr] & {} & & & \\
6 \arrow[u] & 8 \arrow[dr] & 13 \arrow[ul] & & \\
2 \arrow[dr] & 5 \arrow[ul] & 9 \arrow[dr] & 12 \arrow[ul] & \\
1 \arrow[u] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[ul] & 10 \arrow[r] & 11 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

圖 1.1: $\mathbb{N}^2$ 中元素的其中一種編號方式。

問題 1.4.6：請給出由圖 1.1 所代表的編號方式，所對應到的從 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}^2$ 的雙射函數。

定義 1.4.7 ： 給定集合 S。如果 S 是個有限集合或是無窮可數集合，則我們說 S 是個可數 (countable) 集合；反之，我們說 S 是個不可數 (uncountable) 集合。

命題 1.4.8 ： 任何可數集合的子集合皆是可數的。

證明：令 S 為可數集合以及 $A \subseteq S$ 為子集合。如果 A 是有限的，則顯然此敘述成立；因此我們可以假設 A 是無限的，因此 S 也必然是無限的。註解 1.4.2 讓我們可以把 S 中的元素編號：

$$S = \{s_1, s_2, \dots\}.$$

我們可以透過遞迴方式，來定義嚴格遞增函數 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$：

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \min\{n \geqslant 1 : s_n \in A\}, \\
\varphi(k+1) &= \min\{n > \varphi(k) : s_n \in A\}, \quad k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

由於 A 是無窮的，我們不難檢查 φ 是個在 $\mathbb{N}$ 上定義良好的函數。因此，

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{N} & \to & A \\
& n & \mapsto & s_{\varphi(n)}
\end{array}$$

是個由 $\mathbb{N}$ 到 A 的雙射函數，所以 A 是個無窮可數集合。 □

系理 1.4.9 ： 給定集合 S。

(1) 若且唯若 S 是可數的，則存在由 S 到 $\mathbb{N}$ 子集合的雙射函數。

(2) 若且唯若 S 是可數的，則存在由 S 到 $\mathbb{N}$ 的單射函數。

(3) 若且唯若 S 是可數的，則存在由 $\mathbb{N}$ 到 S 的滿射函數。

(4) 若且唯若 S 是無窮可數的，則前面三點之一成立，且 S 是無窮集合。

證明：給定集合 S。

(1) 假設 S 是可數的。如果 S 為有限集合，則對於某個有限 $n \geqslant 0$，存在雙射函數映射到 $\{1, \ldots, n\}$。如果 S 為無窮集合，則他會是無窮可數的，根據定義，他與 $\mathbb{N}$ 之間有雙射關係。

再來證明逆命題，我們假設 S 與子集合 $I \subseteq \mathbb{N}$ 存在雙射關係。命題 1.4.8 告訴我們 I 是可數的，因此 S 也是可數的。

(2) 假設 S 是可數的。根據 (1)，我們可以找到雙射函數 $f : S \to I \subseteq \mathbb{N}$。令 $i : I \hookrightarrow \mathbb{N}$ 為包含映射 (canonical injection) $x \mapsto x$。則 $i \circ f$ 會是個由 S 到 $\mathbb{N}$ 的單射函數。

再來證明逆命題，我們假設 $i : S \hookrightarrow \mathbb{N}$ 是個單射函數，則 i 是個由 S 到 $i(S)$ 的雙射函數，且 $i(S)$ 是個可數集合 $\mathbb{N}$ 的子集合。因此根據命題 1.4.8 ，我們得知 S 也是可數的。

(3) 證明與 (2) 相似。

(4) 這是前面幾點的直接結果。

□

範例 1.4.10 ： 集合 $\mathbb{N}^2$ 是無窮可數的。根據正整數的唯一質因數分解，我們可以考慮函數 $(p, q) \mapsto 2^p 3^q$，這會是個從 $\mathbb{N}^2$ 到 $\mathbb{N}$ 的單射函數。

註解 1.4.11 ： 在實際層面上，如果我們想要證明一個無窮集合 S 是無窮可數的，我們可以透過下列方法之一：

(1) 構造由 S 到 $\mathbb{N}$ 的雙射函數；

(2) 構造由 S 到 $\mathbb{N}$ 或是任意無窮可數集合的單射函數；

(3) 構造由 $\mathbb{N}$ 或是任意無窮可數集合到 S 的滿射函數。

第五節 在可數集合上的運算

第一小節 笛卡爾積

命題 1.5.1 ： 若 S 及 T 為無窮可數集合，則他們的笛卡爾積 (Cartesian product) $S \times T$ 也是無窮可數的。

證明： 給定兩個無窮可數集合 S 及 T。令 $f : S \to \mathbb{N}$ 及 $g : T \to \mathbb{N}$ 為雙射函數。則函數 $h := (f, g) = S \times T \to \mathbb{N}^2$ 定義做 $h(x, y) = (f(x), g(y))$ 也是雙射的。由於 $\mathbb{N}^2$ 是無窮可數的（範例 1.4.5 ），根據系理 1.4.9 ，我們得知 $S \times T$ 也是無窮可數的。 □

範例 1.5.2 ： 上述的命題給我們較簡單的方式，來檢查某些無窮集合是否為無窮可數的。

(1) 在範例 1.4.4 中，我們知道 $\mathbb{Z}$ 是無窮可數的，因此 $\mathbb{Z}^2$ 也會是無窮可數的。

(2) 有理數所構成的集合 $\mathbb{Q}$ 是無窮可數的。要得到此性質，首先我們注意到 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 是無窮可數的，接著我們構造從 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的滿射函數，定義為 $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$。接著我們可以由系理 1.4.9 (3) 來總結。

系理 1.5.3 ： 任意由非空有限多個無窮可數集合所得到的乘積也是無窮可數的。

證明： 我們想對乘積數量做遞迴，來證明此性質。對於任意正整數 n，我們可以定義 $\mathcal{P}_n$ 為下列性質：「對於任意有限集合 I 滿足 $|I| = n$ 以及無窮可數集合 $(S_i)_{i\in I}$，乘積 $\prod_{i\in I} S_i$ 也是無窮可數的。」

若 $|I| = 1$，此命題顯然成立。令 $n \geqslant 1$ 為正整數並假設 $\mathcal{P}_n$ 成立。給定有限集合 I 滿足 $|I| = n + 1$ 以及由 I 中元素所編號的無窮可數集合序列 $(S_i)_{i\in I}$。固定任意元素 $i_0 \in I$ 並定義 $I' = I \backslash \{i_0\}$，我們可以將 I 寫為互斥聯集 $I = I' \sqcup \{i_0\}$。令 $S = \prod_{i\in I} S_i = \left(\prod_{i\in I'} S_i\right) \times S_{i_0}$。根據遞迴假設 $\mathcal{P}_n$，我們知道 $S' := \prod_{i\in I'} S_i$ 是無窮可數的。接著，由命題 1.5.1 我們可以得知 $S' \times S_{i_0} = S$ 也是無窮可數的。因此，性質 $\mathcal{P}_{n+1}$ 成立。 □

範例 1.5.4 ： 對於任意正整數 $n \geqslant 1$，集合 $\mathbb{N}^n$ 及 $\mathbb{Z}^n$ 是無窮可數的。

第二小節 聯集

命題 1.5.5 ： 由可數多個可數集合構成的聯集還是可數的。

證明： 令 I 為可數集合以及 $(S_i)_{i\in I}$ 為由 I 中元素所標記的可數集合。根據系理 1.4.9 ，對於所有 $i \in I$，我們有滿射函數 $f_i : \mathbb{N} \to S_i$。因此，由

$$\begin{array}{rccc} f: & I \times \mathbb{N} & \to & \bigcup_{i\in I} S_i \\ & (i, x) & \mapsto & f_i(x) \end{array}$$

所定義的函數也是滿射的。由於 $I \times \mathbb{N}$ 是可數的，根據系理 1.4.9 ，我們得知 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 也是可數的。 □

範例 1.5.6 ： 令 S 及 T 為 $\mathbb{R}$ 的兩個可數子集合。則

$$S + T := \{s + t : s \in S, t \in T\}$$

也是個可數集合。要得到此結果，我們可以將他重新寫作

$$S + T = \bigcup_{s\in S} (s + T)$$

也就是可數多個可數集合所構成的聯集。

第三小節 非可數集合的範例

命題 1.5.7 ： $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可數的。

證明： 根據命題 1.2.3 ，我們知道不存在 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 與 $\mathbb{N}$ 之間的滿射函數。因此，由系理 1.4.9 我們推得 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可數的。 □

命題 1.5.8 ： $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是個不可數集合。

證明： 我們可以以至少下列兩種方式來證明此命題。

- 第一個方式是先注意到，$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 與 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 之間存在雙射關係，這可以透過

  $$\begin{array}{rccc} f: & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\} \end{array}$$

  來達成。因此，我們可以透過直接使用命題 1.5.7 來總結。

- 第二個方式是使用 Cantor 的對角論證法。假設 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是無窮可數的，也就是說他與 $\mathbb{N}$ 存在雙射關係。我們將其中的元素編號如下：$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{s_1, s_2, \dots\}$。對於所有 $n \geqslant 1$，s_n 會是個由 0 與 1 構成的序列，寫作

$$s_n = (s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}, \dots),$$

其中對於有 $k \geqslant 1$，我們有 $s_{n,k} \in \{0,1\}$。

我們考慮下面這個 $0, 1$ 序列：

$$y = (y_1, y_2, \dots),$$

其中 $y_k = 1 - s_{k,k}$。由於 $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，我們可以找到 n 使得 $y = s_n$。然而，如果我們看 y 及 s_n 的第 n 位數字，我們可以發現他們不同。這讓我們得到矛盾。

□

命題 1.5.9 ： 實數集合 $\mathbb{R}$ 是個不可數集合。

註解 1.5.10 ： 要證明此命題，我們可以透過不同方式。這裡我們會使用命題 1.5.8 的結果來證明。在習題 1.17 中，我們會利用序列來得到另類的證明。

證明：我們只需要證明區間 $(0,1)$ 是不可數的。如果他是可數的，則 $(0,1]$ 也會數可數的，再根據命題 1.5.5 ，我們會得到

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}} (x, x+1] = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}} (x + (0,1])$$

也是可數的。

對於任意 $x \in (0,1)$，我們可以寫出他的二進位展開：

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots = \sum_{k\geqslant 1} x_k 2^{-k},$$

其中對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $x_k = 0$ 或 1。我們注意到，此二元展開未必會是唯一的。

我們不難檢查，在 $(0,1)$ 中使得二元展開不唯一的元素，剛好會是下面這些二進分數：

$$\mathcal{D} := \{\tfrac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant m \leqslant 2^n - 1, m \in \mathbb{N}\}.$$

此外，每個在 $x \in \mathcal{D}$ 中的數字，可以剛好被寫成兩種方式，其中一種有無窮多個 0，另一種有

無窮多個 1。我們記

$$\mathcal{S}_0 := \{s = (s_n)_{n\geqslant 1} : \exists N \geqslant 1\ \forall n \geqslant N, s_n = 0\},$$
$$\mathcal{S}_1 := \{s = (s_n)_{n\geqslant 1} : \exists N \geqslant 1\ \forall n \geqslant N, s_n = 1\}.$$

則二元展開會是個 $(0,1)\backslash\mathcal{D}$ 與 $\mathcal{S} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}\backslash(\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1)$ 之間的雙射函數。

由於 $\mathcal{S}_0$ 可以看作可數多個有限集合構成的聯集：

$$\mathcal{S}_0 = \bigcup_{N\geqslant 1} (\{0,1\}^{N-1} \times \{0\}^{\mathbb{N}}),$$

因此他是可數的。同樣的，我們也知道 $\mathcal{S}_1$ 是可數的。因此，$\mathcal{S}$ 還是不可數的（命題 1.5.8），因此 $(0,1)\backslash\mathcal{D}$ 也是不可數的。由於 $\mathcal{D}$ 是可數的，我們得到 $(0,1)$ 會是不可數的。 $\square$

註解 1.5.11：我們把 $\mathbb{N}$ 的基數記作 $\aleph_0$（定義 1.4.3），而且在命題 1.5.7 中，我們看到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 與 $\mathbb{N}$ 並非等勢集合。自然的問題會是，是否存在介於兩者之間的集合 S？更確切的說，我們希望 S 滿足 $\mathbb{N} \hookrightarrow S \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 而且 S 與 $\mathbb{N}$ 或 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 皆不存在雙射關係。如果答案是否定的，這代表著 $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ 會是 $\aleph_0$ 的後續基數，意思是 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$。如果答案是肯定的，我們則會有 $\aleph_0 < \aleph_1 < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$。

關於 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 成立與否的問題，最早是在 1878 年由 Georg Cantor 所提出來的，同時他也是 1900 年 Hilbert 的 23 的問題中的第一個。在 1963 年，Paul Cohen 證明了此性質成立與否與 Zermelo–Fraenkel 集合論包含選擇公理 (ZFC) 是獨立的，也就是說 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$（稱作連續統假設）或他的否定題，是可以以額外公理的形式，被加入 ZFC 理論的。