第二章 賦距空間與賦範空間的拓撲

第一節 基礎概念

在第一章節，我們會從賦距空間與賦範空間的定義開始，並且在上面定義拓撲的概念。

第一小節 賦距空間、賦範空間、範例

定義 2.1.1 ： 給定集合 M。若函數 $d : M \times M \to \mathbb{R}$ 滿足下列條件，則我們說他是個在 M 上的距離 (distance or metric) 。

(i) 【正定性】$d(x, y) \geqslant 0$，且等號成立若且唯若 $x = y$。

(ii) 【對稱性】$d(x, y) = d(y, x)$ 對於所有 $x, y \in M$。

(iii) 【三角不等式】$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ 對於所有 $x, y, z \in M$。

若 d 是個 M 上的距離，我們也稱 (M, d) 是個賦距空間 (metric space) 。

範例 2.1.2 ： 下面是幾個常見的賦距空間的例子。

(1) 在 $\mathbb{R}$ 上，函數 $d(x, y) = |x - y|$ 是個距離。

(2) 在 $\mathbb{R}^n$ 上，下列函數稱作歐氏距離 (Euclidean distance) ：

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(3) 在 $\mathbb{R}^n$ 上，下列函數都是距離：

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|, \\ d_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}. \end{aligned}$$

(4) 對於任意非空集合 M，我們定義

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & 若\ x = y, \\ 1 & 若\ x \neq y. \end{cases}$$

此函數稱作離散距離 (discrete metric) 且 (M, d) 稱作離散賦距空間 (discrete metric space) 。

定義 2.1.3 ： 令 V 為在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量空間。如果函數 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ 滿足下列條件，則我們說他是個在 V 上的範數 (norm) 。

(i) 【正定性】$\|x\| = 0$ 若且唯若 $x = 0$。

(ii) 【均勻性】對於所有 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及 $x \in V$，我們有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$。

(iii) 【三角不等式】對於任意 $x, y \in V$，我們有 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$。

若 $\|\cdot\|$ 是個在 V 上的範數，則我們說 $(V, \|\cdot\|)$ 是個賦範向量空間 (normed vector space) 或是賦範空間 (normed space) 。

範例 2.1.4 ： 給定賦範空間 $(V, \|\cdot\|)$，函數 $d(x, y) := \|x - y\|$ 定義在 V 上的距離，讓 (V, d) 成為賦距空間。因此，當我們想要把賦範空間看成賦距空間時，我們預設的選擇會是此定義。

範例 2.1.5 ： 下面是幾個我們會常常在 $\mathbb{R}^n$ 上所考慮的範數。對於 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，我們定義

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty := \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{2.1}$$

讀者可以自行檢查定義 2.1.3 中的性質 (1)–(3) 皆有滿足。

範例 2.1.6 ： 下列實數序列所構成的空間也是賦範空間：

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \Big\{ a = (a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_1 := \sum_{n \geqslant 1} |a_n| < \infty \Big\},$$
$$\ell^2(\mathbb{R}) := \Big\{ a = (a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_2 := \sqrt{\sum_{n \geqslant 1} |a_n|^2} < \infty \Big\},$$
$$\ell^\infty(\mathbb{R}) := \Big\{ a = (a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_\infty := \sup_{n \geqslant 1} |a_n| < \infty \Big\}.$$

範例 2.1.7 ： 給定集合 X 及賦範向量空間 $(V, \|\cdot\|)$。我們記 $\mathcal{B}(X, V)$ 為所有從 X 到 V 有界函數所構成的集合，不難檢查這也是個向量空間。我們可以在 $\mathcal{B}(X, V)$ 上考慮下列範數：

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|, \qquad f \in \mathcal{B}(X, V).$$

範例 2.1.8 ： 令 $a < b$ 為兩個實數。考慮由所有在 $[a,b]$ 上取值在 $\mathbb{R}$ 中的連續函數所構成的集合 $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$，我們不難檢查這是個向量空間。我們可以在下面的子向量空間上，定義所相對應的範數：

$$L^1([a,b],\mathbb{R}) := \Big\{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty \Big\},$$
$$L^2([a,b],\mathbb{R}) := \Big\{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} < \infty \Big\},$$
$$L^\infty([a,b],\mathbb{R}) := \Big\{ f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \Big\}.$$

範例 2.1.9 ： 我們考慮由係數在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的多項式 $\mathbb{K}[X]$，並定義下列範數。

(a) 任意多項式 P 可以被唯一寫作 $P = \sum_{n=0}^\infty a_n X^n$，其中序列 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 中只有有限非零項。接著，我們定義

$$\|P\|_1 = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2}, \quad \text{且 } \|P\|_\infty = \max_{n\geqslant 0} |a_n|.$$

(b) 給定兩個實數 $a < b$ 並將多項式 P 視為在 $[a,b]$ 上的函數 $t \mapsto P(t)$。接著，我們定義

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2\,\mathrm{d}t}, \quad \text{且 } \|P\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$

定義 2.1.10 ： 歐氏空間 (Euclidean space) 是個在 $\mathbb{R}$ 上的有限維度向量空間 V，並且配有內積 (inner product) $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$，滿足下列條件。

(i) 【正定性】$\langle x,x\rangle \geqslant 0$，且等號成立若且唯若 $x = 0$。

(ii) 【對稱性】$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ 對於所有 $x,y \in V$。

(iii) 【線性】$\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ 對於所有 $a,b \in \mathbb{R}$ 及 $x,y,z \in V$。

範例 2.1.11 ： 我們可以賦予向量空間 $\mathbb{R}^n$ 下面這個內積：

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

使他成為歐氏空間。

命題 2.1.12 ： 給定歐氏空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$，我們可以定義

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

則 $\|\cdot\|$ 是個在 V 上的範數，也是歐氏空間上 V 上的預設範數。

證明：我們只需要檢查 (2.2) 中定義的函數滿足三角不等式。這是個經典的證明，見習題 2.5 。□

接下來，我們會固定一個賦距空間 (M, d) 並且定義一些在此空間中的概念。如果你需要有個實際的例子來視覺化，可以考慮範例 2.1.2 中 (1) 或 (2) 的例子，不過要記住的是，這些概念在任何抽象的賦距空間 (M, d) 中都是有意義的。此外，某些性質在一般賦距空間中會非常不一樣，例如可以考慮範例 2.1.2 (4) 中的離散賦距空間，此空間中的球（稍後會定義，也參見範例 2.1.30 ）會有不一樣的行為。

定義 2.1.13 ： 給定 $x \in M$ 及 $r \geqslant 0$，我們定義

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{y \in M : d(x,y) < r\}, \\ \overline{B}(x,r) &= \{y \in M : d(x,y) \leqslant r\}, \\ S(x,r) &= \{y \in M : d(x,y) = r\}. \end{aligned}$$

我們說 $B(x,r)$ 是個中心在 x，半徑為 r 的開球 (open ball) ，$\overline{B}(x,r)$ 是個中心在 x，半徑為 r 的閉球 (closed ball) ，$S(x,r)$ 是個中心在 x，半徑為 r 的球殼 (sphere) 。如果集合 M 被賦予多個不同的距離，我們可以記 $B_d(x,r)$、$\overline{B}_d(x,r)$ 或 $S_d(x,r)$ 來強調所考慮的球是針對距離 d 定義的。

註解 2.1.14 ： 對於任意 $x \in M$ 及 $r \geqslant 0$，我們有 $B(x,r) \cup S(x,r) = \overline{B}(x,r)$。此外，對於任意 $x \in M$，我們也有 $B(x,0) = \varnothing$ 以及 $\overline{B}(x,0) = \{x\}$。

定義 2.1.15 ： 給定非空子集合 $A \subseteq M$，我們可以定義他的直徑 (diameter) ：

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

如果 $A = \varnothing$ 或是 $\delta(A) < +\infty$，則我們說 A 是有界 (bounded) 的。反之，我們說 A 是無界 (unbounded) 的。

定義 2.1.16 ： 給定兩個 M 的非空子集合 A 及 B，我們定義 A 與 B 之間的距離為

$$d(A,B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x,y).$$

我們也能定義從一個點 x 到一個子集合 $A \subseteq M$ 的距離為

$$d(x,A) = d(\{x\},A) = \inf_{y\in A} d(x,y).$$

註解 2.1.17 ： 在定義 2.1.16 中，我們看到原本定義在賦距空間 (M,d) 上的距離 d 可以被推廣為下面這個函數

$$d : (\mathcal{P}(M)\backslash\{\varnothing\})^2 \to \mathbb{R}.$$

然而，從定義 2.1.1 的定義來看，此函數 d 並不是在非空子集合 $\mathcal{P}(M)\backslash\{\varnothing\}$ 上的距離。例如，如果我們取 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$，則當 $A = [0,2]$ 及 $B = [1,3]$ 時，我們有 $d(A,B) = 0$，但卻不會有 $A = B$。雖然如此，我們會濫用此名稱，仍然把他稱作距離。

第二小節 開集與閉集

我們再來固定賦距空間 (M,d)，並定義在此空間上的開集與閉集。(M,d) 的拓撲是被這些集合所描述的。

定義 2.1.18 ： 給定子集合 $A \subseteq M$，若 $A = \varnothing$ 或是

$$\forall x \in A, \exists r > 0 \quad \text{使得} \quad B(x,r) \subseteq A.$$

則我們說 A 是 M 中的開集 (open set) 。

範例 2.1.19 ： 下面是一些開集的例子。

(1) 開球是開集。

(2) 取 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$，則滿足 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ 的區間 (a,b) 是開集。

(3) 在賦距空間 (M,d) 中，固定子集合 $A \subseteq M$ 以及 $r > 0$。則集合

$$A_r = \{y \in M : d(y,A) < r\}$$

是個開集。我們來證明這個性質。令 $y \in A_r$，並記 $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - d(y,A)) > 0$。則對於任何

$z \in B(y,\varepsilon)$，我們從三角不等式可以得到

$$\forall x \in A, \quad d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(y,x).$$

在上方式子兩側對 $x \in A$ 取最大下界，則對於所有 $z \in B(y,\varepsilon)$，我們會得到

$$d(z,A) = \inf_{x\in A} d(z,x) \leqslant \varepsilon + \inf_{x\in A} d(y,x) = \varepsilon + d(y,A) = \tfrac{1}{2}(r + d(y,A)) < r.$$

也就是說，$B(y,\varepsilon) \subseteq A_r$。

命題 2.1.20 ： (M,d) 中的開集滿足下列性質。

(1) 空集合 $\varnothing$ 及全空間 M 兩者皆是開集。

(2) 任意多個開集的聯集仍是開集。

(3) 有限多個開集的交集仍是開集。

證明：

(1) 根據定義，空集合 $\varnothing$ 是個開集。全空間 M 也是個開集，因為對於任意點 $x \in M$ 及任意 $r > 0$，我們有 $B(x,r) \subseteq M$。

(2) 令 $(A_i)_{i\in I}$ 為 M 中的開集族。記 $A = \bigcup_{i\in I} A_i$，我們想要證明 A 也是個開集。給定 $x \in A$。根據定義，我們能找到 $i \in I$ 使得 $x \in A_i$。由於 A_i 是個開集，我們可以取 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subseteq A_i$。因此，我們也有 $B(x,r) \subseteq A$。換句話說，對於任意在 A 中的點，我們能夠找到以他為中心的開球，使得整顆球也會在 A 中，這代表 A 是個開集。

(3) 令 $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 為開集構成的有限族。記 $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，我們想要證明 A 也是個開集。給定 $x \in A$。對於所有的 $i = 1,\ldots,n$，我們有 $x \in A_i$，由於 A_i 是個開集，我們能找到 $r_i > 0$ 使得 $B(x,r_i) \subseteq A_i$。取 $r := \min(r_1,\ldots,r_n) > 0$，則我們有 $B(x,r) \subseteq B(x,r_i) \subseteq A_i$，也就是說 $B(x,r) \subseteq A$。

□

註解 2.1.21 ： 在上面的條件中，我們的假設是很重要的。開集構成的任意交集不一定是個開集。例如，對於所有 $n \geqslant 1$，我們考慮開集 $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$，但他們的交集

$$I := \bigcap_{n\geqslant 1} I_n = \{0\}$$

顯然不是個（$\mathbb{R}$ 中的）開集。

註解 2.1.22 ： 給定集合 X 以及由 X（部份）子集合所構成的集合 τ。若 τ 滿足命題 2.1.20 中的性質，其中我們把敘述中的「開集」都改為「X 中的元素」，則我們說 τ 是個 X 上的拓撲 (topology)。這些性質為拓撲的公理。集合 τ 中的元素稱作開集，且 (X, τ) 稱作拓撲空間。此推廣與我們上面定義的方式是相容的，因為在賦距空間 M 中，我們所考慮的拓撲 τ 就只是所有滿足定義 2.1.18 中條件的子集合 A。我們也注意到，如果我們賦予集合 M 兩個不同的距離 d_1 及 d_2，他們可能會定義出不同的拓撲空間；當然，他們還是有可能會定義出相同的拓撲空間，意思是對於子集合 $A \subseteq M$ 來說，若且唯若他在 (M, d_1) 是開集，則他在 (M, d_2) 中也是開集。我們會在範例 2.3.4 及第 2.5.4 小節當中看到一些例子。

定義 2.1.23 ： 給定 $A \subseteq M$。如果 $A^c = M \backslash A$ 是個開集，則我們說 A 是個在 M 中的閉集 (closed set)。

範例 2.1.24 ： 以下是一些閉集的範例。

(1) 閉球是閉集。

(2) 在賦距空間 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，對於任意 $-\infty < a < b < \infty$，區間 $[a, b]$ 是閉集。然而，對於任意 $-\infty < a < b < \infty$，區間 $[a, b)$ 既不是開集，也不是閉集。

(3) 在賦距空間 (M, d) 中，固定子集合 $A \subseteq M$ 以及 $r > 0$。則集合

$$\overline{A}_r = \{y \in M : d(y, A) \leqslant r\}$$

是個閉集。令 $y \in M \backslash \overline{A}_r$ 並記 $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(y, A) - r)$。則我們可以證明 $B(y, \varepsilon) \subseteq M \backslash \overline{A}_r$。

命題 2.1.25 ： 在 (M, d) 中的閉集滿足下列性質。

(1) 空集合 $\varnothing$ 及全空間 M 皆為閉集。

(2) 有限多個閉集的聯集仍是閉集。

(3) 任意多個閉集的交集仍是閉集。

證明： 證明與命題 2.1.20 的證明相同，因為開集的補集是個閉集。 □

問題 2.1.26： 敘述「任意多個閉集的聯集仍是閉集」是否為真？如果是，請證明此敘述；如果不是，請給出一個反例。

第三小節 閉包、開核、邊界

在賦距空間 (M,d) 中，子集合並不是只有開集與閉集兩種，也有可能兩者都不是，例如範例 2.1.24 (2)。給定子集合 $A \subseteq M$，我們可以定義他的閉包（閉集）、開核（開集）以及邊界（兩者的差集）。

我們先定義閉包的概念，並討論相關性質。

定義 2.1.27 ： 給定 M 的子集合 A，我們把 A 的閉包 (closure) 記作 $\mathrm{cl}(A)$ 或 $\overline{A}$，他是包含 A 的最小閉集。換句話說，我們有

$$\mathrm{cl}(A) = \overline{A} := \bigcap_{\substack{G \supseteq A \\ G \text{ 為閉集}}} G. \tag{2.3}$$

命題 2.1.28 ： 令 A 為 M 的子集合。若且唯若 $\overline{A} = A$，則 A 為閉集。

證明： 給定 M 的子集合 A。

$\boxed{\Leftarrow}$ 我們先假設 A 是閉集。使用在式 (2.3) 中的定義，任何在右方交集中的子集合 G 必須包含 A，且我們也能取 $G = A$。因此顯然地，交集的結果會是 A。

$\boxed{\Rightarrow}$ 我們假設 $\overline{A} = A$。由於 $\overline{A}$ 是閉集，A 也會是閉集。 □

命題 2.1.29 ： 令 $A \subseteq M$ 及 $x \in M$。下列性質等價：

(1) $x \in \overline{A}$。

(2) 對於所有 $\varepsilon > 0$，存在 $a \in A$ 使得 $d(a,x) < \varepsilon$；換句話說，$A \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing$。

(3) $d(x,A) = 0$。

換句話說，我們可以把閉包 $\overline{A}$ 寫作：

$$\overline{A} = \{y \in M : d(y,A) = 0\}.$$

證明： 我們要證明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)。

- (1) ⇒ (2)。令 $x \in \overline{A}$。給定 $\varepsilon > 0$，我們想要找到 $a \in A$ 使得 $d(a,x) < \varepsilon$。定義

$$\overline{A}_\delta := \{y \in M : d(y,A) \leqslant \delta\}, \quad \forall \delta \geqslant 0.$$

由於對於任意 $\delta \geqslant 0$，子集合 $\overline{A}_\delta$ 是個包含 A 的閉集，根據 $\overline{A}$ 的定義，我們推得 $x \in \overline{A}_\delta$

對於任意 $\delta \geqslant 0$。取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$，我們知道 $d(x,A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，也就是說我們能找到 $a \in A$ 使得 $d(a,x) < \varepsilon$。

- (2) $\Rightarrow$ (3)。固定 $\varepsilon > 0$。根據 (2)，我們可以到 $a \in A$ 滿足 $d(a,x) < \varepsilon$。因此，我們有 $d(x,A) \leqslant d(a,x) < \varepsilon$。由於 $\varepsilon > 0$ 可以取做任意小，我們推得 $d(x,A) = 0$。
- (3) $\Rightarrow$ (1)。使用反證法，我們假設 $x \notin \overline{A}$。由於 $(\overline{A})^c$ 是個開集且包含 x，所以我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subseteq (\overline{A})^c$。這代表對於任意 $a \in A$，我們有 $d(x,a) \geqslant \varepsilon$，這與 (3) 的假設矛盾。

□

範例 2.1.30 ： 下面是一些閉集的例子。

(1) 在賦範空間 $(V, \|\cdot\|)$ 中，置中單位開球的閉包是置中單位閉球，也就是說

$$\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1).$$

(2) 若我們考慮 $M = \{0,1\}$ 並賦予離散距離 $d(x,y) = \mathbb{1}_{x \neq y}$，則

$$\overline{B(x,1)} \subsetneq \overline{B}(x,1), \qquad \forall x \in M.$$

要解釋此結果，我們注意到 $B(x,1) = \{x\}$ 同時是個開集也是閉集，所以我們有 $\overline{B(x,1)} = B(x,1)$。然而，閉球 $\overline{B}(x,1)$ 會是整個空間 M。當我們只要考慮包含至少兩個點的集合 M，賦予範例 2.1.2 (4) 中的離散距離，則在離散賦距空間 (M,d) 中，相似結果仍然成立。

(3) 在 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，對於 $-\infty < a < b < \infty$，開集 (a,b) 的閉包是 $[a,b]$。

定義 2.1.31 ： 若 A 為 M 的子集合，且滿足 $\overline{A} = M$，則我們說 A（在 M 中）是稠密 (dense) 的。

註解 2.1.32 ： 要檢查子集合 A 是否在 M 中為稠密的，我們可以利用命題 2.1.29 中的 (2) 或 (3)。

我們看稠密性在 $\mathbb{R}$ 中的詮釋方式。

引理 2.1.33 ： 在 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，若且唯若對於所有 $a < b$，我們有 $(a,b) \cap A \neq \varnothing$，則子集合 A 是稠密的。

證明：我們先假設 A 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的，也就是 $\overline{A}=\mathbb{R}$。令 $a<b$，$x=\frac{1}{2}(a+b)$ 及 $\varepsilon=\frac{1}{2}(b-a)$。則 $(a,b)\cap A=B(x,\varepsilon)\cap A$，根據命題 2.1.29 (2) 是個非空集合。

令 A 為 $\mathbb{R}$ 的子集合滿足對於所有 $a<b$，交集 $A\cap(a,b)$ 非空。給定 $x\in\mathbb{R}$，我們想要證明 $x\in\overline{A}$。對於任意 $\varepsilon>0$，取 $a=x-\varepsilon$ 及 $b=x+\varepsilon$，由於 $(a,b)\cap A=B(x,\varepsilon)\cap A$ 根據假設為非空，從命題 2.1.29 中的 (2)，我們推得 $x\in\overline{A}$。 □

範例 2.1.34 ： 在 $\mathbb{R}$ 中，有理數集合 $\mathbb{Q}$ 及無理數集合 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 皆是稠密的，也就是說 $\overline{\mathbb{Q}}=\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$。

接著，我們定義內點以及開核的概念，我們可以看到，這些概念（取補集後）與閉包是非常相似的。

定義 2.1.35 ： 令 $A\subseteq M$ 及 $x\in A$。如果存在 $\varepsilon>0$ 使得 $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq A$，則我們說 x 是 A 的內點 (interior point) 。

定義 2.1.36 ： 給定 M 的子集合 A，我們把 A 的開核 (interior) 記作 $\operatorname{int}(A)$ 或 $\mathring{A}$，他是包含在 A 中最大的開集。換句話說，我們有

$$\operatorname{int}(A)=\mathring{A}:=\bigcup_{\substack{G\subseteq A\\ G\text{ 為開集}}}G. \tag{2.4}$$

命題 2.1.37 ： 給定 M 的子集合 A。則 $\operatorname{int}(A)$ 為所有 A 的內點所構成。

證明：令 $x\in A$ 為 A 的內點。根據定義 2.1.35 ，我們可以找到 $\varepsilon>0$ 使得 $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq A$。這代表著，$B(x,\varepsilon)$ 是式 (2.4) 右側聯集中的元素之一。因此，我們有 $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq\operatorname{int}(A)$。

給定 $x\in\operatorname{int}(A)$，根據定義，存在開集 $G\subseteq A$ 滿足 $x\in G$。由於 G 是開集，從定義 2.1.18 我們得知，存在 $\varepsilon>0$ 使得開球 $B(x,\varepsilon)$ 包含 x。 □

命題 2.1.38 ： 令 A 為 M 的子集合。若且唯若 $\mathring{A}=A$，則 A 為開集。

證明：此證明與命題 2.1.28 的證明相似。 □

範例 2.1.39 ： 下面是一些開核的範例。

(1) 在賦範空間 $(V, \|\cdot\|)$ 中，置中單位閉球的開核會是置中單位開球，也就是說

$$\operatorname{int}(\overline{B}(0,1)) = B(0,1).$$

然而，在一般的賦距空間中，此等式未必會成立，情形與範例 2.1.30 (2) 相似。

(2) 我們不一定有 $\mathring{\overline{A}} = A$。例如，考慮 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 及 $A = (0,1)\cup(1,2)$，則我們有 $\overline{A} = [0,2]$ 但 $\mathring{\overline{A}} = (0,2) \neq A$。

(3) 在 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，對於 $-\infty < a < b < \infty$，閉區間 (a,b) 的開核會是 (a,b)。

(4) 在 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，$\mathbb{Q}$ 或是 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 的開核是 $\varnothing$。

命題 2.1.40 ： 給定子集合 $A \subseteq M$，則我們有

$$\operatorname{int}(A) = M\backslash \operatorname{cl}(M\backslash A) \quad \text{以及} \quad \operatorname{cl}(A) = M\backslash \operatorname{int}(M\backslash A).$$

證明：根據對稱性，我們只需要證明對於所有子集合 $A \subseteq M$，我們有 $\operatorname{int}(A) = M\backslash \operatorname{cl}(M\backslash A)$ 即可。令 $A \subseteq M$。我們直接使用式 (2.3) 及式 (2.4) 中的定義，得到

$$\begin{aligned} M\backslash \operatorname{int}(A) &= M\backslash\Big(\bigcup_{\substack{G\subseteq A \\ G\text{ 為開集}}} G\Big) = \bigcap_{\substack{G\subseteq A \\ G\text{ 為開集}}} (M\backslash G) \\ &= \bigcap_{\substack{M\backslash G\supseteq M\backslash A \\ G\text{ 為開集}}} (M\backslash G) = \bigcap_{\substack{F\supseteq M\backslash A \\ F\text{ 為閉集}}} F = \operatorname{cl}(M\backslash A). \end{aligned}$$

□

定義 2.1.41 ： 給定 M 的子集合 A，我們把 A 的<u>邊界</u> (boundary) 定義做 $\partial A := \overline{A}\backslash\mathring{A}$。

範例 2.1.42 ：

(1) 若 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 及 $A = [0,1)$，則 $\partial A = \{0,1\}$。

(2) 若 $(M,d) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ 及 $A = [0,1)\times\{0\}$，則 $\partial A = [0,1]\times\{0\}$。

第二節　附著點及匯聚點

第一小節 在一般的賦距空間中

定義 2.2.1 ： 給定 M 的子集合 A 以及 $x \in M$。

(1) 如果對於所有 $\varepsilon > 0$，我們有
$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$
則我們說 x 是 A 的附著點 (adherent point)。我們把 A 中附著點構成的集合記作 $\operatorname{Adh}(A)$。

(2) 如果對於所有 $\varepsilon > 0$，我們有
$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \quad \text{且} \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \{x\},$$
則我們說 x 是 A 的匯聚點 (accumulation point)。我們把 A 中匯聚點構成的集合記作 $\operatorname{Acc}(A)$。

(3) 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得
$$B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\},$$
則我們說 x 是 A 的孤立點 (isolated point)。我們把 A 中孤立點構成的集合記作 $\operatorname{Iso}(A)$。

註解 2.2.2 ： 從上面定義，我們可以注意到：

(1) 附著點構成的集合剛好就是閉包，也就是說 $\operatorname{Adh}(A) = \overline{A}$，見命題 2.1.29 。

(2) 附著點構成的集合可以寫成另外兩個集合的互斥聯集，也就是說 $\operatorname{Adh}(A) = \operatorname{Acc}(A) \sqcup \operatorname{Iso}(A)$；

(3) 若且唯若所有 M 中的點皆是 A 的附著點，換句話說 $\operatorname{Adh}(A) = M$，則 A 在 M 中是稠密的。

範例 2.2.3 ： 在賦距空間 $(M,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，考慮集合 $A := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$，則

- 0 是個 A 的匯聚點；
- 對於所有 $n \geqslant 1$ 的正整數，$\frac{1}{n}$ 是個 A 的孤立點；
- $A \cup \{0\}$ 中的點皆為 A 的附著點。

命題 2.2.4 ： 給定 M 的子集合 A 以及 $x \in M$。下列性質等價：

(1) x 是個 A 的匯聚點。

(2) 對於任意 $\varepsilon > 0$，集合 $B(x,\varepsilon) \cap A$ 包含無窮多個點。

證明：根據定義，我們顯然有 (2) ⇒ (1)。

假設 x 是個 A 的匯聚點。固定 $\varepsilon > 0$，我們使用遞迴來構造取值在 $B(x,\varepsilon) \cap A$ 中的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，使得其中的項兩兩相異。

取 $\varepsilon_1 = \varepsilon$，根據定義，我們能找到 $x_1 \in B(x,\varepsilon_1) \cap A$ 使得 $x_1 \neq x$。令 $n \geqslant 1$ 並假設我們已經構造了兩兩不同的 $x_1, \ldots, x_n$ 以及 $\varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_n$ 且滿足

$$\varepsilon_1 > d(x,x_1) = \varepsilon_2 > \cdots > d(x,x_n) =: \varepsilon_{n+1}.$$

再次根據定義，我們能找到 $x_{n+1} \in B(x,\varepsilon_{n+1}) \cap A$ 使得 $x_{n+1} \neq x$. 此外，我們知道 $d(x,x_{n+1}) < \varepsilon_{n+1} = d(x,x_n)$，所以 x_{n+1} 也會與前面的 $x_1, \ldots, x_n$ 都不同。 □

第二小節　在歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 中

我們考慮歐氏空間 $\mathbb{R}^n$，其中 $n \geqslant 1$ 是個正整數。在這樣的空間上，我們考慮的範數是由內積所定義的（命題 2.1.12），這也會給我們相對應在 $\mathbb{R}^n$ 上的距離（範例 2.1.4）。

定理 2.2.5 【Bolzano–Weierstraß 定理】： 令 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 為有界集合。如果 A 包含無窮多個點，則在 $\mathbb{R}^n$ 中存在至少一個 A 的匯聚點。

註解 2.2.6 ： 這裡選擇歐氏空間所給出的距離是重要的，因為如果我們取範例 2.1.2 (4) 中的離散距離，則在 $\mathbb{R}$ 中，有理數集合 $\mathbb{Q} \subseteq \overline{B}(0,1)$ 是個無窮有界的子集合；然而，在 $\mathbb{R}$ 中，沒有任何 $\mathbb{Q}$ 的匯聚點。這是因為對於 $x \in \mathbb{R}$ 及 $\varepsilon \in (0,1)$，我們有 $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} = \{x\}$ 或 $\varnothing$，取決於 $x \in \mathbb{Q}$ 或是 $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$。

證明：由於 A 是有界的，代表存在 $M > 0$ 使得 $A \subseteq [-M,M]^n$。對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們要來構造序列 $(a_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 以及 $(b_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 使得

(a) 對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，序列 $(a_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 是非遞減的，序列 $(b_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 是非遞增的，而且他們的差 $b_k^{(i)} - a_k^{(i)}$ 在當 $k \to \infty$ 時趨近 0。

(b) 對於所有 $k \geqslant 1$，交集 $A \cap B_k$ 包含無窮多個點，其中

$$B_k := I_k^{(1)} \times \cdots \times I_k^{(n)}, \quad I_k^{(i)} := [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}], \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

我們對 k 使用數學歸納法來證明。

對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，令 $a_1^{(i)} = -M$ 及 $b_1^{(i)} = M$。令 $k \geqslant 1$ 並假設 $(a_\ell^{(i)})_{1\leqslant \ell\leqslant k}$ 及 $(b_\ell^{(i)})_{1\leqslant \ell\leqslant k}$ 已經構造好了，而且分別是非遞減及非遞增的序列，且滿足 (b)。

我們可以把所有的 $I_k^{(i)}$ 切割成兩個相等長度的線段 $I_k^{(i)} := I_{k,1}^{(i)} \cup I_{k,2}^{(i)}$，也就是說

$$I_{k,1}^{(i)} = [a_k^{(i)}, c_k^{(i)}], \quad I_{k,2}^{(i)} = [c_k^{(i)}, b_k^{(i)}], \quad c_k^{(i)} := \tfrac{1}{2}(a_k^{(i)} + b_k^{(i)}),$$

這會給出 2^n 個 B_k 的子集合使得他們的聯集會是 B_k：

$$B_{k,r}^{(i)} = I_{k,r_1}^{(i)} \times \cdots \times I_{k,r_n}^{(i)}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in \{1,2\}^n.$$

由於

$$A \cap B_k = \bigcup_{r \in \{1,2\}^n} (A \cap B_{k,r}^{(i)})$$

會是個無窮集合，至少其中一個 $A \cap B_{k,r}^{(i)}$ 也要是無窮的才可以。令 r 使得 $A \cap B_{k,r}^{(i)}$ 是無窮的。則對於 $1 \leqslant i \leqslant n$，令

$$(a_{k+1}^{(i)}, b_{k+1}^{(i)}) = \begin{cases} (a_k^{(i)}, c_k^{(i)}) & \text{若 } r_i = 1, \\ (c_k^{(i)}, b_k^{(i)}) & \text{若 } r_i = 2. \end{cases}$$

我們不難檢查 $a_k^{(i)} \leqslant a_{k+1}^{(i)}$、$b_k^{(i)} \geqslant b_{k+1}^{(i)}$，以及 $b_{k+1}^{(i)} - a_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{2}(b_k^{(i)} - a_k^{(i)})$。

現在對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們已經構造好如上的序列 $(a_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 及 $(b_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$，我們知道 $(a_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 及 $(b_k^{(i)})_{k\geqslant 1}$ 兩者皆會收斂，且他們的極限相等，記作 x_i。我們想要證明 $x := (x_1, \ldots, x_n)$ 是個 A 的匯聚點。要證明這件事情，我們會固定 $\varepsilon > 0$，並且檢查 $A \cap B(x, \varepsilon)$ 包含無窮多個點。從上述的證明，我們不難看到對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $x \in B_k$。對於夠大的 $k \geqslant 1$，我們也有 $B_k \subseteq B(x, \varepsilon)$，因此 $A \cap B(x, \varepsilon)$ 也會包含無窮多個點。 □

定理 2.2.7 【Cantor 交集定理】：給定 $\mathbb{R}^n$ 中非空閉集序列構成的序列 $(A_k)_{k\geqslant 1}$。假設

- 對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $A_{k+1} \subseteq A_k$；
- A_1 有界。

則交集 $A = \bigcap_{k\geqslant 1} A_k$ 是個非空閉集。

註解 2.2.8：假設 A_k 是閉集且 A_1 有界是重要的。

- 如果 A_k 不是閉集，例如 $A_k = (0, \frac{1}{k})$，則 $\bigcap_{k\geqslant 1} A_k = \varnothing$。
- 如果 A_1 沒有界，例如 $A_k = [k, \infty)$，則 $\bigcap_{k\geqslant 1} A_k = \varnothing$。

證明：首先，由於 A 是由閉集構成的交集，因此命題 2.1.25 告訴我們說他也是閉集。接著，我們使用 Bolzano–Weierstraß 定理來證明 A 是非空的。

如果存在 $k \geqslant 1$ 使得 A_k 是有限的，則序列 $(A_k)_{k\geqslant 1}$ 會固定在一個非空集合，所以交集 A 會

是非空的。因此，我們可以假設對於所有 $k \geqslant 1$，A_k 是無窮的。

對於所有 $k \geqslant 1$，我們可以找到 $x_k \in A_k$ 使得序列 $(x_k)_{k\geqslant 1}$ 中的項兩兩相異。我們也注意到，由於 $(A_k)_{k\geqslant 1}$ 是非遞增的，對於所有 $k \geqslant m \geqslant 1$，我們會有 $x_k \in A_m$。由於 $X = \{x_k : k \geqslant 1\}$ 是個包含無窮多個點的有界集合，根據 Bolzano–Weierstraß 定理，他有個匯聚點 $x \in \mathbb{R}^n$。我們需要檢查 x 的確在 A 裡面，也就是說，需要檢查對於所有 $m \geqslant 1$，x 會在 A_m 中。

給定 $m \geqslant 1$ 及 $\varepsilon > 0$。從命題 2.2.4 ，我們知道 $B(x,\varepsilon)$ 會包含 X 中無窮多個點。這些點之中，除了有限個之外（也就是下標 $k < m$ 的情況），其他點也都會在 A_m 中。因此，交集 $A_m \cap B(x,\varepsilon)$ 也是無窮的，意思是說 x 也是個 A_m 的匯聚點。由於 A_m 是個閉集，我們得到 $x \in A_m$。 □

範例 2.2.9 ： 我們以遞迴方式，定義在 $\mathbb{R}$ 中的子集合序列：

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0.$$

令 $\mathcal{C} := \cap_{n\geqslant 0} C_n$。我們稱 $\mathcal{C}$ 為 *Cantor* 集合，他會有下列性質。

(1) $\mathcal{C}$ 是個非空閉集。

(2) $\mathcal{C}$ 與 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是等勢的，所以是不可數的。

(3) $\mathcal{C}$ 的「長度」為零。

第三節 子空間拓撲

給定賦距空間 (M,d) 以及子集合 $S \subseteq M$，我們想要賦予 S 一個距離，使得他能夠變成賦距空間。最自然的選擇就是考慮限制距離 $d_{S\times S}$，也就是說把距離 d 限制在 $S \times S$ 上，我們也會濫用記號，把這個距離一樣記作 d。這樣我們可以得到賦距空間 (S,d)，我們把他的拓撲稱作誘導拓撲 (induced topology)、跡拓撲 (trace topology)、子空間拓撲 (subspace topology) 或是相對拓撲 (relative topology)。

命題 2.3.1 ： 令 S 為 M 的子集。

(1) S 中的開集都可以寫作 $A \cap S$，其中 A 是個 M 的開集。

(2) S 中的閉集都可以寫作 $A \cap S$，其中 A 是個 M 的閉集。

證明：根據定義，由於開集的補集是閉集，我們只需要檢查 (1) 即可。開集是透過開球所描述的

（定義 2.1.18），因此我們只需要對開球檢查 (1)。這是顯然的，因為我們有

$$B_S(x,\varepsilon) = B_M(x,\varepsilon) \cap S, \quad \forall x \in M, \varepsilon > 0.$$

□

範例 2.3.2：在賦距空間 $((0,1], |\cdot|)$ 中：

- 對於 $x \in (0,1)$，集合 $(0,x)$ 及 $(x,1]$ 皆是開集；
- 對於 $x \in (0,1)$，集合 $(0,x]$ 及 $[x,1]$ 皆是閉集。

註解 2.3.3：從範例 2.3.2 我們可以看到，當我們討論開集或閉集時，不要忘記強調他是生活在什麼樣的空間中。

範例 2.3.4：如同在範例 2.3.2 所提到的，在空間 $(0,1]$ 上，我們可以考慮由賦距空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 所誘導出來的拓撲。此外，我們也能在 $(0,1]$ 上定義距離 d 為：

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \qquad \forall x,y \in (0,1].$$

我們在習題 2.23 中會檢查，這兩個賦距空間定義出相同的開集。換句話說，$((0,1], |\cdot|)$ 中的開集也會是 $((0,1], d)$ 中的開集，且反之亦然。

第四節　極限

第一小節　定義及性質

在這個小節中，我們給定取值在賦距空間 (M,d) 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$。當我們要討論 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的子序列時，我們可以記

- $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ 其中 $(n_k)_{k\geqslant 1}$ 是個嚴格遞增序列且 $n_1 \geqslant 1$；
- 或 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$，其中 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是個嚴格遞增函數，稱作萃取函數 (extraction)。

定義 2.4.1：

- 令 $\ell \in M$。如果對於任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $d(a_n, \ell) < \varepsilon$，則我們說 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至 ℓ，並記作

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \qquad \text{或} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

- 如果存在 $\ell \in M$ 使得 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至 ℓ，則我們說 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂。

- 如果 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 不收斂，則我們說 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 發散。

註解 2.4.2 ：

(1) 在 $(M,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$ 中，此定義可以化簡為在大一微積分中討論過的，序列在 $\mathbb{R}$ 中收斂的定義。

(2) 在賦距空間 (M,d) 中，收斂性質 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ 也可以詮釋為在 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 中的收斂 $d(a_n,\ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

(3) 收斂概念是個拓撲概念，也就是說他只取決於空間所賦予的拓撲（定義在註解 2.1.22 中），並不取決於空間上的距離。參見習題 2.24 。

範例 2.4.3 ：

(1) 在 $(M,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$ 中，由 $a_n=(-1)^n, n\geqslant 1$ 定義出來的序列不會收斂。然而，子序列 $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ 及 $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ 皆會收斂，他們的極限分別是 1 及 -1。

(2) 序列 $(a_n=\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ 在 $[0,1]$ 中收斂至 0 但在 $(0,1]$ 中會發散。

(3) 如果我們考慮範例 2.1.2 (4) 中的離散賦距空間，則任意收斂序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 會固定在常數上，也就是說存在 $N\geqslant 1$ 使得 $a_n=a_N$ 對於所有 $n\geqslant N$。

引理 2.4.4 ： 序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 最多只能收斂到一個點 $\ell\in M$。

證明：使用反證法，假設序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 可以收斂到 ℓ_1 及 ℓ_2 且滿足 $\ell_1\neq\ell_2$。給定 $\varepsilon>0$，我們能找到 $N_1,N_2\geqslant 1$ 使得

$$\begin{aligned} d(a_n,\ell_1) &< \varepsilon, \qquad \forall n\geqslant N_1,\\ d(a_n,\ell_2) &< \varepsilon, \qquad \forall n\geqslant N_2. \end{aligned}$$

因此，我們取 $n\geqslant \max(N_1,N_2)$ 並使用三角不等式，得到

$$d(\ell_1,\ell_2)\leqslant d(a_n,\ell_1)+d(a_n,\ell_2)<2\varepsilon.$$

由於 ε 可以任意小，對於 $\varepsilon<\frac{1}{2}d(\ell_1,\ell_2)$，我們會得到矛盾。 □

第二小節　柯西序列及完備空間

定義 2.4.5 ： 給定序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$，如果對於任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\geqslant 1$ 使得

$$d(a_n,a_m)<\varepsilon,\qquad \forall n,m\geqslant N, \tag{2.5}$$

則我們說他是個柯西序列 (Cauchy sequence) 。

命題 2.4.6 ： 如果序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 在 (M,d) 中收斂，則他會是個柯西序列。

註解 2.4.7 ： 我們注意到，柯西序列未必會收斂。例如，在賦距空間 $(M,d)=((0,1],|\cdot|)$ 中，$(a_n=\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列，但不會收斂。

證明：假設序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到極限 ℓ。給定 $\varepsilon>0$。根據收斂的定義，我們能找到 $N\geqslant 1$ 使得對於任何 $n\geqslant N$，我們有 $d(a_n,\ell)<\frac{\varepsilon}{2}$。因此，對於任意 $n,m\geqslant N$，我們有

$$d(a_n,a_m)\leqslant d(a_n,\ell)+d(a_m,\ell)<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

命題 2.4.8 ： 柯西序列永遠是有界的。

證明：令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為在賦距空間 (M,d) 中的柯西序列。固定 $\varepsilon>0$ 及 $N\geqslant 1$ 使得式 (2.5) 中的條件成立。集合 $\{a_1,\ldots,a_N\}$ 是有限的，所以有界。根據柯西條件，集合 $\{a_n:n\geqslant N\}$ 也是有界的：

$$d(a_N,a_n)<\varepsilon,\qquad \forall n\geqslant N.$$

□

註解 2.4.9 ： 我們注意到，柯西序列的概念並不是個拓撲概念。他不能夠藉由開集來定義，所以會取決於賦範空間中的距離。我們可以回到範例 2.3.4 中提到的例子。序列 $(a_n=\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ 在 $((0,1],|\cdot|)$ 中是柯西，但在 $((0,1],d)$ 中卻不是，即使這兩個空間定義出來的開集概念是相同的。我們不難檢查，對於任意固定的 $N\geqslant 1$ 以及 $n,m\geqslant N$，我們有

$$|a_n-a_m|\leqslant\frac{1}{N}\quad\text{但}\quad d(a_n,a_m)=|n-m|.$$

定義 2.4.10 ：

- 如果在賦距空間 (M,d) 中，所有的柯西序列皆會在 (M,d) 中收斂，且極限也在 M 中，則我們說 (M,d) 是完備 (complete) 的。

- 若 $(V,\|\cdot\|)$ 是個完備的賦範向量空間，我們稱他為 *Banach* 空間 (Banach space) 。

範例 2.4.11 ：

(1) 對於 $n\geqslant 1$，歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 是完備的。

(2) $\mathbb{Q}$ 不是完備的。我們可以考慮無理數點 $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 以及會在 $\mathbb{R}$ 中收斂到 x 的有理數序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$。此數列在 $\mathbb{Q}$ 中是柯西數列，但不會在 $\mathbb{Q}$ 中收斂。

在第 3.2 節中，我們會對完備空間有比較完整的討論。

第三小節　極限及附著點

在此小節中，我們會討論如何把一些拓撲概念用序列來描述，其中我們會特別探討的是附著點還有閉集這兩個概念，序列讓我們可以更容易了解他們。

接下來，我們給定序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$。對於 $p\geqslant 1$，我們記 $A_p := \{a_n : n\geqslant p\}$ 為序列 $(a_n)_{n\geqslant p}$ 的值域 (range) ，還有令 $A := A_1$。我們也可以定義

$$\mathcal{L} := \{\ell\in M : \text{存在嚴格遞增的函數 } \varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ 使得 } a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\}$$

為所有收斂子序列極限構成的集合。

命題 2.4.12 ： 令 $\ell\in M$ 並假設 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至 ℓ。則我們有下列性質：

(1) A 有界；

(2) ℓ 是 A 的附著點，也就是說 $\ell\in\overline{A}$。

證明：(1) 是可以直接由命題 2.4.6 以及命題 2.4.8 所推得。

接下來證明 (2)，我們先固定 $\varepsilon>0$。根據收斂的定義，我們能找到 $N\geqslant 1$ 使得對於所有 $n\geqslant N$，我們有 $d(a_n,\ell)<\varepsilon$。這讓我們得到 $B(\ell,\varepsilon)\supseteq A_N=\{a_n : n\geqslant N\}$，其中 A_N 是個非空集合。由於此性質對於任意 $\varepsilon>0$ 接成立，我們由此得到 ℓ 是個 A 的附著點。 □

命題 2.4.13 ： 令 $A\subseteq M$ 為子集合，以及 $\ell\in M$。

(1) 如果 ℓ 是 A 的附著點，則我們能找到取值在 A 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$，使得他會收斂到 ℓ。

(2) 如果 ℓ 是 A 的匯聚點，則我們能找到取值在 $A\backslash\{\ell\}$ 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$，使得他會收斂到 ℓ。

證明： 在兩種情況中，構造是相似的，我們先證明 (1)。令 $\ell \in M$ 為 A 的附著點。對於任意 $n \geqslant 1$，由於 $B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$ 非空，我們能找到 $a_n \in A$ 使得 $d(\ell, a_n) < \frac{1}{n}$。我們不難檢查序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到 ℓ。如果要證明 (2)，我們可以這樣構造：對於所有 $n \geqslant 1$，我們知道 $B(\ell, \frac{1}{n}) \cap (A\backslash\{\ell\})$ 是非空的，因此我們在裡面取 a_n 即可。 □

我們把上面命題整理後，可以透過極限的概念拿來描述閉包和閉集。

系理 2.4.14 ： 令 $A \subseteq M$ 為子集合以及 $x \in M$。若且唯若存在取值在 A 中，且會收斂到 x 的序列，則 $x \in \overline{A}$。

證明： 這是命題 2.4.12 與命題 2.4.13 的直接結果。 □

系理 2.4.15 ： 令 $A \subseteq M$ 為子集合。若且唯若（M 中的）收斂序列會收斂到 A 中的點，則 A 會是個閉集。

證明： 此結果可以直接從系理 2.4.14 得到。 □

下面的命題告訴我們什麼時候序列會收斂。

命題 2.4.16 ： 給定序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 $\ell \in M$。若且唯若所有子序列 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ 皆會收斂到 ℓ，則 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 也會收斂到 ℓ。

證明： 我們假設 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到 ℓ。令 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ 為 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的子序列。固定 $\varepsilon > 0$。根據收斂的定義，存在 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $d(a_n, \ell) < \varepsilon$。由於 φ 是嚴格遞增的，我們也會有 $\varphi(n) \geqslant N$ 對於所有 $n \geqslant N$。因此，當 $n \geqslant N$ 時，我們得到 $d(a_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon$。

如果任意子序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 皆收斂到 ℓ，則原本的序列也會收斂到 ℓ，因為 $\varphi(n) = n$ 也是個萃取函數。 □

在結束此小節之前，我們來討論下面這個命題，可以讓我們更加了解由所有 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂子序列極限構成的集合 $\mathcal{L}$ 的結構。

命題 2.4.17 ： 給定取值在 (M, d) 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$，我們回顧在此小節最前面所定義的記號，$\mathcal{L}$ 是所有收斂子序列極限構成的集合，還有 $(A_p)_{p\geqslant 1}$ 為值域集合。令 $\ell \in M$。下列性質等價：

(1) $\ell \in \mathcal{L}$。

(2) 對於所有 $p \geqslant 1$，我們有 $\ell \in \overline{A_p}$。

(3) ℓ 是 A 的匯聚點，或 ℓ 會在序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 中出現無窮次。

上面性質也告訴我們，$(a_n)_{n\geqslant 1}$ 子序列所有可能極限構成的集合能寫作 $\mathcal{L} = \cap_{p\geqslant 1}\overline{A_p}$，因此也是個閉集。

證明： 我們要證明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)。

- (1) ⇒ (2)。假設 $\ell \in \mathcal{L}$，也就是說存在萃取函數 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得 $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$。因此，從命題 2.4.12 ，我們能得到
$$\ell \in \overline{\{a_{\varphi(n)} : n \geqslant 1\}} \subseteq \overline{A_{\varphi(1)}}.$$
對於任何非負整數 $p \geqslant 1$，函數 $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \varphi(n+p)$ 也還是個萃取函數，而且收斂 $a_{\varphi_p(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ 仍然成立。因此，對於所有 $p \geqslant 1$，我們推得 $\ell \in \overline{A_{\varphi(p)}}$。由於子集合 $(A_p)_{p\geqslant 1}$ 是非遞增的（對包含關係來說），我們得到
$$\bigcap_{p\geqslant 1} \overline{A_p} = \bigcap_{p\geqslant 1} \overline{A_{\varphi(p)}}.$$

- (2) ⇒ (3)。假設對於所有 $p \geqslant 1$，我們有 $\ell \in \overline{A_p}$，且 ℓ 在 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 中不會出現無窮次。令 $p \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant p$，我們有 $a_n \neq \ell$。由於 $\ell \in \overline{A_p}$ 且 $\ell \notin A_p$，我們知道 ℓ 是個 A_p 的匯聚點，所以也是 A 的匯聚點。

- (3) ⇒ (1)。如果 ℓ 在 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 中出現無限次，我們不難構造極限為 ℓ 的子序列。現在，我們假設 ℓ 是個 A 的匯聚點。根據命題 2.4.13 ，我們能找到 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$（未必是個萃取函數）使得 $a_{f(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ 且對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $a_{f(n)} \in A\backslash\{\ell\}$。函數 f 不可能有界，不然 $(a_{f(n)})_{n\geqslant 1}$ 只會取有限多個可能值，由於序列 $(a_{f(n)})_{n\geqslant 1}$ 收斂，所以對夠大的 n 來說會是個常數序列，也就是說，他無法收斂到 ℓ。因此，我們可以從 $(f(n))_{n\geqslant 1}$ 中萃取嚴格遞增的子序列出來，記作 $(f \circ \varphi(n))_{n\geqslant 1}$。這樣一來，函數 $\psi := f \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是個萃取函數，且我們有 $a_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$。 □

第四小節 在賦範空間中

在此小節中，我們給定在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範向量空間。

命題 2.4.18 ： 令 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 及 $(y_n)_{n\geqslant 1}$ 為 V 中的兩個序列。假設
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$
則我們有：

(1) $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$,

(2) $\lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$ 對於任意 $\lambda \in \mathbb{K}$；

(3) $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$.

證明：

(1) 我們固定 $\varepsilon > 0$ 並取 $N \geqslant 1$ 使得 $n \geqslant N$，我們有

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \text{且} \quad \|y_n - y\| < \varepsilon.$$

對於 $n \geqslant N$，我們有

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < 2\varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意取，我們得到 $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$。

(2) 我們寫：

$$\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda|\, \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) 三角不等式給我們：

$$|\, \|x_n\| - \|x\|\, | \leqslant \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

第五小節 函數的極限

我們考慮兩個賦距空間 (M, d) 及 (M', d')。令 $A \subseteq M$ 為 M 的子集合，以及 $f : A \to M'$ 為由 A 到 M' 的函數。

定義 2.4.19 ： 令 a 為 A 的匯聚點以及 $b \in M'$。如果對於所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in A\backslash\{a\}, \quad d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), b) < \varepsilon, \tag{2.6}$$

則我們說當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 會趨近於 b，記作：

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

命題 2.4.20 ： 令 a 為 A 的匯聚點以及 $b \in M'$。下列性質是等價的：

(1) 當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 趨近於 b，也就是說

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

(2) 對於任意取值在 $A\setminus\{a\}$ 中，且收斂至 a 的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，我們有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

證明：我們假設 (1) 成立，也就是說當 $x \to a$ 時，我們有 $f(x) \to b$。固定 $\varepsilon > 0$ 並選 $\delta > 0$ 使得式 (2.6) 成立。固定取值在 $A\setminus\{a\}$ 中且收斂到 a 的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$。我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $d(x_n, a) < \delta$。因此，對於所有 $n \geqslant N$，我們也會有 $d'(f(x_n), b) < \varepsilon$。這個證明了 $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$。

我們使用反證法來證明逆命題。我們假設 (2) 成立但 (1) 不成立。如果 (1) 不成立，我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得對於所有 $n \geqslant 1$，會有 $x_n \in A$ 使得

$$0 < d(x_n, a) < \tfrac{1}{n} \quad 且 \quad d'(f(x_n), b) \geqslant \varepsilon.$$

顯然地，序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到 a，但序列 $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ 卻不會收斂到 b，因為永遠有個正的距離把 $f(x_n)$ 與 b 分開。這與 (2) 矛盾。 □

命題 2.4.21 ： 考慮在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範向量空間 $(V, \|\cdot\|)$。令 $f, g : A \to V$ 為兩個函數，且 a 為 A 的匯聚點。假設

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

則我們有：

(1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$,

(2) $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$ 對於所有 $\lambda \in \mathbb{K}$；

(3) $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|b\|$.

證明：這是應用命題 2.4.18 以及命題 2.4.20 可以得到的直接結果。 □

第六小節　在實數線上

接下來，我們給定取值在 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$。在命題 2.4.17 中，我們看到怎麼去描述收斂子序列的極限，這裡我們要引進其他的極限概念。

定義 2.4.22 ： 我們定義

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} a_k,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} a_k,$$

稱作 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的上極限 (upper limit) 及下極限 (lower limit) 。

註解 2.4.23 ： 我們注意到，我們可以把 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 寫成一個非遞增極限：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \downarrow \sup_{k\geqslant n} a_k,$$

因為 $(\sup_{k\geqslant n} a_k)_{n\geqslant 1}$ 是個非遞增序列。相似地，$\liminf_{n\to\infty} a_n$ 可以被寫成一個非遞減極限：

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \uparrow \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

範例 2.4.24 ：

(1) 序列 $a_n = (-1)^n$ 的上極限為 1，下極限為 -1。

(2) 序列 $a_n = \sin(n)$ 的上極限為 1，下極限為 -1。

引理 2.4.25 ： 如果 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ 是個 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的收斂子序列，則他的極限 ℓ 會是 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點，且滿足

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \ell := \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

證明： 令 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ 為 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的收斂子序列。從命題 2.4.17 我們得知，他的極限 ℓ 會是值域 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點。

接著，對於任何 $n \geqslant 1$，我們顯然有

$$\inf_{k\geqslant\varphi(n)} a_k \leqslant a_{\varphi(n)} \leqslant \sup_{k\geqslant\varphi(n)} a_k. \tag{2.7}$$

在式 (2.7) 中，我們對左方的不等式取單調極限會得到：

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant\varphi(n)} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant\varphi(n)} a_k \leqslant \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \ell.$$

如果我們對式 (2.7) 的右方不等式也取單調極限，我們會得到另一個不等式。 □

引理 2.4.26 ： 存在子序列 $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ 以及 $(a_{\psi(n)})_{n\geqslant 1}$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)}, \qquad \text{且} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\psi(n)}.$$

證明：我們要透過遞迴，構造萃取函數 φ 來得到下極限。令 $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n$。定義

$$\varphi(1) := \inf\{n \geqslant 1 : \ell - 1 \leqslant a_n \leqslant \ell + 1\},$$
$$\forall n \geqslant 1, \qquad \varphi(n+1) := \inf\{n > \varphi(n) : \ell - \tfrac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant \ell + \tfrac{1}{n}\}.$$

我們不難檢查對於所有 $n \geqslant 1$，$\varphi(n)$ 是定義良好的，還有 φ 是嚴格遞增的。此外，我們也會有 $\lim a_{\varphi(n)} = \ell$。上極限的構造方式也非常相似。 □

註解 2.4.27 ： 上面兩個引理解釋了為什麼我們把 $\limsup$ 及 $\liminf$ 分別稱作<u>上極限</u>和<u>下極限</u>。

命題 2.4.28 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $\mathbb{R}$ 中的序列。若且唯若 $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$，則序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂。

證明：這是由命題 2.4.16 以及上述引理（引理 2.4.26 and 引理 2.4.25）所得到的直接結果。 □

註解 2.4.29 ： 一般來講，實數序列的極限不一定存在，但他的上極限（或下極限）在 $(-\infty, +\infty]$ 中（或在 $[-\infty, +\infty)$ 中）永遠是存在的。如果我們希望寫下 $\lim$ 的記號，或是證明極限存在，此命題告訴我們可以去證明上下極限相等。

第五節 連續性

第一小節 定義及性質

接下來，我們給定兩個賦距空間 (M, d) 及 (M', d')。當我們要考慮不同賦距空間中的球時，我們可以加個下標來避免混淆。例如，我們把在 (M, d) 裡面，中心為 $x \in M$ 半徑為 $\varepsilon > 0$ 的開球記作 $B_M(x, \varepsilon)$ 或 $B_d(x, \varepsilon)$。

定義 2.5.1 ： 給定函數 $f : (M, d) \to (M', d')$。對於任何 $x \in M$，如果對於所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall y \in M, \qquad d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon, \tag{2.8}$$

或是下列等價性質成立：

$$f(B_M(x,\delta)) \subseteq B_{M'}(f(x),\varepsilon),$$

則我們說 f 在 x 連續。如果 f 在所有的 $x \in M$ 皆連續，則我們說 f 是個連續函數。

範例 2.5.2 ：

(1) 在 $(M,d) = (M',d') = (\mathbb{R},|\cdot|)$ 中，我們得到的是我們在大一微積分所看到對連續性的定義。

(2) 恆等函數 $\mathrm{Id} : (M,d) \to (M,d), x \mapsto x$ 是連續的。

(3) 固定 $a \in M$，則函數 $(M,d) \to (\mathbb{R},|\cdot|), x \mapsto d(x,a)$ 是個連續函數。

註解 2.5.3 ： 如果 $a \in M$ 是個匯聚點，則 f 在 a 的連續性與下列性質等價：

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

如果 $a \in M$ 是個孤立點，則任何函數 $f : M \to M'$ 在 a 都是連續的，因為對於夠小的 $\delta > 0$，開球 $B(a,\delta)$ 會是個由單點構成的集合 $\{a\}$。

命題 2.5.4 ： 考慮賦距空間 (M_1,d_1)、(M_2,d_2) 以及 (M_3,d_3)。令 $f : M_1 \to M_2$ 及 $g : M_2 \to M_3$ 為兩個函數。固定 $x \in M_1$。如果 f 在 x 連續且 g 在 $f(x)$ 連續，則合成函數 $g \circ f : M_1 \to M_3$ 在 x 連續。

證明： 我們可以使用定義 2.5.1 來直接證明此命題。給定 $\varepsilon > 0$。由於 g 在 $y := f(x)$ 連續，我們能找到 $\eta > 0$ 使得

$$g(B_{M_2}(y,\eta)) \subseteq B_{M_3}(g(y),\varepsilon).$$

由於 f 在 x 連續，我們能找到 $\delta > 0$ 使得

$$f(B_{M_1}(x,\delta)) \subseteq B_{M_2}(f(x),\eta) = B_{M_2}(y,\eta).$$

把上面兩個包含關係放在一起，我們得到

$$(g\circ f)(B_{M_1}(x,\delta)) \subseteq g(B_{M_2}(y,\eta)) \subseteq B_{M_3}((g\circ f)(x),\varepsilon).$$

這告訴我們 $g \circ f$ 在 x 是連續的。 □

第二小節 序列描述法

命題 2.5.5 ： 給定函數 $f:(M,d)\to(M',d')$ 以及 $a\in M$。則下列性質等價。

(1) f 在 a 連續。

(2) 對任何取值在 M 中且收斂到 a 的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，取值在 M' 中的序列 $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ 會收斂到 $f(a)$。換句話說，我們有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(a).$$

證明：此證明與命題 2.4.20 相似。 □

範例 2.5.6 ： 函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 0 連續：

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{若 } x\neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

我們可以檢查，對於任何收斂至 0 的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，我們會有

$$|f(x_n)| = |x_n\sin(1/x_n)| \leqslant |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

命題 2.5.7 ： 考慮在域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範向量空間 $(V,\|\cdot\|)$。令 $a\in M$ 及兩個在 a 連續的函數 $f,g:M\to V$。則下列性質成立：

(1) $x\mapsto f(x)+g(x)$ 在 a 連續。

(2) $x\mapsto \lambda f(x)$ 在 a 連續。

(3) $x\mapsto \|f(x)\|$ 在 a 連續。

證明：這是應用命題 2.5.5 和命題 2.4.18 可以得到的直接結果。 □

範例 2.5.8 ： 令 $n\geqslant 1$ 以及 $P\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ 為多變數多項式。取 $(M,d)=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$ 和 $(M',d')=(\mathbb{R},|\cdot|)$。則函數 $(a_1,\dots,a_n)\mapsto P(a_1,\dots,a_n)$ 會是連續的。我們可以藉由命題 2.5.5 以及下列敘述來證明此性質。

(a) 對於任意取值在 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 中的序列 $(a^k = (a_1^k, \ldots, a_n^k))_{k\geqslant 1}$，我們有

$$\lim_{k\to\infty} a^k = a = (a_1, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_i^k = a_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(b) 對於任意實數序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 還有 $(y_n)_{n\geqslant 1}$，我們會有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{以及} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$$

第三小節 原像描述法

定義 2.5.9 ： 給定函數 $f : (M, d) \to (M', d')$ 及子集合 $A \subseteq M'$。我們在定義 1.1.7 中有定義過 A 在 f 之下的像原 (preimage or inverse image)：

$$f^{-1}(A) := \{x \in M : f(x) \in A\}.$$

註解 2.5.10 ： 我們回顧幾個像原的性質。

(1) 如果 f 是個雙射函數，則 A 在 f 之下的像原會是 A 在 f^{-1} 之下的像。

(2) 如果 $A \subseteq B \subseteq M'$，$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq M$。

(3) 對於 $A \subseteq M$，我們有 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$。

(4) 對於 $A \subseteq M'$，我們有 $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$。

命題 2.5.11 ： 令 $f : (M, d) \to (M', d')$ 為函數，則下列性質等價。

(1) f 在 M 上連續。

(2) 任何 M' 中開集的像原在 M 中是個開集。

(3) 任何 M' 中閉集的像原在 M 中是個閉集。

證明： 我們證明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

- (1) $\Rightarrow$ (2)。令 $A' \subseteq M'$ 為開集，並記 $A = f^{-1}(A')$。給定 $x \in A$，我們想要證明 x 是 A 的內點。令 $y = f(x) \in A'$。由於 y 是 A' 的內點，我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_{M'}(y, \varepsilon) \subseteq A'$。使用 f 在 x 的連續性，我們能找到 $\delta > 0$ 使得 $f(B_M(x, \delta)) \subseteq B_{M'}(y, \varepsilon) \subseteq A'$。因此，$x \in B_M(x, \delta) \subseteq f^{-1}(A')$。

- (2) $\Rightarrow$ (1)。給定 $x \in M$ 以及 $\varepsilon > 0$，從 (2) 我們得知 $A = f^{-1}(B_{M'}(f(x), \varepsilon))$ 是個開集。由於 $x \in A$，我們能找到 $\delta > 0$ 使得 $B_M(x, \delta) \subseteq A$。這讓我們能推得 $f(B_M(x, \delta)) \subseteq f(A) =$

$B_{M'}(f(x),\varepsilon)$，也就是 f 在 x 的連續性。

- (2) $\Rightarrow$ (3)。令 A' 為 M' 中的閉集，則 $B' := M'\backslash A'$ 會是開集。我們知道

$$f^{-1}(A') = f^{-1}(M'\backslash B') = M\backslash f^{-1}(B').$$

根據 (2)，集合 $f^{-1}(B')$ 是個開集，所以 $f^{-1}(A')$ 是個閉集。

- (3) $\Rightarrow$ (2)。證明相似。 □

註解 2.5.12 ： 當我們想要檢查 $f : (M,d) \to (M',d')$ 是個連續函數時，通常我們只需要檢查下列修改過的條件：

(2') 任何 M' 中開球的像原在 M 中是個開集。

範例 2.5.13 ： 我們把 $n \times n$ 實係數矩陣構成的空間 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 看做 $\mathbb{R}^{n^2}$，並賦予範數 $\|\cdot\|_1$。我們知道行列式 $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是個連續函數。由於 $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 是個在 $\mathbb{R}$ 中的開集，那麼可逆矩陣構成的集合

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(M) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

也會是在 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 中的開集。

定義 2.5.14 ： 令 $f : (M,d) \to (M',d')$ 為函數，我們定義下面兩個概念。

- 若對所有開集 $A \subseteq M$，$f(A)$ 是 M' 中的開集，我們說 f 是個開函數 (open map)。
- 若對所有閉集 $A \subseteq M$，$f(A)$ 是 M' 中的閉集，我們說 f 是個閉函數 (closed map)。

註解 2.5.15 ： 我們注意到，在命題 2.5.11 中，我們需要檢查的是像原.

- 連續函數不一定是個開函數。例如，考慮由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的常數函數，則任何 $\mathbb{R}$ 中開集的像會是一個點，不是個開集。
- 連續函數不一定是個閉函數。例如，考慮函數 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$，則他會把閉集 $\mathbb{R}$ 送到 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，但他卻不是 $\mathbb{R}$ 中的閉集。

第四小節 同構

我們再來會介紹兩個同構 (isomorphisms) 的概念：等距同構以及拓撲同構（同胚）。接下來，讓我們考慮兩個賦距空間 (M,d) 及 (M',d')。

定義 2.5.16 ：

- 令 $f:(M,d)\to(M',d')$ 為雙射函數。如果
$$d'(f(x),f(y))=d(x,y),\quad \forall x,y\in M,$$
則我們稱之為等距變換 (isometry) 。
- 如果在 (M,d) 及 (M',d') 之間存在等距變換，則我們說賦距空間 (M,d) 和 (M',d') 是等距的或等距同構的。

範例 2.5.17 ： 我們固定整數 $n\geqslant 1$。我們把 $n\times n$ 實係數矩陣構成的向量空間記作 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$。我們可以賦予 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 範數 $\|\cdot\|_{\mathcal{M},1}$，定義如下：

$$\forall M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\quad \|M\|_{\mathcal{M},1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|m_{i,j}|,$$

並考慮由範數 $\|\cdot\|_{\mathcal{M},1}$ 引導出來的距離 $d_{\mathcal{M},1}$。那麼，$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),d_{\mathcal{M},1})$ 及 $(\mathbb{R}^{n^2},d_1)$ 是等距的。例如，下面這個函數是個等距變換：

$$M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mapsto(m_{1,1},\dots,m_{1,n},m_{2,1},\dots,m_{2,n},\dots,m_{n,1},\dots,m_{n,n}).$$

定義 2.5.18 ： 令 $f:(M,d)\to(M',d')$ 為函數。假設 f 是個雙射函數，也就是說 f^{-1} 定義良好。如果 f 及 f^{-1} 兩者皆連續，則我們說 f 是個同胚變換 (homeomorphism) 或拓撲同構變換 (topological isomorphism) 。如果這樣的函數 f 存在的話，我們說賦距空間 (M,d) 及 (M',d') 是同胚的，或是拓撲同構的。

註解 2.5.19 ： 等距變換也會是個同胚變換。

範例 2.5.20 ： 我們考慮在 $M=\mathbb{R}^2$ 上的兩個不同距離：d_1 是由 $\|\cdot\|_1$ 引導的，d_2 是由 $\|\cdot\|_2$ 引導的，以及離散距離 d_{discrete}。

(1) 恆等函數 $\mathrm{Id}:(\mathbb{R}^2,d_1)\to(\mathbb{R}^2,d_2)$ 是個同胚變換因為我們有

$$B_{d_1}(x,r)\subseteq B_{d_2}(x,r)\subseteq B_{d_1}(x,\sqrt{2}r).\tag{2.9}$$

(2) 恆等函數 $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^2, d_{\text{discrete}}) \to (\mathbb{R}^2, d_1)$ 不是個同胚變換。此函數是個連續雙射函數，但他的反函數 f^{-1} 顯然不連續。

定義 2.5.21 ： 令 d 與 d' 為 M 上的兩個距離。如果 d 和 d' 定義出來的拓撲是相同的，也就是說：若且唯若，某集合在 (M, d) 中為開集，則他在 (M, d') 中也是開集；這樣的情況下，我們說這兩個距離是拓撲等價 (topologically equivalent) 的。

範例 2.5.22 ： 在 $\mathbb{R}^2$ 上，距離 d_1 及 d_2 是拓撲等價的，如同我們在式 (2.9) 中所看到的。

命題 2.5.23 ： 令 d 和 d' 為 M 上的兩個距離。若且唯若恆等函數 $\mathrm{Id} : (M, d) \to (M, d')$ 是個同胚變換，則距離 d 與 d' 是拓撲等價的。

證明：首先，我們假設距離 d 和 d' 是拓撲等價的。恆等函數 $\mathrm{Id} : (M, d) \to (M, d')$ 顯然是個雙射函數。再來證明連續性：我們考慮開集 $A \subseteq (M, d')$，根據假設，我們得到

$$\mathrm{Id}^{-1}(A) = A \subseteq (M, d)$$

還是個開集。因此，Id 是連續的。相似地，我們也能證明 Id^{-1} 是連續的。

再來，我們假設恆等函數 $\mathrm{Id} : (M, d) \to (M, d')$ 是個同胚變換。根據他的連續性，任何開集 $A \subseteq (M, d')$ 在 (M, d) 中也是個開集，且反之亦然。這剛好是兩個拓撲等價距離的定義。 □

定義 2.5.24 ：

- 給定賦範空間 V 以及兩個定義在 V 上的範數 N_1 和 N_2。如果存在 $b > a > 0$ 使得

$$a\, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant b\, N_1(x), \qquad \forall x \in V,$$

則我們說此兩個範數等價。

- 給定空間 M 以及定義在 M 上的兩個距離 d_1 和 d_2。如果存在 $b > a > 0$ 使得

$$a\, d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant b\, d_1(x, y), \qquad \forall x, y \in M,$$

則我們說此兩個距離等價。

範例 2.5.25 ： 在 $\mathbb{R}^n$ 中，範數 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 以及 $\|\cdot\|_\infty$ 是等價的。事實上，我們有

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

註解 2.5.26 ：

(1) 兩個等價範數所引導出來的距離也是等價的。

(2) 兩個等價距離引導出來的賦距空間是拓撲等價的。這可以由範例 2.5.20 (1) 中不同距離定義出來的球之間的包含關係所看出來。

(3) 稍後在定理 3.2.22 中，我們會看到在有限維度的向量空間上，所有範數都是等價的。

第五小節 均勻連續性

定義 2.5.27 ： 令 $f:(M,d)\to(M',d')$ 為函數。如果對於任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall x,y \in M, \qquad d(x,y)<\delta \quad \Longrightarrow \quad d'(f(x),f(y))<\varepsilon, \tag{2.10}$$

則我們說 f 是均勻連續 (uniformly continuous) 的。

範例 2.5.28 ： 函數 $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{x}$ 是連續的。他在 $(0,1]$ 上不是均勻連續的，但在 $[1,\infty)$ 上是均勻連續的。

註解 2.5.29 ：

(1) 均勻連續函數也是連續的，但一般來說，逆命題不會成立，如同我們在範例 2.5.28 中所看到的。

(2) 在均勻連續的定義中，δ 的選擇不取決於 x 及 y，所以才會被稱作均勻。可以去比較 (2.8) 與 (2.10) 中的條件，看看有什麼不同的。

(3) 均勻連續不是個拓撲概念，意思是他無法只透過開集來描述。可以參考習題 2.41 。

(4) 給定均勻連續函數 $f:(M_1,d_1)\to(M_2,d_2)$ 以及距離 d_1' 和 d_2' 使得 d_1 與 d_1' 等價，且 d_2 與 d_2' 等價。那麼不難看出來，函數 $f:(M_1,d_1')\to(M_2,d_2')$ 是均勻連續的。

定義 2.5.30 ： 令 $f:(M,d)\to(M',d')$ 為函數。給定 $K>0$。如果

$$d'(f(x),f(y)) \leqslant K\,d(x,y), \qquad \forall x,y\in M,$$

則我們說 f 是個 *K-Lipschitz* 連續函數。如果存在 $K>0$ 使得 f 是個 K-Lipschitz 連續函數，則我說 f 是 *Lipschitz* 連續的。

系理 2.5.31 ： 任何 Lipschitz 連續函數也是均勻連續的。

證明：如果 $f:(M,d)\to(M,d')$ 是個 K-Lipschitz 函數，則在 (2.10) 中，我們可以取 $\delta=\varepsilon/K$。
□

定義 2.5.32 ： 給定空間 M 還有兩個定義在 M 上的距離 d 和 d'。如果恆等函數 $\mathrm{Id}:(M,d)\to(M,d')$ 和他的反函數都是均勻連續的，則我們說這兩個距離是均勻等價 (uniformly equivalent) 的。

註解 2.5.33 ： 兩個等價距離是均勻等價的，兩個均勻等價距離是拓撲等價的。

第六節　賦距空間的乘積

給定 n 個賦距空間 $(M_1,d_1),\ldots,(M_n,d_n)$。我們定義積空間為 $M=M_1\times\cdots\times M_n$ 並且想要在上面定義距離。我們會透過距離 $d_1,\ldots,d_n$ 來定義，而且有很多不同方式可以讓我們達成目的。最標準的方法如下。

定義 2.6.1 ： 我們可以在積空間 M 上賦予積距離 d，定義如下：

$$d(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(x_i,y_i), \tag{2.11}$$

其中 $x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in M$。

註解 2.6.2 ： 由距離 (2.11) 定義出來，中心在 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 且半徑為 r 的開球寫作：

$$B_d(x,r)=B_{d_1}(x_1,r)\times\cdots\times B_{d_n}(x_n,r).$$

註解 2.6.3 ： 在積空間 M 上，我們也能夠定義其他距離：

$$D_1(x,y)=\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)\quad\text{且}\quad D_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^2}.$$

他們與定義在 (2.11) 中的積距離 d 等價，因為我們有

$$d(x,y) \leqslant D_2(x,y) \leqslant D_1(x,y) \leqslant n\, d(x,y), \quad \forall x,y \in E.$$

因此，在積空間 M 上，不管我們從這三個距離中任選哪一個，都是相同的。

定義 2.6.4 ： 對於 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們可以定義在積空間 M 上，在第 i 個座標上的投影函數：

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Proj}_i : & M = M_1 \times \cdots \times M_n & \to & M_i \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i. \end{array}$$

命題 2.6.5 ： 對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，投影函數 Proj_i 是個連續的開函數（定義 2.5.14 ）。

證明：固定 $1 \leqslant i \leqslant n$。

- 首先，我們來檢查 Proj_i 是連續的。從註解 2.5.12 我們知道，我們只需要檢查開球在 Proj_i 之下的像原也還是開集即可。令 $y \in M_i$ 以及 $\varepsilon > 0$。我們不難檢查

$$\mathrm{Proj}_i^{-1}(B_{M_i}(y,\varepsilon)) = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times B_{M_i}(y,\varepsilon) \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n.$$

  上式的右方顯然是個開集。

- 接著，我們來檢查 Proj_i 是個開函數。給定開集 $A \subseteq M$ 以及 $y \in \mathrm{Proj}_i(A)$。那麼存在 $x \in A$，滿足 $x_i = y$。由於 A 是開集，存在 $r > 0$ 使得 $B_d(x,r) \subseteq A$。我們知道積空間中的開球可以寫成開球的乘積（註解 2.6.2 ），我們由此推得 $\mathrm{Proj}_i(B_d(x,r)) = B_{d_i}(x_i,r)$。所以 $y = x_i = \mathrm{Proj}_i(x) \in B_{d_i}(x_i,r) = \mathrm{Proj}_i(B_d(x,r)) \subseteq \mathrm{Proj}_i(A)$，讓我們得到 y 是個 $\mathrm{Proj}_i(A)$ 的內點。

□

命題 2.6.6 ： 令 (M',d') 為賦距空間，$a \in M'$ 以及 $f : M' \to M$ 為函數。則若且唯若對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，函數 $f_i := \mathrm{Proj}_i \circ f$ 在 a 是連續的，則 f 在 a 是連續的。

證明：如果 f 在 a 是連續的，透過合成函數的性質（命題 2.5.4 ）我們不難看出對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，函數 f_i 會是連續的。反過來，假設 f 是個函數使得對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，$f_i$ 在 a 是連續的，我們要來證明 f 在 a 的連續性。令 $\varepsilon > 0$。對於每個 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們能找到 $\delta_i > 0$ 使得對於 $x \in M$，我們有

$$d'(x,a) < \delta_i \quad \Rightarrow \quad d_i(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon.$$

由於積空間 $M = M_1 \times \cdot \times M_n$ 上所賦予的距離是 (2.11) 中定義的，我們令 $\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$，則

對於 $x \in M$，我們得到

$$d'(x,a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(a)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon.$$

這個證明的就是 f 在 a 的連續性。 □

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{Proj}_i \circ f"'] & M = M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[d, "\mathrm{Proj}_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

圖 2.1: 此圖描述了函數 $f : M' \to M$，投影函數 $\mathrm{Proj}_i : M \to M_i$ 以及他們合成函數之間的關係。

命題 2.6.7 ： 令 (M', d') 為賦距空間，$f : M \to M'$ 為函數，以及 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$。對於 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們可以定義部份函數

$$\begin{aligned} f^i : \quad M_i &\to \quad M' \\ x &\mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

如果 f 在 a 連續，那麼對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，$f^i$ 也會在 a_i 連續。

註解 2.6.8 ： 我們注意到，命題 2.6.7 的逆命題不會成立。我們可以考慮 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定義做

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

取 $a = (0,0)$，那麼 $f^1 \equiv 0$ 以及 $f^2 \equiv 0$ 為連續函數，但

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{當 } x \to 0.$$

證明： 對於 $x \in M_i$，我們可以寫 $a_x^{(i)} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$。如果 $d_i(x, a_i) < \delta$，那麼顯然我們也有 $d(a_x^{(i)}, a) < \delta$。所以，如果 $x \in B_{d_i}(a_i, \delta)$，那麼 $a_x^{(i)} \in B_d(a, \delta)$。這告訴我們 f 在 a 的連續性蘊含 f^i 在 a_i 的連續性。 □

第七節 連通性及弧連通性

我們給定賦距空間 (M,d)，接下來我們會討論他的連通性質。

第一小節 連通空間

我們從連通空間的定義開始談起。

定義 2.7.1 【及性質】： 如果下面三個等價性質之一成立，我們就說 (M,d) 是<u>連通</u> (connected) 的。

(a) 我們無法把 M 分割做兩個互斥非空的開集。

(b) 我們無法把 M 分割做兩個互斥非空的閉集。

(c) M 的子集合中，能夠同時是開集又是閉集的子集合，只有 $\varnothing$ 和 M。

如果上述不成立，我們說 (M,d) 是<u>不連通</u> (disconnected) 的。相同的，在賦距空間 (M,d) 中給定子集合 $A \subseteq M$，如果引導出來的拓撲空間 (A,d) 是連通的，則我們說他是連通的。

註解 2.7.2 ： 如果要檢查性質 (a)，我們可以假設存在開集 $A, B \subseteq M$ 使得 $A \cap B = \varnothing$ 及 $A \cup B = M$ 成立，並推得我們有 $A = \varnothing$ 或是 $B = \varnothing$。

證明：我們要證明 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)。

- (a) $\Rightarrow$ (b)。假設存在兩個閉集 A_1 和 A_2 使得 $M = A_1 \cup A_2$ 以及 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$。那麼 $B_1 = M \backslash A_1$ 和 $B_2 = M \backslash A_2$ 會是開集。此外，他們還會滿足 $M = B_1 \cup B_2$ 還有 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$。根據 (a)，我們知道 $B_1 = \varnothing$ 或 $B_2 = \varnothing$，也就是說 $A_2 = \varnothing$ 或 $A_1 = \varnothing$。
- (b) $\Rightarrow$ (c)。令 $A \subseteq M$ 同時為開集及閉集。那麼 $B := M \backslash A$ 也是同時為開集及閉集。此外，我們會有 $M = A \cup B$ 以及 $A \cap B = \varnothing$。這樣一來，從假設 (b) 我們可以得到 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$，也就是說 $A = \varnothing$ 或 M。
- (c) $\Rightarrow$ (a)。令 A_1 和 A_2 為兩個互斥開集，使得 $M = A_1 \cup A_2$。那麼 A_1 可以寫作 $A_1 = M \backslash A_2$，所以他也會是個閉集。根據 (c)，我們知道 $A_1 = \varnothing$ 或 M。 □

註解 2.7.3 ： 連通性的概念是個拓撲概念，因為他只取決於（賦距空間中的）開集的概念而已，我們並不需要知道確切的距離是什麼。

範例 2.7.4 ：

(1) 由歐氏賦距空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 引導出來在 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上的賦距空間不是連通的，因為我們可以把他寫做互斥開集的聯集：$\mathbb{R}* = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$。

(2) 在任何非空賦距空間中，對於任何 $x \in M$，單點集合 $\{x\}$ 是連通的。

(3) 在 $\mathbb{R}$ 中的區間都是連通的。我們會在命題 2.7.17 證明這件事情。

(4) 由所有有理數構成的集合 $\mathbb{Q}$ 是非連通的。

第二小節 連通空間的性質

命題 2.7.5 ： 令 $f : (M, d) \to (M', d')$ 為連續函數。假設 M 是連通的。那麼 $f(M)$ 也是連通的。

證明： 令 A 為 $f(M)$ 中同時是開集也是閉集的子集合。那麼會同時存在開集 $B_1 \subseteq M'$ 以及閉集 $B_2 \subseteq M'$ 使得

$$A = B_1 \cap f(M) = B_2 \cap f(M).$$

從上式我們可以得到 $f^{-1}(A) = f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$，在使用 f 的連續性，我們知道 $f^{-1}(A)$ 在 M 中同時是個開集也是閉集。由於 M 是連通的，我們得知 $f^{-1}(A) = \varnothing$ 或 M，也就是說 $A = \varnothing$ 或 $f(M)$。 □

我們考慮只有兩個點的離散空間 $D = \{0, 1\}$，並將定義在此空間上的離散距離記作 δ。這樣一來，賦距空間 (D, δ) 是不連通的，因為 $D = \{0\} \cup \{1\}$ 是互斥閉集（也是開集）的聯集。這個離散賦距空間在我們討論連通性時會非常有用。

系理 2.7.6 ： 令 (M, d) 為賦距空間。若且唯若所有連續函數 $f : M \to D$ 皆是常數函數，則 M 是連通的。

證明： 首先，我們假設 M 是連通的。給定連續函數 $f : M \to D$，從命題 2.7.5 我們可以得知，$f(M)$ 在 D 中是連通的。由於 D 是不連通的，他的像 $f(M)$ 無法是全空間，也就是我們會有 $f(M) = \{0\}$ 或 $\{1\}$，也就是說 f 是個常數函數。

假設所有連續函數 $f : M \to D$ 皆是常數函數，我們想要證明 M 是連通的。使用反證法，假設 M 不連通。這樣的話，我們可以找到兩個互斥非空開子集合 A 和 B 使得 $M = A \cup B$。定義

$f : M \to D$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \in A, \\ 1 & \text{若 } x \in B. \end{cases}$$

函數 f 顯然是連續的，因為 $\{0\}$ 和 $\{1\}$ 為 D 中的開集，且他們的像原 $f^{-1}(\{0\}) = A$ 以及 $f^{-1}(\{1\}) = B$ 皆是開集。然而，f 卻不是個常數函數。 $\square$

系理 2.7.7 ： 令 (M, d) 為賦距空間，$A \subseteq M$ 為連通子集合。令 S 為滿足 $A \subseteq S \subseteq \overline{A}$ 的子集合。那麼 S 也是連通的。

證明： 令 $f : S \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。他限制在 A 上的函數 $f_{|A}$ 也會是連續的，由於 A 是連通的，這會是個常數函數。我們可以假設 $f_{|A} \equiv 0$。令 $x \in S$。根據 f 的連續性，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$y \in B(x, \varepsilon) \cap S \quad \Rightarrow \quad \delta(f(y), f(x)) < \tfrac{1}{2}.$$

這代表著對於所有 $y \in B(x, \varepsilon) \cap S$，我們有 $f(y) = f(x)$。此外，由於 $S \subseteq \overline{A}$，我們會有 $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$。我們可以選 $x' \in B(x, \varepsilon) \cap A$，那麼我們就能得到 $f(x') = 0$，且對於所有 $y \in B(x, \varepsilon) \cap S$，也會有 $f(y) = 0$。因此，$f \equiv 0$，所以我們透過命題 2.7.5 總結。 $\square$

命題 2.7.8 ： 令 (M, d) 為賦距空間，且 $(C_i)_{i \in I}$ 中的元素為 M 的連通子集合。假設存在 $i_0 \in I$ 使得

$$C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing, \quad \forall i \in I.$$

那麼 $C = \cup_{i \in I} C_i$ 是連通的。

證明： 令 $f : C = \cup_{i \in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。對於所有 $i \in I$，根據 C_i 的連通性，我們得知 $f_{|C_i}$ 是常數函數。我們可以假設 $f_{|C_{i_0}} \equiv 0$。令 $x \in C$ 及 $i \in I$ 使得 $x \in C_i$。由於 $C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$，我們能找到 $x_0 \in C_i \cap C_{i_0}$。由於 $f_{|C_i}$ 是個常數函數，我們推得 $f(x) = f(x_0) = 0$。因此，f 在 C 上是個常數函數，我們使用系理 2.7.6 來總結。 $\square$

註解 2.7.9 ： 特別的情況之下，如果 $(C_i)_{i \in I}$ 中有可數多個連通子集合，且滿足 $\cap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$，那麼 $C = \cup_{i \in I} C_i$ 也是連通的。

問題 2.7.10： 令 $(C_i)_{i\in I}$ 由可數多個連通子集合所構成，也就是說存在 $p \geqslant 1$ 使得 $I = \{1, \ldots, p\}$，或是說 $I = \mathbb{N}$。假設對於所有 $i \in I, i \neq 1$，我們有 $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$。請修改命題 2.7.8 中的步驟，證明 $C = \cup_{i\in I} C_i$ 是連通的。

命題 2.7.11 ： 給定賦距空間序列 $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ 並考慮賦距積空間 (M, d)，其中積空間定義做 $M = M_1 \times \cdots \times M_n$，積距離由式 (2.11) 所定義。那麼若且唯若對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，$(M_i, d_i)$ 是連通的，則 (M, d) 也是連通的。

證明： 首先，我們假設 M 是連通的。固定 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 並令 $f : M_i \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。由於投影函數 $\mathrm{Proj}_i : M \to M_i$ 是連續的，合成函數 $f \circ \mathrm{Proj}_i : M \to D$ 也是連續的。透過 M 的連通性，我們推得 $f \circ \mathrm{Proj}_i$ 是個常數函數。由於 $\mathrm{Proj}_i(M) = M_i$，我們得知 f 也是個常數函數，換句話說，M_i 是連通的。

我們假設對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 來說，(M_i, d_i) 是連通的。考慮連續函數 $f : M \to D$。令 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in M$。我們想要證明 $f(x) = f(y)$。首先，從命題 2.6.7 我們得知，下列函數是連續的：

$$
\begin{array}{rccc}
f^1 : & M_1 & \to & D \\
 & z_1 & \mapsto & f(z_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{array}
$$

從 M_1 的連通性我們可以推得 f^1 是常數函數，也就是說 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$。這樣一來，我們藉由改變每個座標點的部份函數，可以得到 $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$。因此，連續函數 f 是個常數函數，所以系理 2.7.6 告訴我們 M 是連通的。 □

第三小節 連通元件

令 (M, d) 為賦距空間。在此小節中，我們會定義 M 中連通元件的概念，並討論他們的性質。直觀上來說，我們想要把 M 分解成互斥的連通子空間，我們會透過定義 M 上的等價關係來達成此目的。

定義 2.7.12 ： 我們定義在 (M, d) 上的二元關係 $\mathcal{R}$：

$$
x \mathcal{R} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在連通子集合 } C \subseteq M \text{ 使得 } x, y \in C. \tag{2.12}
$$

命題 2.7.13 ： 式 (2.12) 中定義的二元關係 $\mathcal{R}$ 是個等價關係。

證明：我們可以直接檢查。

- 【自反性】對於所有 $x \in M$，因為 $\{x\}$ 是連通的，我們會有 $x\mathcal{R}x$。
- 【對稱性】如果 x, y 滿足 $x\mathcal{R}y$，那麼透過式 (2.12)，我們也會有 $y\mathcal{R}x$。
- 【遞移性】令 $x, y, z \in M$ 使得 $x\mathcal{R}y$ 以及 $y\mathcal{R}z$。這代表著存在兩個連通子集合 C 和 C' 使得 $x, y \in C$ 以及 $y, z \in C'$。由於 $C \cap C' \neq \varnothing$，從命題 2.7.8 我們得知 $C \cup C'$ 也是連通的。我們有 $x, z \in C \cup C'$，也就是說 $x\mathcal{R}z$。 □

註解 2.7.14 ： 命題 2.7.13 讓我們可以定義等價類 $M/\mathcal{R}$。對於所有 $x \in M$，我們把他的等價類記作 $[x]$。我們不難看出，$[x]$ 可以被所有包含 x 的連通子集合聯集所描述，根據命題 2.7.8 ，這個子集合還會是連通的。我們把子集合 $[x]$ 稱作 M 的<u>連通元件</u> (connected component) 。M 的連通元件構成 M 的<u>分割</u>，也就是互斥子集合構成的集合，使得他們的聯集會是 M。我們也不難看出，若且唯若 M 只有一個連通元件，那他就會是連通的。

系理 2.7.15 ： 賦距空間 (M, d) 中的連通元件都是閉子集合。此外，如果 M 只有有限多個連通元件，那麼他們也都會是開子集合。

證明：令 $x \in M$ 並考慮他的連通元件 $[x]$。由於我們有包含關係 $[x] \subseteq \overline{[x]}$，從系理 2.7.7 我們可以得知 $\overline{[x]}$ 也是連通的。由於 $\overline{[x]}$ 也包含 x，所以 $[x] = \overline{[x]}$，也就是說 $[x]$ 是個閉子集合。

假設 M 只有有限多個連通元件，也就是說

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{[x_i]}, \quad N \geqslant 1, x_1, \ldots, x_N \in M.$$

那麼對於任意 $1 \leqslant i \leqslant N$，我們會有

$$\overline{[x_i]} = M \setminus \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ j \neq i}} \overline{[x_j]},$$

這會是個開集，因為是有限閉集聯集的補集。 □

註解 2.7.16 ： 下面我們會看到一個 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 子集合的例子，他會有一個連通元件不是開集。令

$$C = \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} C_n\Big) \cup \{0\}, \quad C_n = [2^{-2n-1}, 2^{-2n}].$$

首先我們注意到，所有的 C_n 以及 $\{0\}$ 皆是 C 的連通元件。我們不難看出來，對於每個 $n \geqslant 1$，子集

合 C_n（在 C 中）是個開集也是閉集，因為

$$\begin{aligned} C_n &= [2^{-2n-1}, 2^{-2n}] \cap C \\ &= (r \cdot 2^{-2n-1}, r^{-1} \cdot 2^{-2n}) \cap C, \quad \text{對於選定的 } r \in (\tfrac{1}{2}, 1). \end{aligned}$$

然而，$\{0\}$ 會是個閉集，但不是開集。要檢查此性質，我們可以假設他是個開集，也就是我們可以找到 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(0,\varepsilon) \cap C = \{0\}$。但對於任意 $\varepsilon > 0$，交集 $B(0,\varepsilon) \cap C$ 不只包含 0，也會包含對於夠大的 n 的子集合 C_n（只要 $n \geqslant \frac{1}{2}\log_2(1/\varepsilon)$ 的話）。

第四小節 開集與 $\mathbb{R}$ 中的連通元件

我們會考慮賦距空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$。我們回顧區間的定義：給定子集合 $I \subseteq \mathbb{R}$，如果對於任意 $a, b \in I$，我們也有

$$x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad x \in I, \tag{2.13}$$

那麼 I 是個區間。一共有四種區間：

$$\begin{aligned} &(a,b), \quad -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty, \\ &[a,b), \quad -\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty, \\ &(a,b], \quad -\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty, \\ &[a,b], \quad -\infty < a \leqslant b < +\infty. \end{aligned}$$

最後一種區間也稱作線段。

命題 2.7.17 ： 給定 $\mathbb{R}$ 的子集合 I。若且唯若他是 $\mathbb{R}$ 的區間，則他是連通的。

證明：我們假設 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是連通的。使用反證法，假設 I 不是一個區間，也就是說，我們能夠找到 $a, b \in I$ 以及 $x \in (a,b)$ 使得 $x \notin I$。在此情況下，我們會有 $I \subseteq (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$，所以 I 是不連通的。

再來證明逆命題。給定區間 $I \subseteq \mathbb{R}$，我們想證明他是連通的。如果 I 是個單元素集合，這顯然是對的。令 $I = (a,b)$ 其中 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ 並考慮連續函數 $f : I \to D = \{0,1\}$。假設 f 不是常數，也就是說存在 $x, y \in I$ 使得

$$a < x < y < b \quad \text{且} \quad f(x) \neq f(y),$$

且不失一般性，我們能假設 $f(x) = 0$ 以及 $f(y) = 1$。考慮下面這個集合：

$$\Gamma = \{z \in I : z \geqslant x \text{ 使得 } f(t) = 0 \text{ 對於所有 } t \in [x,z]\}$$

集合 Γ 非空，因為 $x \in \Gamma$。此外，y 是 Γ 的上界。令 $c = \sup\Gamma \leqslant y$。根據 f 的連續性，我們有

$f(c)=0$。除此之外，f 在 c 的連續性還會告訴我們

$$\exists \varepsilon \in (0, b-y), \forall t \in [c, c+\varepsilon], \quad \delta(f(t), f(c)) < \tfrac{1}{2}.$$

這代表著對於 $t \in [c, c+\varepsilon] \subseteq (a,b) = I$，我們有 $f(t)=0$，所以 $c+\varepsilon \in \Gamma$。這個與 c 是 Γ 的最小上界這件事情矛盾。因此，f 必須要是個常數函數，所以 I 是連通的。

對於既不是單元素集合，且不是開區間的一般區間 I，我們可以記 $J = \operatorname{int}(I)$，因此會有 $J \subseteq I \subseteq \operatorname{cl}(J)$。由於 J 可以寫作 (a,b) 且 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$，這是我們上面討論過的情況，也就是說，$J$ 是連通的。接著，從系理 2.7.7 我們可以得知 I 也是連通的。 □

下面的定理是命題 2.7.17 的第一個應用。

定理 2.7.18 【中間值定理】： 令 I 為 $\mathbb{R}$ 的區間且 $f: I \to \mathbb{R}$ 為連續函數，則 $f(I)$ 也是個區間。

證明： 從命題 2.7.17 我們得知 I 是連通的，使用命題 2.7.5 我們也知道 $f(I)$ 是連通的。接著，再次使用命題 2.7.17 ，我們知道 $f(I)$ 是個區間。 □

註解 2.7.19 ： 我們可以用下面這個方式來詮釋上面的定理。如果 $a < b$ 且 $f(a) \leqslant f(b)$，那麼對於任意 $\gamma \in [f(a), f(b)]$，我們可以找到 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = \gamma$。

下面是命題 2.7.17 的另外一個應用，描述 $\mathbb{R}$ 中開集的結構。在這裡，我們固定非空開子集合 $A \subseteq \mathbb{R}$。

定義 2.7.20 ： 令 I 為開區間。如果 I 滿足下面兩個性質，我們說 I 是 A 的區間元件：

- $I \subseteq A$；
- 不存在任何開區間 $J \neq I$ 滿足 $I \subseteq J \subseteq A$。

定理 2.7.21 【$\mathbb{R}$ 中開集的表現示】： 子集合 A 可以寫作可數多個 A 的互斥連通區間的聯集。

證明： 從註解 2.7.14 ，我們知道我們可以把 A 的連通元件寫作

$$A/\mathcal{R} = \{[x_j] : j \in J\}, \tag{2.14}$$

其中 J 是個下標集合，$[x_j]$ 記的是 $\mathcal{R}$ 中 x_j 所代表的等價集合，也就是 A 的連通元件。透過命題 2.7.17 ，我們可以得知每個 $[x_j]$ 都是 $\mathbb{R}$ 的區間。我們需要去檢查這些區間都是 A 的區間元件

（定義 2.7.20）。

固定 $j \in J$，我們記 $I_j = [x_j]$、$a_j = \inf I_j$ 以及 $b_j = \sup I_j$，所以也有 $(a_j, b_j) \subseteq I_j$。首先，讓我們來證明 I_j 是個開集，也就是說 $I_j = (a_j, b_j)$。我們想要證明 $a_j \notin I_j$。

- 如果 $a_j = -\infty$，則顯然 $a_j \notin I_j$。
- 如果 $a_j > -\infty$ 且 $a_j \in I_j$，那麼由於 $a_j \in A$，且 A 是開集，我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得 $I_j' := (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) \subseteq A$。由於 I_j' 和 I_j 皆是連通的，且 $I_j \cap I_j' \neq \varnothing$，從命題 2.7.8 我們得知 $I_j \cup I_j'$ 還是連通的。由於 I_j 是等價關係 $\mathcal{R}$ 中的等價類，所以我們得到矛盾。

因此我們總結 $a_j \notin I_j$。相同地，我們也能證明 $b_j \notin I_j$，也就是說 $I_j = (a_j, b_j)$。

接著，我們證明 I_j 是個最大的區間，也就是說不存在開區間 K 使得 $I_j \subsetneq K \subseteq A$，同樣的，透過等價關係 $\mathcal{R}$ 我們能得到此性質。

最後，我們只需要檢查 J 是可數的來總結。有理數 $\mathbb{Q}$ 構成的集合是可數的，且可以被排序：$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$。我們可以定義函數 $F : J \to \mathbb{N}$ 如下：

$$F(j) = \min\{n \geqslant 1 : q_n \in [x_j]\}, \qquad \forall j \in J.$$

F 是個單射函數，這可以從等價關係所給出來的分割所看出來。這讓我們總結 (2.14) 中的確是個可數多個連通區間所構成的聯集。 □

第五小節 弧連通性

我們固定賦距空間 (M, d)。

定義 2.7.22： 令 $\gamma : [0,1] \to (M, d)$ 為連續函數且滿足 $a = \gamma(0)$ 以及 $b = \gamma(1)$。

- 我們說 γ 是個從 a 到 b 的路徑。
- 如果 $a \neq b$，我們把像 $\gamma([0,1])$ 稱作由 a 到 b 的弧。
- 假設 (M, d) 是個範例 2.1.4 意義中的賦範空間。如果 γ 可以寫作 $\gamma(t) = tb + (1-t)a$，其中對於所有 $t \in [0,1]$ 皆取值在 M 中，則我們說 $\gamma([0,1])$ 是個連接 a 到 b 的線段，記作 $[a, b]$。

定義 2.7.23： 如果對任意 $a \neq b \in M$，皆存在由 a 到 b 的弧，則我們說 M 是弧連通 (arcwise connected) 的。

定理 2.7.24 ： 如果 M 是弧連通的，那麼 M 也是連通的。

證明： 令 $f : M \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。令 $a, b \in M$ 以及 $\gamma : [0, 1] \to M$ 為連續函數，滿足 $\gamma(0) = a$ 及 $\gamma(1) = b$。這樣一來，合成函數 $f \circ \gamma : [0, 1] \to D$ 也是連續的，所以是個常數函數，因為 $[0, 1]$ 是連通的。這代表著 $f(a) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(b)$，所以 f 也是個常數函數。因此透過系理 2.7.6 ，我們可以總結說 M 是連通的。 □

範例 2.7.25 ：

(1) 在歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 中，任意凸集合 A 都是弧連通的。這是因為對於任意 $x, y \in A$，線段 $[x, y]$ 也會在 A 中，這剛好就是凸集合的定義。

(2) 令 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 定義如下：

$$A := \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}.$$

這是個經典的例子：這個空間是連通的，但不是弧連通的。我們會在習題 2.52 證明這樣的性質。

註解 2.7.26 ：

(1) 在證明賦距空間的連通性時，定理 2.7.24 是很有用的，因為弧連通比較容易想像以及操作。

(2) 弧連通性也是個拓撲概念。背後的原因是，在定義 2.7.23 中，定義弧連通性時，我們需要用到連續函數的概念，這是可以完全被開集所描述的，見命題 2.5.11 。

(3) 定理 2.7.24 的逆命題並不成立。範例 2.7.25 (2) 給出一個連通但不是弧連通的賦距空間的例子。

定理 2.7.27 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間，以及 V 中的開集 A。則若且唯若 A 是連通的，則 A 是弧連通的。

註解 2.7.28 ： 我們注意到，A 是個開集的假設是重要的。例如，在範例 2.7.25 (2) 中定義出來的集合 A 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集合，他是連通的，但不是弧連通的。顯然，在此情況中，子集合 A 不是開集。

證明： 如果 A 是弧連通的，我們已經在定理 2.7.24 中證明過 A 是連通的。現在，假設 A 是連通的。固定 $x_0 \in A$ 並令

$$\Gamma = \{x \in A : \text{存在從 } x_0 \text{ 到 } x \text{ 的路徑 }\}.$$

我們的目的是證明 Γ 在 A 中既是開集也是閉集，進而得到 $\Gamma = A$。

- 證明 Γ 是開集。令 $x \in \Gamma$。由於 x 在開集 A 中，存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subseteq A$。固定 $y \in B(x,r)$，$y \neq x_0$，則線段 $[x,y]$ 也會在 A 中。因此，如果 γ_0 是條從 x_0 到 x 的路徑，令 γ_1 為從 x 到 y 的線段，則
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_1(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{2.15}$$
會給出一條從 x_0 到 y 的路徑。

- 證明 Γ 是閉集。要證明這件事，我們給定 $x \in \overline{\Gamma} \cap A$ 並證明 x 也會在 Γ 中。根據開集及閉包的定義，我們能找到 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subseteq A$ 及 $B(x,r) \cap \Gamma \neq \varnothing$。選 $y \in B(x,r) \cap \Gamma$，則線段 $[y,x]$ 也會在 A 中，使用與式 (2.15) 相同的構造可以證明出來說 x 也必須要在 Γ 中。$\square$