

緊緻空間及完備空間

在此章節中，我們會專注在兩個重要的概念：緊緻空間以及完備空間。

第一節 緊緻集合

此章節中，我們會介紹緊緻賦距空間的概念。首先，我們透過開覆蓋來定義這樣的觀念，稱作 Borel–Lebesgue 性質（定義 3.1.3），稍後，我們會看到，這個與序列描述法等價，稱作 Bolzano–Weierstraß 性質（定義 3.1.19）。在第 3.1.2 小節中，我們也會看到緊緻集合在連續函數之下的性質。特別要注意的是，這推廣了 \mathbb{R} 中線段的概念，並且在命題 3.1.12 中會給我們中間值定理的推廣版本。

第一小節 Borel–Lebesgue 性質

Borel–Lebesgue 性質是透過開集覆蓋所定義的。

定義 3.1.1：給定子集合 $A \subseteq M$ 以及由子集合構成的集合族 $\mathcal{C} = (C_i)_{i \in I}$ 。如果

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i,$$

則我們說 \mathcal{C} 是個 A 的覆蓋 (covering)，或是說 \mathcal{C} 可以覆蓋住 A 。此外，如果所有的 C_i 皆是開集，且滿足上面的條件，則我們說 \mathcal{C} 是個 A 的開覆蓋 (open covering)。

範例 3.1.2：在賦距空間 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，集合族

$$\mathcal{I}_1 = \{(a, b) : 0 < a < b < 1\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) : n \geq 2\}$$

皆是 $(0, 1)$ 的覆蓋，其中 \mathcal{I}_1 是不可數的，但 \mathcal{I}_2 是可數的。

接著，我們定義緊緻賦距空間以及賦距空間中的緊緻集合。

定義 3.1.3 【Borel–Lebesgue 性質】：令 (M, d) 為賦距空間。

- (1) 如果從任意 M 的開覆蓋中，我們能夠萃取出有限的子覆蓋，則我們說賦距空間 (M, d) 滿足 Borel–Lebesgue 性質。

- (2) 如果 (M, d) 滿足 Borel–Lebesgue 性質，則我們說他是緊緻 (compact) 的。換句話說，如果對於任意 M 中開集構成的集合族 $(U_i)_{i \in I}$ ，且滿足 $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ($\Leftrightarrow M = \bigcup_{i \in I} U_i$)，我們都能找到有限子集合族 $J \subseteq I$ 使得 $M \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ ，則我們說 M 是緊緻的。
- (3) 給定子集合 $K \subseteq M$ 。如果引導賦距空間 (K, d) 是緊緻的，則我們說 K 是個緊緻集合 (compact set)。換句話說，如果對於任意 M 中開集構成的集合族 $(U_i)_{i \in I}$ ，且滿足 $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ，我們都能找到有限子集合族 $J \subseteq I$ 使得 $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ ，則我們說 K 是緊緻的。

範例 3.1.4 :

- (1) 任何有限的賦距空間都是緊緻的。
- (2) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 不是緊緻的，因為 $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$ 是個開覆蓋，但我們無法從他萃取出有限的子覆蓋。
- (3) 在 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中，子集合 $(0, 1)$ 不是緊緻的，因為 $\bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ 是個開覆蓋，但我們無法從他取出有限的子覆蓋。

註解 3.1.5 : 藉由取補集，我們可以得到 Borel–Lebesgue 性質的對偶版本。若且唯若賦距空間 (M, d) 是緊緻的，那麼對於任意閉集構成的集合族 $(F_i)_{i \in I}$ ，當 $\bigcap F_i = \emptyset$ 滿足時，會存在有限的子集合族 $J \subseteq I$ 使得 $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$ 。在賦距空間中 (M, d) ，我們可以考慮下面兩個性質。

- (i) (M, d) 是緊緻的。
- (ii) 對於任意非空閉集構成的非遞增序列 $(F_n)_{n \geq 1}$ ，交集 $\bigcap_{n \geq 1} F_n$ 是非空的。

我們能注意到 (ii) 與 Cantor 交集定理 (定理 2.2.7) 的相似性，在 Cantor 交集定理中，我們考慮的是 \mathbb{R}^n 中有界非空閉集構成的非遞增序列。

我們顯然有 (i) \Rightarrow (ii)。如果我們還知道，賦距空間有下面這個的性質：從任意的開覆蓋中，我們都能萃取出可數的子覆蓋 (稱作 Lindelöf 覆蓋性質，見定理 3.1.28)，那麼 (ii) \Rightarrow (i)。在 M 是歐氏空間 \mathbb{R}^n 子空間這個特殊情況時，我們有 (ii) \Rightarrow (i)。

命題 3.1.6 : 令 $K \subseteq M$ 為緊緻集合，則 K 是有界閉集。

證明: 首先，我們證明 K 是有界的。取 $x \in K$ ，則 $(B(x, n))_{n \geq 1}$ 是 K 的開覆蓋。根據緊緻性，我們可以從中找到有限子覆蓋，所以 K 是有界的。

接著，我們證明 K 是閉集。使用反證法，假設 K 不是閉集。那麼我們能找到 K 的匯聚點 y ，使得 $y \notin K$ 。對於任意 $x \in K$ ，我們定義 $r_x = \frac{1}{2}d(x, y)$ 。這樣一來，開球構成的集合族

$(B(x, r_x))_{x \in K}$ 是 K 的開覆蓋，且 K 的緊緻性則保證我們能找到有限的子覆蓋，也就是說，我們能找到 $x_1, \dots, x_n \in K$ 使得

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_{x_k}).$$

取 $r = \min(r_{x_1}, \dots, r_{x_n})$ 以及 $x \in B(y, r)$ ，那麼對於 $1 \leq k \leq n$ ，我們會有

$$d(x, x_k) \geq d(y, x_k) - d(x, y) > 2r_{x_k} - r \geq r_{x_k}.$$

這代表說 x 不在任何開球 $B(x_k, r_{x_k})$ 中。因此，我們得到 $K \cap B(y, r) = \emptyset$ 。這個與 y 是個 K 的匯聚點矛盾，因此 K 是個閉集。 \square

註解 3.1.7：稍後在註解 3.1.34 中，我們會看到，一般來講，有界閉集不一定是緊緻集合。

命題 3.1.8：令 (M, d) 為緊緻賦距空間，且 $K \subseteq M$ 是個閉集。那麼 K 會是個緊緻子集合。

證明：如果 K 為空集合，則顯然 K 會是緊緻的。假設 K 非空，我們給定 K 的開覆蓋 $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ 。由於 K 是閉集， $M \setminus K$ 會是個開集。因此， $\mathcal{C} \cup \{M \setminus K\}$ 會是個 M 的開覆蓋。由於 M 是緊緻的，我們能找到有限子集合 $I' \subseteq I$ 使得

$$M \subseteq \left(\bigcup_{i \in I'} C_i \right) \cup (M \setminus K).$$

所以我們也會有

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I'} C_i,$$

而這是個 \mathcal{C} 的有限子覆蓋。所以我們得證 K 是緊緻的。 \square

命題 3.1.9：賦距空間 (M, d) 中的緊緻子集合滿足下列性質。

- (1) 任何有限多個緊緻子集合的聯集是緊緻的。
- (2) 任意多個緊緻子集合的交集是緊緻的。

證明：我們可以直接使用 Borel–Lebesgue 性質來證明。

- (1) 令 $n \geq 1$ 以及 K_1, \dots, K_n 為 (M, d) 中的緊緻子集合，記 $K := K_1 \cup \dots \cup K_n$ 。令 $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ 為 K 的開覆蓋。對於 $1 \leq m \leq n$ ， \mathcal{C} 也是 K_m 的開覆蓋，因此我們可以找到有限子覆蓋，記作 $\{C_i : i \in I_m\}$ ，其中 I_m 是 I 的有限子集合。這樣一來，集合 $I' := \bigcup_{m=1}^n I_m$

也是有限的，而且 $\{C_i : i \in I\}$ 是 K 的有限子覆蓋。這告訴我們 K 是 (M, d) 的緊緻子集合。

- (2) 令 $(K_i)_{i \in I}$ 為緊緻集合族且記 $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ 。由於 K 是閉集的交集，所以 K 也還是個閉集。我們可以將 K 看作是任意緊緻集 K_i 的子集合，接著根據命題 3.1.8，我們得知 K 也是緊緻的。 \square

第二小節 在連續函數上的應用

命題 3.1.10：令 (M, d) 及 (M', d') 為兩個賦距空間，且 $f : M \rightarrow M'$ 為函數。如果 f 是連續的，且 M 是緊緻的，則像 $f(M)$ 是 M' 中的緊緻子集合；這同時也告訴我們 $f(M)$ 是個有界閉集。

註解 3.1.11：

- (1) 在第 2.5.3 小節中我們提到，連續函數可以透過開集或閉集，在此函數之下的像原所描述。在此命題的假設之下，在 M 中任意閉子集合（所以根據命題 3.1.8，是個緊緻集合），他的像會是 M' 中的閉集。此性質一般來講是不成立的，見註解 2.5.15。
- (2) 我們也注意到，如果 $f : M \rightarrow M'$ 是連續的，且 M' 是緊緻的，那麼像原 $f^{-1}(M')$ 不一定是緊緻的。常數函數 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 會給我們反例。

證明：令 $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ 為 $f(M)$ 的開覆蓋。從命題 2.5.11，我們得知對於 $i \in I$ ， $f^{-1}(C_i)$ 是 M 中的開集。因此， $\{f^{-1}(C_i) : i \in I\}$ 是 M 的開覆蓋，根據 M 的緊緻性，我們能夠找到有限的子覆蓋，記作 $\{f^{-1}(C_i) : i \in J\}$ ，其中 $J \subseteq I$ 是個有限子集合。因此，我們有

$$f(M) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(C_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(C_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} C_i$$

這也會是從 \mathcal{C} 萃取出來， $f(M)$ 的有限子覆蓋。 \square

命題 3.1.12：令 (M, d) 為緊緻賦距空間，且 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 是個連續函數。則 f 是有界的，而且會碰到他的最大值及最小值；換句話說，存在 $a, b \in M$ 使得

$$f(a) = \inf_{x \in M} f(x) \quad \text{且} \quad f(b) = \sup_{x \in M} f(x).$$

證明：根據命題 3.1.10，我們得知 $f(M)$ 是緊緻的，也就是說他是個 \mathbb{R} 中的有界閉集。令 $m = \inf_{x \in M} f(x)$ ，會是個 $f(M)$ 的附著點。由於 $f(M)$ 是閉集，我們也會有 $m \in f(M)$ ，也就是說存在 $a \in M$ 使得 $m = f(a)$ 。對於最小上界或是最大值來說，證明也是相似的。 \square

註解 3.1.13：我們注意到，假設 M 是緊緻的是個重要的假設。要找反例，我們可以考慮 $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 及 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 其中 $f(x) = \arctan(x)$ 。這樣一來，我們有 $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，我們可以顯然看出，最大下界以及最小上界並沒有被 f 碰到。

如果我們把命題 3.1.12 應用在 \mathbb{R} 的緊緻集合上，可以得到加強版本的中間值定理（定理 2.7.18），敘述如下。

系理 3.1.14：令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是個線段，且 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是個連續函數，則 $f(I)$ 也是個線段。

證明：我們注意到， \mathbb{R} 中的線段是緊緻的，這是因為他滿足 Cantor 交集定理，並透過註解 3.1.5 而得到的直接結果。因此， $f(I)$ 在 \mathbb{R} 中是緊緻的，再根據命題 3.1.6 我們得知 $f(I)$ 是閉集且有界。此外，從定理 2.7.18 我們知道 $f(I)$ 是個區間。最後，因為 \mathbb{R} 中有界的閉區間是線段，我們因此能夠總結。 \square

系理 3.1.15：令 $(M, d) \rightarrow (M', d')$ 為連續雙射函數。如果 (M, d) 是緊緻的，那麼 f^{-1} 會是連續的，且 f 是個同胚函數。

證明：假設 M 是緊緻的。我們可以使用命題 2.5.11 中，檢查閉集像原的方式，來證明 $g := f^{-1}: M' \rightarrow M$ 是連續的。令 A 為 M 的閉子集合。從命題 3.1.8，我們得知 A 是緊緻的。接著，從命題 3.1.10，我們得知 $g^{-1}(A) = f(A)$ 也是緊緻的，所以是個 M' 中的閉集。 \square

註解 3.1.16：假設 (M, d) 是緊緻的是很重要的。下面我們可以構造一個反例（習題 2.47）：考慮 $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{U}$ 定義做

$$f(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in [0, 1).$$

函數 f 顯然是個連續的雙射函數。然而， f^{-1} 在 $f(0) = 1$ 不是連續的，因為我們可以考慮序列 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ 及 $y_n = f(x_n)$ 。這樣一來， $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = f(0)$ ，但 $f^{-1}(y_n) = x_n$ 不會在 $[0, 1)$ 中收斂。

定理 3.1.17 【Heine–Cantor 定理】：令 $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ 為連續函數。假設 M 是緊緻的，那麼 f 是均勻連續的。

證明：令 $\varepsilon > 0$ 。對於任意 $x \in M$ ，根據 f 在 x 的連續性，我們能找到 $\delta_x > 0$ 使得

$$y \in B(x, \delta_x) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \frac{\varepsilon}{2}). \quad (3.1)$$

顯然，開球構成的集合 $\{B(x, \frac{\delta_x}{2}) : x \in M\}$ 會是 M 的開覆蓋。（注意到，我們將半徑除以 2）。透過 M 的緊緻性，我們能夠從中萃取有限子覆蓋，也就是

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$$

其中 $n \geq 1$ 且 $x_1, \dots, x_n \in M$ 。令 $\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \delta_{x_i}$ 。對於 $y, y' \in M$ 且滿足 $d(y, y') < \delta$ ，我們能找到 $1 \leq i \leq n$ 使得 $y \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ 。那麼，我們會有

$$d(y', x_i) \leq d(y', y) + d(y, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i}.$$

也就是說， $y, y' \in B(x_i, \delta_{x_i})$ 。因此，根據(3.1)，我們得到

$$d(f(y), f(y')) \leq d(f(y), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

註解 3.1.18：在大一微積分當中，你可能有看過 \mathbb{R} 中的 Heine–Cantor 定理，敘述如下：定義在線段 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的連續函數 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 會是均勻連續的。

第三小節 序列描述法

定義 3.1.19 【Bolzano–Weierstraß property】：給定賦距空間 (M, d) 。如果對於任意 M 中的點構成的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ ，我們可以萃取出極限在 M 中的收斂子序列 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ ，則我們說賦距空間 (M, d) 會滿足 Bolzano–Weierstraß 性質 (Bolzano–Weierstraß property)。

定理 3.1.20：在賦距空間 (M, d) 中，Borel–Lebesgue 性質以及 Bolzano–Weierstraß 性質是等價的。換句話說，若且唯若所有在 (M, d) 中的序列皆有收斂子序列，則 (M, d) 是緊緻的。

證明：Borel–Lebesgue \Rightarrow Bolzano–Weierstraß。我們假設 K 是緊緻的，並且給定序列取值在 K 中的 $(x_n)_{n \geq 1}$ 。令 $A = \{x_n : n \geq 1\}$ 為此序列的值域。如果 A 是有限的，我們不難找到一個 $(x_n)_{n \geq 1}$ 收斂的子序列。現在假設 A 是無窮的，而且 $(a_n)_{n \geq 1}$ 沒有任何收斂的子序列。這

代表著，對於所有 $x \in K$ 都會存在 $\varepsilon_x > 0$ 滿足 $A \cap B(x, \varepsilon_x) = \emptyset$ 或 $\{x\}$ 。此外，這些開球 $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in K\}$ 會構成 K 的開覆蓋。由於 K 是緊緻的，我們能找到有限的子覆蓋，也就是 x_1, \dots, x_n 使得

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_{x_i}).$$

因此，我們得到

$$A = A \cap K \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i})).$$

在上式中，左方的集合 A 是無窮的，但右方的式子中，聯集中只有有限項，且每項皆是空集合或是單元素集合，因此右側是個有限集合。這給我們矛盾。

要證明逆命題，我們先證明下面兩個引理。 □

定義 3.1.21：給定賦距空間 (M, d) 。如果對於所有 $\varepsilon > 0$ ，存在由 M 中半徑為 ε 的開球所組成的有限覆蓋，我們說 (M, d) 是預緊緻 (precompact) 的，或是相對緊緻 (relatively compact) 的。

引理 3.1.22：如果 (M, d) 是個滿足 Bolzano–Weierstraß 性質的賦距空間，那麼他也會是預緊緻的。

證明：我們使用反證法，假設存在 $\varepsilon > 0$ 使得我們無法找到有限多個半徑 ε 開球的覆蓋。接著，我們使用遞迴來構造 M 中的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 使得

- 對於所有 $n \neq m \geq 1$ ，我們有 $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ ；
- 對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $M \neq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ 。

令 $x_1 \in M$ ，根據假設，我們有 $M \neq B(x_1, \varepsilon)$ 。令 $k \geq 1$ 並假設我們已經構造了 x_1, \dots, x_k 使得對於 $1 \leq n \neq m \leq k$ ，我們有 $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ ，且 $M \neq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon)$ 。這代表我們能找到 $x_{k+1} \in M \setminus (\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon))$ 。這樣一來，對於所有 $1 \leq i \leq k$ ，我們便得到 $d(x_{k+1}, x_i) \geq \varepsilon$ ，然後再次使用假設，我們得知 $M \neq \bigcup_{i=1}^{k+1} B(x_i, \varepsilon)$ 。

我們構造出來的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 不是柯西序列，且任何他的子序列也不會是柯西序列。因此，根據命題 2.4.6，他的任何子序列皆不收斂。這會與 Bolzano–Weierstraß 性質矛盾。 □

引理 3.1.23：令 (M, d) 為滿足 Bolzano–Weierstraß 性質的賦距空間。考慮 M 的開覆蓋 $(C_i)_{i \in I}$ 。則會存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\forall x \in M, \exists i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subseteq C_i.$$

證明：使用反證法，假設對於所有 $\varepsilon > 0$ ，我們能找到 $x \in M$ 使得

$$B(x, \varepsilon) \not\subseteq C_i, \quad \forall i \in I.$$

這代表著，對於所有 $n \geq 1$ ，我們能選 $x_n \in M$ 使得

$$B_n := B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq C_i, \quad \forall i \in I. \quad (3.2)$$

使用 Bolzano–Weierstraß 性質，我們能找到子序列 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ 使得他會收斂到 $\ell \in M$ 。根據假設，我們能找到 $i \in I$ 使得 $\ell \in C_i$ 以及 $r > 0$ 使得 $B(\ell, 2r) \subseteq C_i$ 。根據子序列 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ 的收斂，存在 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_{\varphi(n)}, \ell) < r, \quad \forall n \geq N.$$

因此，當 $n \geq N$ 且 $\varphi(n) > 1/r$ ，我們會有

$$\forall y \in B_{\varphi(n)}, \quad d(\ell, y) \leq d(\ell, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < r + 1/\varphi(n) < 2r.$$

根據上式，我們會有 $B_{\varphi(n)} \subseteq B(\ell, 2r) \subseteq C_i$ ，但這與式 (3.2) 矛盾。 \square

現在我們可以完成定理 3.1.20 的證明。

定理 3.1.20 的證明：假設賦距空間 (M, d) 滿足 Bolzano–Weierstraß 性質。令 $(C_i)_{i \in I}$ 為 M 的開覆蓋。根據引理 3.1.23，我們能固定 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\forall x \in M, \exists i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subseteq C_i. \quad (3.3)$$

根據引理 3.1.22，我們可以找到 M 由有限多個半徑為 $\varepsilon > 0$ 的開球所組成的覆蓋。令 $n \geq 1$ 以及 $x_1, \dots, x_n \in M$ 滿足

$$M = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

根據式 (3.3)，對於所有 $1 \leq i \leq n$ ，我們能找到 $j_i \in I$ 使得 $B(x_i, \varepsilon) \subseteq C_{j_i}$ 。這讓我們可以得到下面的結論：

$$M = \bigcup_{i=1}^n C_{j_i}. \quad \square$$

在結束此小節之前，我們重新敘述我們上面所證明的性質，把他們整理在下面的系理中，這告訴我們要怎麼去檢查一個給定的賦距空間是否有緊緻性。此外，我們也會看到幾個應用。

系理 3.1.24：給定賦距空間 (M, d) 。若且唯若下面性質之一是滿足的，則 (M, d) 是緊緻的：

- (1) 所有 M 的序列都有在 M 中收斂的子序列。

(2) 任何 M 的無窮子集合在 M 中都會有匯聚點。

命題 3.1.25：令 (M, d) 為緊緻賦距空間。給定 M 中的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 並假設他只有一個子序列極限 x ，那麼 $(x_n)_{n \geq 1}$ 會收斂到 x 。

證明：我們使用反證法，假設此序列不會收斂到 x 。我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得對於所有 $N \geq 1$ ，存在 $n \geq N$ 滿足 $d(x_n, x) \geq \varepsilon$ 。這給我們子序列 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ 使得對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $d(x_{\varphi(n)}, x) \geq \varepsilon$ 。由於 M 是緊緻的，我們能夠從 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ 中萃取出收斂的子序列，也就是說

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi \circ \psi(n)} = y \in M.$$

由於 $d(x, y) \geq \varepsilon$ ，所以 $x \neq y$ ，而且 y 也是個 $(x_n)_{n \geq 1}$ 的子序列極限，這與假設矛盾。 \square

接著，我們要考慮下標集合為 I 的積賦距空間。我們會區分兩種不同的設定：(i) I 是有限的，或是 $I = [N] = \{1, \dots, N\}$ 對於某個整數 $N \geq 1$ ；(ii) I 是可數無窮的，或是 $I = \mathbb{N}$ 。我們回顧我們在第 2.6 節還有習題 2.46 中所看到的記號和定義。

(i) 令 $N \geq 1$ 以及 $(M_1, d_1), \dots, (M_N, d_N)$ 為賦距空間。我們考慮積空間 $M = \prod_{i \in I} M_i = M_1 \times \dots \times M_N$ 還有定義 2.6.1 中的積距離，定義做：

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} d_i(x_i, y_i), \quad x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in M.$$

(ii) 令 $((M_n, d_n))_{n \geq 1}$ 為均勻有界的賦距空間序列。我們考慮積空間 $M = \prod_{i \in I} M_i = \prod_{n \geq 1} M_n$ 還有習題 2.46 中的積距離，定義做：

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} d_n(x_n, y_n), \quad x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1} \in M.$$

我們注意到，在兩種設定中，積空間的收斂與每個座標在各自的賦距空間中收斂等價。換句話說，對於任意 M 中的序列 $(x^{(k)})_{k \geq 1}$ ，我們會有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, \forall i \in I.$$

命題 3.1.26：如同在 (i) 或 (ii) 中，我們給定賦距空間並且定義相對應的積賦距空間。那麼若且唯若對於所有 $n \in I$ ，賦距空間 (M_n, d_n) 是緊緻的，則 (M, d) 也是緊緻的。

證明： 假設 (M, d) 是緊緻的。對於所有 $1 \leq i \leq n$ ，我們可以藉由投影函數的連續性，來證明 M_i 是緊緻的。更確切地說，我們固定 $1 \leq i \leq n$ ，則 M_i 可以被看作是 M 在投影函數 Proj_i 之下的像，且根據命題 2.6.5，此投影函數是連續的。接著，我們由命題 3.1.10 來得到 M_i 也是緊緻的。

逆命題的部份，我們會使用系理 3.1.24 中的描述方式。給定 (M, d) 中的點所構成的序列 $(x^{(k)})_{k \geq 1}$ ，我們要去找出一個收斂子序列。我們上面提到，在 (i) 還有 (ii) 的情況， M 中序列的收斂與所有座標的收斂等價，這可以化簡我們接下來要進行的構造。我們以遞迴方式構造萃取函數 $(\varphi_n)_{n \in I}$ ，其中 $I = [N]$ 對於 $N \geq 1$ 或是 $I = \mathbb{N}$ 。

首先，由於 M_1 是緊緻的，我們能找到子序列 $(x^{(\varphi_1(k))})_{k \geq 1}$ 使得 $(x_1^{(\varphi_1(k))})$ 在 M_1 中收斂。接著，我們把 M_2 的緊緻性用在序列 $(x^{(\varphi_1(k))})_{k \geq 1}$ 上，所以我們能夠找到子序列 $(x^{(\varphi_1 \circ \varphi_2(k))})_{k \geq 1}$ 使得 $(x_2^{(\varphi_1 \circ \varphi_2(k))})_{k \geq 1}$ 會在 M_2 中收斂。一直重複下去，我們可以找到萃取函數 $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(k))} = \ell_n \in M_n, \quad \forall n \in I. \quad (3.4)$$

(i) 在 $N \geq 1$ 且 $I = [N]$ 的情況下，我們定義萃取函數 $\psi := \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_N$ 。對於每個 $1 \leq n \leq N$ ，由於序列 $(x_n^{(\psi(k))})_{k \geq 1}$ 是收斂序列 $(x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(k))})_{k \geq 1}$ 的子序列，根據式 (3.4)，我們得知他也會收斂到相同的極限 ℓ_n 。

(ii) 在 $I = \mathbb{N}$ 的情況下，我們無法直接使用上面的方式，因為我們無法定義無窮多個函數的合成函數。要解決這個問題，我們使用對角論證法來構造萃取函數：

$$(x^{(\psi(n))})_{n \geq 1}, \quad \psi(n) := \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n).$$

對於每個 $n \in \mathbb{N}$ ，我們可以看出來 $(x_n^{(\psi(k))})_{k \geq n}$ 是收斂序列 $(x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(k))})_{k \geq n}$ 的子序列，所以 $(x_n^{(\psi(k))})_{k \geq 1}$ 也會收斂到相同的極限 ℓ_n 。

綜合上面的論述，我們得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(\psi(n))} = \ell := (\ell_n)_{n \in I} \in M. \quad \square$$

第四小節 在有限維度歐式空間中的 Heine–Borel 性質

從命題 3.1.6 中，我們知道緊緻集合也是有界閉集。在此小節中，我們會看到，在歐式空間 \mathbb{R}^n 當中，有界閉集也是緊緻集合，這個我們稱作 Heine–Borel 定理。這讓我們有比較簡單的方式來檢查 \mathbb{R}^n 的子集合是否是緊緻的，而不用去檢查在定義 3.1.3 中，定義緊緻性最初所使用的性質，也就是 Borel–Lebesgue 性質。然而，要記得的是，這樣的等價關係在更一般的賦距空間中是不成立的，我們會在註解 3.1.34 中看到反例。

讓我們考慮下列 \mathbb{R}^n 中可數多個開球所構成的集合：

$$\mathcal{G} = \{B(x, r) : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}.$$

引理 3.1.27：令 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 為包含 x 的開集。那麼存在 $G \in \mathcal{G}$ 使得 $x \in G \subseteq A$ 。

證明：要找到開球 $G \in \mathcal{G}$ 滿足 $x \in G \subseteq A$ ，我們需要找到距離 x 夠近的有理座標點 y ，然後取夠小的有理數 $\varepsilon > 0$ ，並考慮 $G = B(y, \varepsilon)$ 。

由於 A 是開集，我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$ 。接著，我們取 $y \in \mathbb{Q}^n$ 使得 $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{4}$ 。這是可行的，因為 \mathbb{Q}^n 在 \mathbb{R}^n 中是稠密的。令 $r \in \mathbb{Q} \cap [\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}]$ ，讓我們可以有 $x \in B(y, r)$ 。再來我們想要檢查 $B(y, r) \subseteq A$ 。給定 $z \in B(y, r)$ ，根據三角不等式，我們會有

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon.$$

因此 $B(y, r) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq A$ 。 □

定理 3.1.28 【Lindelöf 覆蓋定理】：令 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及 A 的開覆蓋 \mathcal{C} 。那麼會存在 \mathcal{C} 的可數子集合族，也能夠覆蓋住 A 。

註解 3.1.29：此定理只有在開覆蓋 \mathcal{C} 是不可數的時候才是有趣的，不然此命題會是顯然的。此外，這裡我們對子集合 A 沒有任何額外的假設。

證明：我們把開覆蓋 \mathcal{C} 中的元素記作 $\mathcal{C} := \{C_i : i \in I\}$ ，其中 I 是個指標集合。集合 \mathcal{G} 中包含可數多個開球，我們可以把當中的元素記作 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\}$ 。

對於每個 $x \in A$ ，我們能夠固定 $i = i(x) \in I$ 使得 $x \in C_i$ ，再根據引理 3.1.27，我們知道存在至少一個 $G \in \mathcal{G}$ 使得 $x \in G \subseteq C_i$ ，因此下列函數 $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ ，寫作

$$\forall x \in A, \quad f(x) := \min\{j \geq 1 : x \in G_j \subseteq C_i\}$$

是定義良好的。接著，令

$$J := \{f(x) : x \in A\},$$

這會是個可數集合，所以從上面的構造，我們得到

$$A = \bigcup_{j \in J} G_j.$$

最後，對於每個 $j \in J$ ，我們可以選擇任意 $x_j \in f^{-1}(\{j\})$ ，那麼他相對應到的元素 $C_{i(x_j)}$ 會在

開覆蓋 \mathcal{C} 當中。因此，我們得到了可數 \mathcal{C} 的子集合族，使得他會覆蓋 A ，也就是說

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} C_{i(x_j)}.$$

□

定理 3.1.30 【Heine–Borel 定理】：令 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 。如果 K 是有界閉集，那麼 K 是緊緻的。

註解 3.1.31：我們可以注意到，從 Lindelöf 覆蓋定理（定理 3.1.28），從任意 K 的開覆蓋中，我們都可以萃取出可數的子覆蓋出來。這個定理給我們充分條件，使得我們能夠找到有限的（開）子覆蓋。此外，此條件也是必要條件，如同我們在命題 3.1.6 中所看到的。

證明：給定 K 的開覆蓋 \mathcal{C} 。Lindelöf 覆蓋定理給我們 \mathcal{C} 的可數子覆蓋，記作

$$\{C_i : i \geq 1\} \subseteq \mathcal{C}$$

也能夠覆蓋住 K 。對於 $n \geq 1$ ，令

$$S_n := \bigcup_{i=1}^n C_i$$

這會是個開集。我們想要證明存在 $n \geq 1$ 使得 $K \subseteq S_n$ 。

我們考慮另一個子集合序列，定義做

$$A_n := K \setminus S_n = K \cap S_n^c, \quad \forall n \geq 1.$$

我們不難看出，對於所有 $n \geq 1$ ，集合 A_n 是閉集，包含關係 $A_{n+1} \subseteq A_n$ 成立，且 $A_1 \subseteq K$ 是有界的。使用反證法，假設不存在 $n \geq 1$ 使得 $K \subseteq S_n$ ，那麼所有集合 A_n 皆是非空的。我們可以使用 Cantor 交集定理（定理 2.2.7），告訴我們交集 $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ 是非空的。取 $x \in A$ ，也就是 $x \in K$ 但對於所有 $n \geq 1$ ，我們會有 $x \notin S_n$ ，這是不可能的，因為 $K \subseteq \bigcup_{n \geq 1} C_n$ 。 □

註解 3.1.32：在此小節開頭的地方，我們假設 \mathbb{R}^n 上的範數是歐氏範數 $\|\cdot\|_2$ 。然而，對於任意其他等價的範數 $\|\cdot\|$ ，賦範空間 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 與 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 是拓撲等價的（註解 2.5.26）。這代表著開集、閉集與有界集合的概念是相同的，緊緻空間的定義也不變，因為他只取決於開集的概念（定義 3.1.3）。因此，當我們在 \mathbb{R}^n 上賦予其他等價範數，像是 $\|\cdot\|_1$ 或是 $\|\cdot\|_\infty$ 時（範例 2.5.25），Heine–Borel 定理仍然有效。

註解 3.1.33：更一般來說，Lindelöf 覆蓋定理、Cantor 交集定理，還有 Heine–Borel 定理的證明，不需要經過太多修改，都能夠輕易推廣到任何有限維度賦範向量空間中。實際上，我們稍後在定理 3.2.22 當中會看到，所有有限維度賦範向量空間中的範數皆是等價的。這樣一來，任何有限維度向量空間會和 \mathbb{R}^n 同構，只要在上面選擇適合的範數即可。從這裡我們能夠總結，在任何有限維度賦範向

量空間中，有界閉集皆是緊緻的。

註解 3.1.34：在一般的賦距空間中，Heine–Borel 定理不會成立。我們可以考慮賦範空間 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 以及單位閉球 $B = \overline{B}(0, 1)$ ，這顯然是個有界閉集。然而，他不曾是個緊緻集合，因為他不滿足 Bolzano–Weierstraß 性質。要看出這件事，我們可以考慮 B 中的點構成的序列 $(a^{(i)})_{i \geq 1}$ ，定義做

$$a^{(i)} = (a_n^{(i)})_{n \geq 1}, \quad a_n^{(i)} = \delta_{n,i} = \mathbb{1}_{n=i}, \quad \forall n \geq 1.$$

此序列沒有收斂子序列，因為

$$\|a^{(i)} - a^{(j)}\| = 1, \quad \forall i \neq j \geq 1.$$

這個小節最重要的就是，在有限維度的賦範向量空間中，例如 \mathbb{R}^n ，Heine–Borel 定理給我們比較容易使用的準則，來檢查子集合是否是緊緻的。

系理 3.1.35：令 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ，那麼若且唯若 K 是有界閉集，則 K 是緊緻的。

第二節 完備空間

在第 2.4.2 小節中，我們看到任何收斂序列皆是柯西序列，但柯西序列未必會收斂。直覺上來說，柯西序列中的項在當下標夠大時，項與項之間是均勻靠近的，所以如果這樣的序列無法收斂，代表在空間中有「洞」。此章節的目的是理解完備賦距空間的一般性質（第 3.2.1 小節），討論一個重要的應用（第 3.2.2 小節），然後最後由完備賦範空間，也稱作 Banach 空間（第 3.2.3 小節）中的結果來收尾。

第一小節 定義及性質

我們回顧在定義 2.4.10 中所定義的完備空間還有 Banach 空間。在賦距空間中，如果所有柯西序列皆收斂，那麼他是完備的；Banach 空間則是完備的賦範向量空間。

命題 3.2.1：令 (M, d) 為賦距空間，且 $S \subseteq M$ 為子集合。

- (1) 如果 (S, d) 是完備的，那麼 S 是閉集。
- (2) 如果 (M, d) 是完備的且 S 是閉集，那麼 S 也是完備的。

證明：證明背後使用到的想法是完備空間的定義，以及系理 2.4.15 中透過序列來描述閉集的方式。

- (1) 假設 (S, d) 是完備的。如果要證明 S 是閉集，使用系理 2.4.15 中藉由序列描述的方式，我們需要檢查對於任何取值在 S 中的收斂序列，他的極限也必須要在 S 裡面。如果序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 在 M 中收斂，那麼他會是 M 中的柯西序列，所以也是 S 中的柯西序列。由於 S 是完備的，我們得到此極限也會在 S 當中。
- (2) 假設 (M, d) 是完備的，且 S 是個閉集。給定 S 中的柯西序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 。由於他也是完備空間 M 中的柯西序列，他會收斂到極限 $\ell \in M$ 。再來，根據系理 2.4.14，我們會有 $\ell \in \bar{S} = S$ ，所以此序列也會在 S 中收斂。 \square

命題 3.2.2：令 (K, d) 為緊緻賦距空間，那麼 K 也是完備的。

證明：令 $(x_n)_{n \geq 1}$ 為 K 中的柯西序列。系理 3.1.24 中，使用序列來描述緊緻集合的方式，告訴我們能夠找到萃取函數 φ ，使得 $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ ，其中 $\ell \in K$ 。我們想要證明的是原本的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 也會收斂到 ℓ 。

令 $\varepsilon > 0$ 。由於 $(x_n)_{n \geq 1}$ 是柯西序列，我們能找到 $N_1 \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq N_1.$$

由於子序列 $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ 收斂，我們能找到 $N_2 \geq 1$ 使得

$$d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_2.$$

這樣一來，對於 $n \geq \max(N_1, N_2)$ ，我們有

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

這讓我們得到 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ 。 \square

命題 3.2.3：給定賦距空間序列 $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ 並考慮積賦距空間 (M, d) 其中積空間寫作 $M = M_1 \times \dots \times M_n$ 以及取定義 2.6.1 中的積距離。那麼若且唯若，對於所有 $1 \leq i \leq n$ ， (M_i, d_i) 皆是完備的，那麼 (M, d) 也是完備的。

證明：見習題 3.22。 \square

命題 3.2.4：令 (M, d) 為完備空間。考慮閉集序列 $(A_n)_{n \geq 1}$ ，且滿足：

- 對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $A_{n+1} \subseteq A_n$ ；

• 直徑趨近於零： $\delta(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 。

則存在 $x \in M$ 使得 $A := \bigcap_{n \geq 1} A_n = \{x\}$ 。

證明：對於每個 $n \geq 1$ ，我們選 $a_n \in A_n$ 。由於 $\delta(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ，序列 $(a_n)_{n \geq 1}$ 是柯西的。對於任意 $p \geq 1$ ，子集合 A_p 是個閉集，根據命題 3.2.1，我們知道 A_p 是完備的。因此，序列 $(a_n)_{n \geq p}$ 會在 A_p 中收斂至 ℓ_p 。對於所有 $p \geq 1$ ，此極限 ℓ_p 是相同的，因為極限有唯一性，所以我們可以把這個共同極限記作 ℓ 。由於對於所有 $p \geq 1$ ，我們有 $\ell \in A_p$ ，所以我們也會有 $\ell \in A := \bigcap_{n \geq 1} A_n$ 。

最後，由於 $\delta(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ，我們知道 A 中最多只能有一個元素。 □

註解 3.2.5：這裡假設 $\delta(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 是很重要的。假如我們考慮閉集序列 $(A_n = [n, \infty))_{n \geq 1}$ ，他會滿足其他所有假設，但我們有 $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$ 。

第二小節 不動點定理

定義 3.2.6：令 (M, d) 為完備賦距空間。給定函數 $f: M \rightarrow M$ 。如果存在 $k \in [0, 1)$ 使得

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall x, y \in M, \quad (3.5)$$

則我們說 f 是個壓縮映射 (contraction map)。

定理 3.2.7 【不動點定理】：令 (M, d) 為完備賦距空間，且 $f: M \rightarrow M$ 為壓縮映射。那麼， f 會有唯一的不動點，也就是存在唯一的 $x \in M$ 使得 $f(x) = x$ 。

證明：令 $k \in [0, 1)$ 為給定的常數，使得式 (3.5) 成立。固定 $x_0 \in M$ 並對於所有 $n \geq 1$ ，定義 $x_{n+1} = f(x_n)$ 。透過數學歸納法，我們得知對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ 。因此，對於所有 $m > n \geq 1$ ，我們可以得到

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (k^{m-1} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

這告訴我們序列 $(x_n)_{n \geq 0}$ 是柯西的。由於 (M, d) 是完備的，我們知道 $(x_n)_{n \geq 0}$ 會收斂，我們將他的極限記作 x 。

由於 f 是 Lipschitz 連續的，他也會是連續的（系理 2.5.31），再透過序列來描述連續性，我

們得到

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

因此， x 會是 f 的固定點。

接著，讓我們證明固定點的唯一性。假設 $x, y \in M$ 滿足 $f(x) = x$ 以及 $f(y) = y$ 。那麼，我們有

$$0 \leq d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

由於 $k < 1$ ，只有在 $d(x, y) = 0$ 時此不等式才有可能成立，換句話說 $x = y$ 。□

註解 3.2.8：證明給我們的另一個間接結果是，任何迭代的序列，由固定的 $x_0 \in M$ 及遞迴式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 對於 $n \geq 1$ 所定義，都會收斂到 f 唯一的不動點。

註解 3.2.9：注意到如果我們把式 (3.5) 中的假設換成

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad \forall x \neq y \in M,$$

那麼結論不會是對的。例如，在賦距空間 $(M, d) = ([0, \infty), |\cdot|)$ 中，函數 $f(x) = x + e^{-x}$ 沒有任何不動點。然而，若假設 (M, d) 是緊緻的，那麼式 (3.5) 中的假設便足以讓我們得到不動點定理，見習題 3.16。

第三小節 賦範向量空間

定義 3.2.10 :

- 我們把從 V 到 W 所有線性映射構成的集合記作 $\mathcal{L}(V, W)$ 。
- 我們把從 V 到 W 所有連續線性映射構成的集合記作 $\mathcal{L}_c(V, W)$ 。我們可以賦予 $\mathcal{L}_c(V, W)$ 下面這個範數，稱作算子範數 (operator norm) :

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(V, W), \quad \|f\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|f(x)\|_W \in [0, \infty]. \quad (3.6)$$

在沒有特別說明的情況下，式 (3.6) 是我們在 $\mathcal{L}(V, W)$ 上所考慮的預設範數。我們注意到，如果 $\dim V \geq 1$ ，或是說 $V \neq \{0\}$ ，我們也會有

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(V, W), \quad \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|f(x)\|_W. \quad (3.7)$$

- 在集合 $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ 中的元素稱作線性泛函 (linear forms)，在集合 $\mathcal{L}_c(V, \mathbb{K})$ 中的元素則稱作連續線性泛函 (continuous linear forms)。

範例 3.2.11 :

- (1) 對於任意的賦範向量空間 V 來說，我們有 $\|\text{Id}_V\| = 1$ 。
- (2) 我們可以賦予 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 由下列式子所給定的範數 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

我們考慮線性泛函 $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 。

- 對於 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ，我們有 $|\text{tr}(A)| \leq \sum_{k=1}^n |a_{k,k}| \leq n \|A\|_\infty$ 。這證明 tr 的連續性以及 $\|\text{tr}\| \leq n$ 。
- 我們有 $|\text{tr}(I_n)| = n$ 和 $\|I_n\|_\infty = 1$ ，這證明了 $\|\text{tr}\| = n$ 。

定理 3.2.12 : 令 $f \in \mathcal{L}(V, W)$ 為從 V 到 W 的線性映射。下面的性質是等價的。

- (a) f 在 V 上連續。
- (b) f 在 0 連續。
- (c) f 在 V 的單位閉球 $\bar{B}(0, 1)$ 上有界。
- (d) f 在 V 的單位球殼 $S(0, 1)$ 上有界。
- (e) 存在 $M > 0$ 使得對於所有 $x \in V$ ，我們有 $\|f(x)\|_W \leq M \|x\|_V$ 。

- (f) f 在 V 是 Lipschitz 連續的。
- (g) f 在 V 是均勻連續的。

註解 3.2.13：在實際的問題中，如果我們想要證明線性映射 $f \in \mathcal{L}(V, W)$ 是連續的，我們可以證明 (e)，也就是我們去找常數 $M > 0$ 使得

$$\forall x \in V, \quad \|f(x)\|_W \leq M \|x\|_V.$$

如果我們回頭看式 (3.7) 中所定義的算子範數，我們知道可以選擇的最好（最小）的常數 M 會是 $M = \|f\|$ 。如果要證明線性映射 $f \in \mathcal{L}(V, W)$ 不是連續的，我們可以證明 f 在 0 不連續。我們可以構造序列 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 使得 $f(x_n)$ 不會收斂到 0。範例請見習題 3.29。

證明：

- (a) \Leftrightarrow (b)。對於 $x \in V$ 以及 $y \in B(0, \varepsilon)$ ，我們有

$$f(x + y) - f(x) = f(y) - f(0).$$

因此，在 x 的連續性與在 0 的連續性等價。

- (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (c)。蘊含關係 (c) \Rightarrow (d) 以及 (e) \Rightarrow (c) 是顯然的。我們來證明 (d) \Rightarrow (e)。
令 $M = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|_W < \infty$ 。固定 $x \in V$ ，根據線性以及範數的性質，我們得到

$$\|f(x)\|_W = \|x\|_V \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right) \right\|_W \leq M \|x\|_W$$

因為 $\frac{x}{\|x\|_V} \in S(0, 1)$ 。

- (f) \Leftrightarrow (g)。我們已經在系理 2.5.31 中證明過 (f) \Rightarrow (g)。假設 (g) 成立。令 $\varepsilon > 0$ 並選擇 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x, y \in V, \quad \|x - y\|_V \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x - y)\|_W = \|f(x) - f(y)\|_W \leq \varepsilon.$$

那麼，對於任何 $x, y \in V$ 滿足 $x \neq y$ ，我們會有

$$\|f(x) - f(y)\|_W = \frac{\|x - y\|_V}{\delta} \cdot \left\| f\left(\frac{\delta(x - y)}{\|x - y\|_V}\right) \right\|_W \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \|x - y\|_V.$$

- (g) \Rightarrow (a) 是顯然的。
- (b) \Rightarrow (e)。給定 $\varepsilon > 0$ ，根據 f 在 0 的連續性，我們能找到 $\delta > 0$ 使得

$$\forall y \in V, \quad \|y\|_V \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(y)\|_W \leq \varepsilon.$$

因此，對於任意給定的 $x \in V$ ，我們有

$$\|f(x)\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta x}{\|x\|_V}\right) \right\|_W \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \|x\|_V.$$

• (e) \Rightarrow (f) 對於任意 $x, y \in V$ ，我們有

$$\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x - y)\|_W \leq M \|x - y\|_V. \quad \square$$

命題 3.2.14：令 U, V, W 為三個賦範向量空間。對於 $f \in \mathcal{L}_c(U, V)$ 及 $g \in \mathcal{L}_c(V, W)$ ，我們有 $g \circ f \in \mathcal{L}_c(U, W)$ 以及 $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$ 。

證明：對於 $x \in U$ ，我們有

$$\|g \circ f(x)\|_W \leq \|g\| \|f(x)\|_V \leq \|g\| \cdot \|f\| \|x\|_U.$$

換句話說，我們有

$$\|g \circ f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|g \circ f(x)\|_W}{\|x\|_U} \leq \|g\| \cdot \|f\|. \quad \square$$

註解 3.2.15：在特別情況 $U = V = W$ 之下，此命題可以化簡為在 U 上連續自同態 (endomorphism) 映射空間中的次可乘性不等式，也就是說

$$\|gf\| \leq \|g\| \cdot \|f\|, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_c(U) := \mathcal{L}_c(U, U),$$

其中 $\mathcal{L}_c(U)$ 的代數結構中的乘法，是被合成運算 \circ 所給定的。這是賦範代數 (normed algebra) 的一個例子。

註解 3.2.16：令 $m, n \geq 1$ 為整數。對於矩陣 $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ 來說，我們可以定義連續線性算子 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, X \mapsto AX$ ，其中我們把 \mathbb{R}^n 還有 \mathbb{R}^m 中的向量視為行向量。這讓我們可以在矩陣空間上定義範數，也就是說

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| \in [0, \infty].$$

這個在矩陣上的範數是個算子範數。此外，當 $m = n$ 時，此算子範數還會滿足

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

定義 3.2.17：完備的賦距向量空間稱作 Banach 空間 (Banach space)。

定理 3.2.18：如果 W 是個 Banach 空間，那麼賦範向量空間 $(\mathcal{L}_c(V, W), \|\cdot\|)$ 也會是個 Banach 空間。

證明：令 $(f_n)_{n \geq 1}$ 為 $\mathcal{L}_c(V, W)$ 中的柯西序列。我們會分三個步驟來構造 f 的可能極限，並且檢查他的確是我們要的極限。

- 固定 $x \in V$ 。我們可以觀察到

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\| \cdot \|x\|_V, \quad \forall p, q \geq 1,$$

因此 $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 會是在 W 中的柯西序列。 W 是個 Banach 空間，因此序列 $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 會收斂，我們把他的極限記作 $f(x)$ 。這讓我們可以定義函數 $f : V \rightarrow W$ 。

- 我們要檢查上面定義出來的函數 f 是線性且連續的。對於 $x, y \in V$ ，我們有

$$f(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) + f_n(y)] = f(x) + f(y).$$

對於 $x \in V$ 以及 $\lambda \in \mathbb{K}$ ，我們有

$$f(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f_n(x) = \lambda f(x).$$

再來討論連續性，由於 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是柯西序列，所以是有界的 (命題 2.4.8)，也就是存在 $M > 0$ 使得對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $\|f_n\| \leq M$ 。對於任意 $x \in V$ ，我們有

$$\|f(x)\|_W = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\|_W = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\|_W \leq M \|x\|_V.$$

- 要完成此證明，我們還需要檢查 $(f_n)_{n \geq 1}$ 的確會在範數 $\|\cdot\|$ 之下收斂到 f 。令 $\varepsilon > 0$ 。存在 $N \geq 1$ 使得對於所有 $p, q \geq N$ ，我們有 $\|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$ 。固定 $p \geq N$ ，我們得到

$$\forall q \geq N, \quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_W \leq \|f_p - f_q\| \cdot \|x\|_V \leq \varepsilon \|x\|_V.$$

取極限 $q \rightarrow \infty$ ，根據 $f_q(x)$ 的收斂性，我們會有

$$\|f_p(x) - f(x)\|_W \leq \varepsilon \|x\|_V.$$

由於上面這個不等式對於所有 $x \in V$ 皆成立，我們推得 $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$ 對於所有 $p \geq N$ 。□

註解 3.2.19：這個證明中，我們看到的是證明賦範空間是個 Banach 空間的標準證明步驟。更確切的說，我們要把他拆成三步。

- (1) 構造一個候選元素（此範例中為函數），會是我們想要的極限。
- (2) 我們檢查這個候選元素（函數）的性質，證明他會存在正確的空間中。
- (3) 檢查這個候選元素的確會是極限。

在習題 3.31 中，你們可以使用相同的步驟來證明。

命題 3.2.20：令 U 為完備賦範向量空間（Banach 空間）且 $u \in \mathcal{L}_c(U)$ 滿足 $\|u\| < 1$ 。那麼 $\text{Id} - u$ 是可逆的，且他的反元素寫作

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u^k \in \mathcal{L}_c(U). \quad (3.8)$$

證明：我們要檢查式 (3.8) 中的極限是定義良好的，然後再檢查他的反元素是 $\text{Id} - u$ 。

- 對於每個 $n \geq 0$ ，令 $S_n = \sum_{k=0}^n u^k$ 。對於任意 $m \geq n \geq 0$ ，我們有

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m u^k,$$

$$\|S_m - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u^k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u\|^k \leq \frac{\|u\|^{n+1}}{1 - \|u\|}.$$

因此，序列 $(S_n)_{n \geq 0}$ 是在 $\mathcal{L}_c(U)$ 中的柯西序列，根據定理 3.2.18，我們知道此空間是完備的，所以 $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在且在 $\mathcal{L}_c(U)$ 中。

- 我們可以藉由簡單的計算來檢查極限 S 是 $\text{Id} - u$ 的反元素。我們有：

$$(\text{Id} - u)S = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - u)S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - u^{n+1}) = \text{Id}.$$

使用相似的方式，我們也能得到 $S(\text{Id} - u) = \text{Id}$ 。 □

註解 3.2.21：使用相似的方法，我們也能夠定義連續自同態 $u \in \mathcal{L}_c(U)$ 的指數，定義如下：

$$\exp(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} \in \mathcal{L}_c(U).$$

我們也可以把相同的想法用來構造其他收斂的級數。

定理 3.2.22：在有限維度的賦範空間中，所有範數都是等價的。

證明：令 V 為在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 上的有限維度向量空間。我們把他的維度記作 n ，然後考慮 V 的一個基底，記作 (e_1, \dots, e_n) 。令 N_∞ 為在 V 上的範數，定義如下：

$$N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V.$$

令 N 為 V 上的範數。我們想要證明 N_∞ 與 N 是等價的。

對於 $x \in V$ ，我們可以把他的寫作 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ，所以他的範數會滿足：

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq a N_\infty(x), \quad a = \sum_{i=1}^n N(e_i).$$

令 $S = \{x \in V : N_\infty(x) = 1\}$ 。在賦範空間 (V, N_∞) 中， S 顯然是有界的，而且由於他是閉集 $\{1\}$ 在連續函數 $x \mapsto N_\infty(x)$ 之下的像原，他也會是閉集。從註解 3.1.32 我們得知， S 會是 (V, N_∞) 中的緊緻子集合。此外，函數 $N : (V, N_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是連續的，因為他是 Lipschitz 連續 (系理 2.5.31)：

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq a N_\infty(x - y).$$

因此， N 在 S 上能碰到他的最大下界 (命題 3.1.12)，所以必然為嚴格大於 0。我們記 $b = \inf_{x \in S} N(x) > 0$ ，然後我們有

$$\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad N(x) = N_\infty(x) \cdot N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right) \geq b N_\infty(x). \quad \square$$

註解 3.2.23：定理 3.2.22 告訴我們，有限維度的向量空間上，我們可以選擇任意我們想要的範數，因為很多拓撲概念都不取決於我們所選擇的範數。

- 不同範數給出來的賦範空間皆是拓撲等價的 (註解 2.5.33)。這代表著，各種概念例如開集、閉集、開核、閉包、邊界、緊緻集合、連通集合、極限、函數的連續性等等，在不同範數之下皆是相同的。
- 某些比較強的概念，會需要用到距離 (範數)，而不只取決於拓撲的，在不同範數之下也會相同，例如集合的有界性還有函數的均勻連續性。

系理 3.2.24：下面是定理 3.2.22 的結果。

- (1) 任何從有限維度賦範向量空間到任何賦範向量空間的線性映射都是連續的。換句話說，如果 $\dim V < \infty$ ，那我們有 $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}_c(V, W)$ 。
- (2) 所有有限維度賦範向量空間都是完備的。

- (3) 賦範向量空間中，任何有限維度子向量空間都是閉集。
- (4) 在有限維度的賦範向量空間中，緊緻集合剛好就是有界閉集。

註解 3.2.25：在無窮維度的賦範空間中，這些性質未必成立。

- (1) 我們可以在多項式構成的向量空間 $\mathbb{R}[X]$ 上賦予範數

$$\forall P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, \quad \|P\| = \sup_{n \geq 0} |a_n|.$$

那麼，下列映射

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

是線性的，但不連續。我們可以這樣看出來：對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $\|f(X^n)\| = n$ ，其中 $\|X^n\| = 1$ 。

- (2) 在連續函數空間 $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 中，我們可以考慮下列仿射函數構成的序列：

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n^{3/2}x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{若 } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

那麼，我們有

- $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$ 對於所有 $n \geq 1$ ，所以 f_n 不會在範數 $\|\cdot\|_\infty$ 之下收斂；
- $\|f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ，所以 f_n 會在範數 $\|\cdot\|_1$ 之下收斂到常數函數 0；
- $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 對於所有 $n \geq 1$ ，所以序列 $(f_n)_{n \geq 1}$ 在範數 $\|\cdot\|_2$ 之下是有界的。然而，他不會收斂到常數函數 0，而且根據極限的唯一性，也不會收斂到任何其他的常數（還需要使用柯西不等式）。

在下學期，我們會討論函數序列不同的收斂概念。

- (3) 在註解 3.1.34 中，我們看到在 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 中，單位閉球 $\overline{B}(0, 1)$ 是有界閉集，但不是緊緻集合。

第三節 賦距空間的完備化

第一小節 使用柯西序列

一個賦距空間 (M, d) 未必是完備的，但如果我們把那些缺少的（柯西數列的）極限點加進來，我們是可以把他變成完備的。為了達成此目的，我們先考慮包含所有 M 的柯西數列所構成的空間。這個空間比原本的空間 M 來得要大許多（在等距變換作用下的比較），甚至一個元素會被多個柯西序列所表示，所以我們需要把一些元素看作是相同的，並證明這樣得到的空間會是完備的。這樣的空間是唯一，且是包含原始空間 M 最小的完備空間（在等距變換作用下的比較），我們把他稱作

(M, d) 的完備化。

定理 3.3.1 【賦距空間的完備化】：令 (M, d) 為賦距空間。存在賦距空間 (\hat{M}, \hat{d}) 以及等距單射 $i : M \rightarrow \hat{M}$ 使得下列性質成立。

- (1) $i(M)$ 在 \hat{M} 中是稠密的。
- (2) 賦距空間 (\hat{M}, \hat{d}) 是完備的。

此外，這樣的賦距空間 (\hat{M}, \hat{d}) 在下面的意義下是唯一的。令 (M_1, δ_1) 及 (M_2, δ_2) 為兩個完備賦距空間， $i_1 : M \rightarrow M_1$ 與 $i_2 : M \rightarrow M_2$ 為兩個等距單射使得 $i_1(M)$ 在 M_1 中是稠密的，且 $i_2(M)$ 在 M_2 中是稠密的。那麼會存在等距雙射函數 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ 使得對於所有 $x \in M$ ，我們有 $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ 。

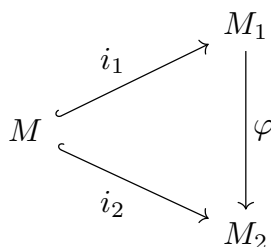


圖 3.1: 此圖表示的是 (M, d) 完備化空間的唯一性，最多只會差在一個雙射等距變換 φ 。

範例 3.3.2：下面是賦距空間完備化的例子。

- (1) 如果我們賦予 $M = (0, 1]$ 距離 $|\cdot|$ ，那麼他的完備化空間會是 $\hat{M} = [0, 1]$ 。
- (2) 如果我們賦予 $M = (0, 1]$ 習題 2.23 中的距離 d ，那麼 $\hat{M} = M$ 因為 (M, d) 是完備的。
- (3) 如果我們賦予 \mathbb{Q} 相同的距離 $|\cdot|$ ，那麼 $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ，這會是 Cantor 構造實數的方式。在此構造方式中，每個實數可以被看作是柯西序列。
- (4) 如果我們賦予 \mathbb{Q} 離散距離 d_{discrete} ，那麼 $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ 。

我們把定理 3.3.1 的證明拆解為下面幾個引理。首先，讓我們先固定賦距空間 (M, d) 。我們把 M 中所有柯西序列 $U = (u_n)_{n \geq 1}$ 構成的集合記作 \mathcal{C} 。

引理 3.3.3 : 函數 $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 定義如下：對於 $U = (u_n)_{n \geq 1}$ 以及 $V = (v_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}$ ，令

$$\delta(U, V) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n).$$

則 δ 定義良好，具有對稱性，且滿足三角不等式。

證明：見習題 2.26 (1)。 □

引理 3.3.4 : 在 \mathcal{C} 上，我們能夠定義下面這個等價關係：

$$U \sim V \iff \delta(U, V) = 0.$$

接著，我們定義商空間 $\hat{M} := \mathcal{C} / \sim$ ，且對於每個元素 $U \in \mathcal{C}$ ，我們把他的等價類記作 $\hat{U} \in \hat{M}$ 。在 \hat{M} 上，我們可以藉由 δ 引導出距離 $\hat{\delta}$ ，使得他的定義並不取決於等價類中的代表，也就是說，對於 $U \sim V$ 還有 $S \sim W$ ，我們會有 $\delta(U, S) = \delta(V, W)$ ，所以對於 $U, S \in \mathcal{C}$ ，我們可以設 $\hat{\delta}(\hat{U}, \hat{S}) = \delta(U, S)$ 。這樣一來， $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 會是個賦距空間。

證明：如果要證明 \sim 是個等價關係，我們需要檢查他有自反性、對稱性，還有遞移性。自反性是顯然的，對稱性可以從引理 3.3.3 中的定義得到，而遞移性也在習題 2.26 (2) 中檢查過了。

要檢查 $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 是個賦距空間，我們需要檢查 $\hat{\delta}$ 的定義不取決於我們在等價類中所選擇的元素。這個在習題 2.26 (3) 中檢查過了。因此，根據等價關係，距離 $\hat{\delta}$ 是正定的，再根據引理 3.3.3，我們得知他也是對稱的，且滿足三角不等式。 □

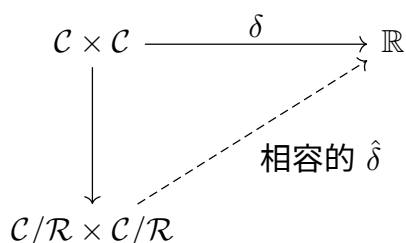


圖 3.2: 此圖詮釋如何把定義在 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 上的函數 δ (不是距離) 變成在 \mathcal{C}/\mathcal{R} 上的距離 $\hat{\delta}$ ，使得他的定義不取決於每個等價類中的代表元素。

命題 3.3.5 : 我們把 $i : M \rightarrow \hat{M}$ 定義如下。對於任意 $x \in M$ ，令 $i(x)X$ ，其中 $X = (x)_{n \geq 1}$ 為常數序列。那麼 i 會是個等距單射，且 $i(M)$ 在 \hat{M} 中是稠密的。

證明： 給定 $u, v \in M$ ，我們有

$$\hat{\delta}(i(u), i(v)) = \delta((u)_{n \geq 1}, (v)_{n \geq 1}) = d(u, v).$$

因此， i 是個等距變換，所以也是單射的。

接著，我們來證明 $i(M)$ 在 \hat{M} 中是稠密的。令 $\hat{U} \in \hat{M}$ ，其中 $\hat{U} = (u_n)_{n \geq 1}$ 。我們想要證明 \hat{U} 會是 $(i(u_n))_{n \geq 1}$ 的極限來總結。令 $\varepsilon > 0$ 。由於 $U = (u_n)_{n \geq 1}$ 是個柯西序列，我們能夠找到 $N \geq 1$ 使得

$$d(u_m, u_n) < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N.$$

對固定的 $m \geq N$ 來說，我們有

$$\hat{\delta}(\hat{U}, i(u_m)) = \delta(U, (u_m)_{n \geq 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) \leq \varepsilon.$$

因此，我們得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i(u_m) = \hat{U}.$$

這代表著，任何 \hat{M} 中的點都可以寫為像 $i(M)$ 當中點的序列極限，所以 $i(M)$ 在 \hat{M} 中是稠密的。 \square

命題 3.3.6： 賦距空間 $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 是完備的。

證明： 令 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 為 \hat{M} 中的柯西序列。由於 $i(M)$ 在 \hat{M} 中是稠密的，對於所有 $n \geq 1$ ，我們能找到 $x_n \in M$ 使得 $\hat{\delta}(\alpha_n, i(x_n)) < \frac{1}{n}$ 。那麼，對於任意 $m, n \geq 1$ ，我們有

$$d(x_m, x_n) = \hat{\delta}(i(x_m), i(x_n)) \leq \hat{\delta}(i(x_m), \alpha_m) + \hat{\delta}(\alpha_m, \alpha_n) + \hat{\delta}(\alpha_n, i(x_n)) \leq \hat{\delta}(\alpha_m, \alpha_n) + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

也就是說， $(x_n)_{n \geq 1}$ 是個 (M 中的) 柯西序列。

令 $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}$ 且 α 為在等價關係 \sim 之下的等價類。我們想要證明 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ 會收斂到 α 。令 $\varepsilon > 0$ 。我們能找到 $N \geq 1$ 使得

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

那麼，對於所有 $n \geq N$ ，我們有

$$\hat{\delta}(\alpha_n, \alpha) \leq \hat{\delta}(\alpha_n, i(x_n)) + \hat{\delta}(i(x_n), \alpha) \leq \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

在上式中，我們用到

$$\hat{\delta}(i(x_n), \alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

因此，如果我們取 \limsup ，會得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{\delta}(\alpha_n, \alpha) \leq \varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得到 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{\delta}(\alpha_n, \alpha) = 0$ ，換句話說，我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\delta}(\alpha_n, \alpha) = 0$ 。□

命題 3.3.7：完備化空間 $(\hat{M}, \hat{\delta})$ 在定理 3.3.1 的意義下是唯一的。

證明：令 $(\hat{M}_1, \hat{\delta}_1)$ 以及 $(\hat{M}_2, \hat{\delta}_2)$ 為 (M, d) 的兩個完備化，還有 i_1 以及 i_2 為相對應的等距單射函數，這些記號的意義與定理 3.3.1 中相同。

對於所有 $x \in M$ ，我們定義 $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ ，這讓我們能夠把 φ 定義在像 $i_1(M)$ 之上。我們不難檢查 $\varphi|_{i_1(M)}$ 是個等距變換：

$$\forall x, y \in M, \quad \hat{\delta}_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) = \hat{\delta}_2(i_2(x), i_2(y)) = d(x, y) = \hat{\delta}_1(i_1(x), i_1(y)).$$

因此， φ 在 $i_1(M)$ 上是均勻連續的。由於 $i_1(M) \subseteq \hat{M}_1$ 是稠密的子集合，還有 \hat{M}_2 是完備的，從習題 3.23 我們可以得知，存在一個唯一 φ 在 \hat{M}_1 上的均勻連續延伸，我們這裡濫用記號，並把他繼續記作 φ 。此外，由於 φ 是個在 $i_1(M)$ 上的等距變換，還有 $i_1(M)$ 在 \hat{M}_1 中是稠密的， φ 的連續性能夠告訴我們 φ 是個在 \hat{M}_1 上的等距變換。等距變換也讓我們推得 φ 是個單射函數。

要證明 φ 是個滿射函數，我們給定 $y \in \hat{M}_2$ 並需要去找到他在 φ 之下的像原。我們使用 $i_2(M)$ 在 \hat{M}_2 中的稠密性來找出序列 $(y_n = i_2(x_n))_{n \geq 1}$ ，其中 $x_n \in M$ 對於 $n \geq 1$ ，且會滿足 $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$ 。對於任意 $p, q \geq 1$ ，我們有

$$\hat{\delta}_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = d(x_p, x_q) = \hat{\delta}_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) = \hat{\delta}_2(y_p, y_q),$$

我們可以看出來，序列 $(i_1(x_n))_{n \geq 1}$ 在 \hat{M}_1 中是柯西的。由於 \hat{M}_1 是完備的，此序列會收斂到一個極限 $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} i_1(x_n)$ 。接著，使用 φ 的連續性，我們得到

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} i_2(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

這告訴我們 φ 是個滿射函數。□

第二小節 賦範空間的完備化

第三章 緊緻空間及完備空間

再來，我們討論在賦範空間這個特殊情況之下，如何來構造完備化空間。我們先注意到，有限維度的賦範向量空間永遠都是完備的，所以只有當我們的賦範向量空間是無窮維度時，這樣的討論才是有意義的。我們可以考慮的空間有：數列空間 $\ell^p(\mathbb{K})$ 對於 $p = 1, 2, \infty$ ，或是函數空間，例如 $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ 或 $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{K})$ 。構造不算複雜，但需要用到泛函分析中的一個定理，我們這裡會忽略他的證明。

令 $(V, \|\cdot\|)$ 為在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 上的賦範向量空間。我們把 V 的對偶空間記作 $V^* = \mathcal{L}_c(V, \mathbb{K})$ ，這是由 V 上的連續線性泛函所構成的空間，並賦予算子範數：

$$\forall f \in V^*, \quad \|f\|_{V^*} := \sup\{|f(x)| : x \in V, \|x\| \leq 1\}.$$

我們也考慮雙對偶空間 $V^{**} := (V^*)^* = \mathcal{L}_c(V^*, \mathbb{K})$ ，同樣地賦予他算子範數：

$$\forall \Phi \in V^{**}, \quad \|\Phi\|_{V^{**}} := \sup\{|\Phi(f)| : f \in V^*, \|f\|_{V^*} \leq 1\}.$$

從定理 3.2.18，我們得知 $(V^*, \|\cdot\|_{V^*})$ 以及 $(V^{**}, \|\cdot\|_{V^{**}})$ 皆是 Banach 空間。

接著，我們考慮定義如下的映射 $J : V \rightarrow V^{**}$ ：

$$J(x)(f) := f(x), \quad \forall x \in V, \forall f \in V^*.$$

我們先檢查 J 是定義良好的，也就是說，對於所有 $x \in V$ ，我們需要檢查 $J(x) \in V^{**}$ 。令 $f, g \in V^*$ 以及 $\lambda \in \mathbb{K}$ 。我們的確會有

$$J(x)(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = J(x)(f) + \lambda J(x)(g).$$

再來，我們檢查 J 是個線性映射。令 $\lambda \in \mathbb{K}$ 還有 $x, y \in V$ 。對於任意 $f \in V^*$ ，我們有

$$J(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = J(x)(f) + \lambda J(y)(f),$$

也就是說

$$J(x + \lambda y) = J(x) + \lambda J(y).$$

對於所有 $x \in V$ ，我們有

$$\begin{aligned} \|J(x)\|_{V^{**}} &= \sup\{|J(x)(f)| : f \in V^*, \|f\|_{V^*} \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| : f \in V^*, \|f\|_{V^*} \leq 1\} \leq \|x\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

泛函分析中的有個定理，叫做 Hahn-Banach 定理，告訴我們對於任意 $x \in V$ ，我們可以找到線性泛函 $f_x \in V^*$ 使得 $f_x(x) = \|x\|$ 還有 $\|f_x\|_{V^*} \leq 1$ 。這告訴我們

$$\begin{aligned} \|J(x)\|_{V^{**}} &= \sup\{|J(x)(f)| : f \in V^*, \|f\|_{V^*} \leq 1\} \\ &\geq J(x)(f_x) = f_x(x) = \|x\|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

上面的式 (3.9) 還有式 (3.10) 讓我們得出 $\|J(x)\|_{V^{**}} = \|x\|$ ，也就是說， J 是個等距變換。

現在，我們取 V^{**} 的線性子空間 $\hat{V} := \overline{J(V)} \subseteq V^{**}$ 來總結。顯然地， $J(V)$ 在 $\overline{J(V)}$ 中是稠密的。此外，由於 V^{**} 是個完備賦範向量空間，根據命題 3.2.1，他的閉子集 $\overline{J(V)}$ 也會是完備的。因此，我們可以總結 $(\hat{V}, \|\cdot\|_{V^{**}})$ 是賦範向量空間 $(V, \|\cdot\|)$ 的完備化。