Riemann-Stieltjes 積分理論

第五章

這個章節最重要的目標是構造 Riemann–Stieltjes 積分，這會是 Riemann 積分的推廣。如果你已經看過 Riemann 積分的構造了，你會發現大部分的步驟還有性質都非常類似，只有一些細節是不同、需要注意的。如果你不知道 Riemann 積分的構造，你可以把他看作是 Riemann–Stieltjes 積分的特例，而且在這個大框架下的構造並不會比簡化後的 Riemann 積分來得複雜。

第一節　有界變差的函數

在這個章節中，對於 $a < b$，我們會定義在線段 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 上的有界變差函數。在第 5.1.2 小節中，我們會介紹分割的概念，讓我們能夠定義什麼是函數的總變差。在結束這個章節前，定理 5.1.17 會給我們一個重要且很有用的方式，來刻劃有界變差函數。

第一小節　單調函數的回顧

定義 5.1.1： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，且 $f : I \to \mathbb{R}$ 為函數。

(1) 如果對於所有 $x, y \in I$ 滿足 $x \leqslant y$，我們有 $f(x) \geqslant f(y)$，則我們說 f 是個非遞增 (non-increasing) 或遞減 (decreasing) 函數；

(2) 如果對於所有 $x, y \in I$ 滿足 $x \leqslant y$，我們有 $f(x) \leqslant f(y)$，則我們說 f 是個非遞減 (non-decreasing) 或遞增 (increasing) 函數；

(3) 如果 f 滿足上述其中一個條件，則我們說 f 是個單調 (monotonic) 函數。

定義 5.1.2 ： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，$f : I \to \mathbb{R}$ 為單調函數，以及 $x \in I$。我們以下列方式定義 f 在 x 的左極限 (left limit) 與右極限 (right limit) 。

$$f(x-) := \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y), \quad \text{以及} \quad f(x+) := \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y).$$

如果對於所有 $\varepsilon > 0$，交集 $(x - \varepsilon, x) \cap I$ 非空，那麼左極限 $f(x-)$ 是定義良好的。同理，如果對於所有 $\varepsilon > 0$，交集 $(x, x + \varepsilon) \cap I$ 非空，那麼右極限 $f(x+)$ 是定義良好的。

命題 5.1.3 ： 令 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 為單調函數。那麼，由他不連續點構成的集合 D 是可數的。

證明：我們已經在習題 1.15 中證明過這件事情，這裡我們給簡單的證明回顧。不管 f 在 a 與 b 是否連續，這並不影響 D 的可數性，因此我們只需要關注 f 在 (a, b) 上的不連續點即可。因此，我們定義

$$D = \{x \in (a, b) : f(x-) \neq f(x+)\}.$$

不失一般性，我們可以假設 f 是非遞減的。對於每個固定的 $x \in D$，我們有 $f(x-) < f(x+)$，再根據 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的性質，我們能找到 $q_x \in \mathbb{Q} \cap (f(x-), f(x+))$。這樣一來，映射 $D \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto q_x$ 是單射的，所以 D 是可數的。（系理 1.4.9 ） □

第二小節 分割與有界變差函數

在下面，我們考慮 $a < b$ 以及定義在線段 $[a, b]$ 上的實函數。

定義 5.1.4 ： 令 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 為線段。

- 給定有限序列 $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$，若他滿足 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，則我們稱他為線段 $[a, b]$ 的分割 (partition or subdivision) 。
- 給定分割 $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$，我們把他的長度記作 n，$x_0, \ldots, x_n$ 為 P 的分割點，並把 P 的

<u>支集</u> (support) 記作 $\operatorname{Supp}(P)=\{x_k:0\leqslant k\leqslant n\}$。

- 給定包含 a 與 b 的有限子集合 $A\subseteq[a,b]$，存在唯一的分割 P 使得 $\operatorname{Supp}(P)=A$。我們把他稱作<u>對應到 A 的分割</u>。
- 對於 $1\leqslant k\leqslant n$，線段 $[x_{k-1},x_k]$ 稱作 P 的第 k 個<u>子區間</u>，並且記 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$。
- 分割 P 的<u>網格大小</u> (mesh size) 定義做 $\|P\|:=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})$。
- 給定兩個 $[a,b]$ 的分割 P 及 P'，如果 $\operatorname{Supp}(P)\subseteq\operatorname{Supp}(P')$，則我們說分割 P' 比分割 P 要來得<u>細緻</u>，記作 $P\subseteq P'$ 或 $P'\supseteq P$。這也蘊含 $\|P'\|\leqslant\|P\|$。
- 給定兩個 $[a,b]$ 的分割 P_1 及 P_2，他們的<u>聯集分割</u> (joint partition) 或<u>最小共同分割</u> (smallest common refinement) 記作 $P:=P_1\vee P_2$，這是會對應到支集 $\operatorname{Supp}(P_1)\cup\operatorname{Supp}(P_2)$ 的分割。我們注意到 P 比 P_1 和 P_2 都來得細緻。
- 我們把 $\mathcal{P}([a,b])$ 記為由所有 $[a,b]$ 分割所構成的集合。

註解 5.1.5 ： 如果 $P=(x_0,\ldots,x_n)$ 是 $[a,b]$ 的分割，我們有 $b-a=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$。

定義 5.1.6 ： 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為在 $[a,b]$ 上的函數。如果 $P=(x_0,\ldots,x_n)$ 是 $[a,b]$ 的分割，對於所有 $1\leqslant k\leqslant n$，我們記 $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ 並定義

$$V_P(f):=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|.$$

如果

$$V_f=V_f([a,b]):=\sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])}V_P(f)<\infty,$$

則我們說 f 是個在 $[a,b]$ 上<u>有界變差</u> (bounded variation) 的函數。上面所定義出來的 $V_f([a,b])$ 稱作 f 在 $[a,b]$ 上的<u>總變差</u> (total variation) 。我們把由所有在 $[a,b]$ 上有界變差的函數構成的集合記作 $\mathcal{BV}([a,b],\mathbb{R})$ 或 $\mathcal{BV}([a,b])$。

範例 5.1.7 ： 考慮定義如下的函數 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$：

$$f(x)=\begin{cases} x\cos(\frac{\pi}{x}) & \text{若 } x\in(0,2\pi], \\ 0 & \text{若 } x=0. \end{cases}$$

對於整數 $n\geqslant 1$，令 P 為對應到下列有限集合的分割：

$$\Big\{0,\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1},\dots,\frac{1}{2},1\Big\}.$$

換句話說，我們有 $x_0=0$ 以及 $x_k=\frac{1}{2n+1-k}$ 對於所有 $1\leqslant k\leqslant 2n$。那麼，我們得到

$$\begin{aligned} V_P(f)=\sum_{k=1}^{2n}|\Delta f_k| &= \Big|\frac{(-1)^{2n}}{2n}-0\Big|+\sum_{k=2}^{2n}\Big|\frac{(-1)^{k-1}}{2n+1-k}-\frac{(-1)^k}{2n+2-k}\Big| \\ &= \frac{1}{2n}+\sum_{k=2}^{2n}\Big(\frac{1}{2n+1-k}+\frac{1}{2n+2-k}\Big) \\ &= 1+\sum_{k=2}^{2n-1}\frac{2}{k}+\frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

由於上式中我們得到調和級數，我們知道他的和不是有界的。這讓我們可以總結函數 f 並不是有界變差函數。

命題 5.1.8 ： 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為在 $[a,b]$ 上的有界變差函數。下列性質成立。

(1) 對於任意分割 $P\subseteq P'$，我們有 $V_P(f)\leqslant V_{P'}(f)$。

(2) 對於任意 $\varepsilon>0$，存在分割 $P_\varepsilon\in\mathcal{P}([a,b])$ 使得對於任意更細緻的分割 $P\supseteq P_\varepsilon$，我們有

$$V_P(f)\leqslant V_f\leqslant V_P(f)+\varepsilon.$$

證明：

(1) 令 $P=(x_0,\dots,x_n)\in\mathcal{P}([a,b])$ 為 $[a,b]$ 的分割。透過數學歸納法，我們只需要在 P' 比 P 的支集多一個分割點的情況下，證明這個不等式即可。讓我們考慮 P' 是對應到

$\mathrm{Supp}(P) \cup \{c\}$ 的分割，其中對於某個 $1 \leqslant i \leqslant n$，我們有 $c \in (x_{i-1}, x_i)$。我們有

$$\begin{aligned} V_{P'}(f) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(c)| \\ &\geqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \big|\big(f(c) - f(x_{i-1})\big) + \big(f(x_i) - f(c)\big)\big| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = V_P(f). \end{aligned}$$

(2) 令 $\varepsilon > 0$。根據最小上界的刻劃，我們能找到分割 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得

$$V_f \leqslant V_{P_\varepsilon}(f) + \varepsilon.$$

那麼，對於任意分割 $P \supseteq P_\varepsilon$，我們可以從 (1) 得到：

$$V_f \leqslant V_{P_\varepsilon}(f) + \varepsilon \leqslant V_P(f) + \varepsilon.$$ □

第三小節 有界變差函數的範例

接著我們會討論能夠讓定義在 $[a,b]$ 上的函數 f 為有界變差的條件。

命題 5.1.9 ： 如果 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是單調的，那麼 $f \in \mathcal{BV}([a,b])$ 且 $V_f = |f(b) - f(a)|$。

證明： 不失一般性，把 f 替換為 $-f$，我們能假設 f 是非遞減的。對於任意給定的分割 $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}([a,b])$，我們有

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} \big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big] = f(b) - f(a).$$ □

命題 5.1.10 ： 如果 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可微，且微分有界，那麼 $f \in \mathcal{BV}([a,b])$。

證明： 令 $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}([a,b])$ 為 $[a,b]$ 的分割。對於 $1 \leqslant k \leqslant n$，我們可以對 P 第 k 個子區間使用均值定理（第 4.1.2 小節），並且得到

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{其中 } t_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

這蘊含

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f'(t_k)| \Delta x_k \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \cdot (b-a).$$

□

命題 5.1.11 ： 如果 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是個有界變差函數，那麼他也是有界的。換句話說，我們有包含關係 $\mathcal{BV}([a,b]) \subseteq \mathcal{B}([a,b])$。

證明： 令 $M = V_f([a,b])$。對於給定的 $x \in (a,b)$，我們可以考慮下面這個分割 $P = (a,x,b)$。我們有

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant M,$$

這讓我們得到 $|f(x)| - |f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant M$，也就是說 $|f(x)| \leqslant M + |f(a)|$。 □

第四小節 性質

命題 5.1.12 ： 令 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界變差函數。那麼函數 $f+g, f-g$ 以及 fg 也都會是有界變差函數。

證明： 對於任意分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$，透過三角不等式，我們有

$$V_P(f \pm g) \leqslant V_P(f) + V_P(g).$$

因此，$f \pm g$ 的總變差會滿足

$$\begin{aligned} V_{f\pm g} &= \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} V_P(f\pm g) \leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} [V_P(f)+V_P(g)] \\ &\leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} V_P(f) + \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} V_P(g) = V_f + V_g. \end{aligned}$$

再來考慮積函數 $h := fg$。我們給定分割 $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}([a,b])$。對於 $1 \leqslant k \leqslant n$，我們有

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &\leqslant |f(x_k) - f(x_{k-1})||g(x_k)| + |g(x_k) - g(x_{k-1})||f(x_{k-1})| \\ &\leqslant |\Delta f_k| \cdot \sup|g| + |\Delta g_k| \cdot \sup|f|. \end{aligned}$$

把上面不等式對 k 取和，我們得到

$$V_P(h) \leqslant V_P(f) \cdot \sup|g| + V_P(g) \cdot \sup|f|.$$

因此，總變差 $V_h = V_{fg}$ 滿足

$$V_{fg} \leqslant V_f \cdot \sup|g| + V_g \cdot \sup|f|.$$ □

命題 5.1.13： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界變差函數，且存在常數 $m > 0$ 使得 $|f| \geqslant m$。那麼 $g = \frac{1}{f}$ 也是個有界變差函數。

證明：對於任意分割 $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}([a,b])$，我們有

$$|\Delta g_k| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| \leqslant \frac{|\Delta f_k|}{m^2}.$$

這能讓我們得到

$$V_g \leqslant \frac{V_f}{m^2}.$$ □

命題 5.1.14 ： 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為有界變差函數，且 $c\in(a,b)$。那麼 f 在 $[a,c]$ 上還有 $[c,b]$ 上也是有界變差函數，且我們有

$$V_f([a,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,b]).$$

證明：首先，我們證明 $V_f([a,c])$ 和 $V_f([c,b])$ 都是定義良好的，也就是說 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都是有界變差的。令 $P_1=(x_0,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}([a,c])$ 及 $P_2=(y_0,\ldots,y_m)\in\mathcal{P}([c,b])$ 為分割。那麼 $P=P_1\vee P_2=(x_0,\ldots,x_n=y_0,y_1,\ldots,y_m)$ 會是 $[a,b]$ 的分割。這告訴我們

$$V_{P_1}(f)+V_{P_2}(f)=V_P(f)\leqslant V_f([a,b]). \tag{5.1}$$

從上式我們可以推得 $f\in\mathcal{BV}([a,c])$ 還有 $f\in\mathcal{BV}([c,b])$。

接著，在式 (5.1) 中，藉由對 $P_1\in\mathcal{P}([a,c])$ 還有 $P_2\in\mathcal{P}([c,b])$ 取最小上界，我們得到

$$V_f([a,c])+V_f([c,b])\leqslant V_f([a,b]).$$

再來證明反過來的不等式。我們給定分割 $P=(x_0,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}([a,b])$。我們想要從 P 構造另一個分割 $P'\in\mathcal{P}([a,b])$ 使得 c 會是 P' 的一個分割點。如果 $c\in P$，我們取 $P'=P$；不然，會存在唯一的 m 使得 $c\in(x_{m-1},x_m)$，接著我們以下列方式定義 $P'=(y_0,\ldots,y_{n+1})$：

$$y_k=\begin{cases} x_k & \text{若 } k\leqslant m-1,\\ c & \text{若 } k=m,\\ x_{k-1} & \text{若 } k\geqslant m+1.\end{cases}$$

這樣一來，我們可以把 P' 分成兩個分割 $P_1=(x_0,\ldots,x_{m-1},c)\in\mathcal{P}([a,c])$ 和 $P_2=(c,x_m,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}([c,b])$。我們也注意到，我們有 $|f(x_m)-f(x_{m-1})|\leqslant|f(x_m)-f(c)|+|f(c)-f(x_{m-1})|$，所以

$$V_P(f)\leqslant V_{P'}(f)=V_{P_1}(f)+V_{P_2}(f)\leqslant V_f([a,c])+V_f([c,b]).$$

對 $P \in \mathcal{P}([a,b])$ 取最小上界，我們得到

$$V_f([a,b]) \leqslant V_f([a,c]) + V_f([c,b]). \qquad \square$$

定義 5.1.15 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界變差函數。我們定義他的<u>變差函數</u> $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$V(x) = \begin{cases} V_f([a,x]) & \text{若 } x \in (a,b], \\ 0 & \text{若 } x = a. \end{cases} \tag{5.2}$$

引理 5.1.16 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界變差函數，且 V 是他的變差函數，如同定義於式 (5.2) 中。那麼 V 和 $V - f$ 兩者都是 $[a,b]$ 上的非遞減函數。

證明：對於 $x > a$，我們顯然有 $V(x) \geqslant 0 = V(a)$。對於 x, y 滿足 $b \geqslant y > x > a$，我們有

$$V(y) - V(x) = V_f([a,y]) - V_f([a,x]) = V_f([x,y]) \geqslant 0.$$

所以我們總結 V 在 $[a,b]$ 上是非遞減的。

令 $D := V - f$。對於 x, y 滿足 $b \geqslant y > x \geqslant a$，我們有

$$D(y) - D(x) = V_f([x,y]) - [f(y) - f(x)].$$

考慮 $P = (x,y) \in \mathcal{P}[x,y]$，我們會有 $|f(y) - f(x)| \leqslant V_f([x,y])$。因此 $D(y) - D(x) \geqslant 0$。 $\square$

下面這個分解定理給我們刻劃有界變差函數的方式。

定理 5.1.17 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為函數。則下面兩個性質等價。

(a) f 是有界變差函數。

(b) 存在兩個非遞減函數 g_1 和 g_2 使得 $f = g_1 - g_2$。

證明：

- (b) $\Rightarrow$ (a). 從命題 5.1.9 我們得知單調函數是有界變差函數，再從命題 5.1.12 我們得知，他們的差也會是有界變差函數。

- (a) $\Rightarrow$ (b). 我們使用式 (5.2) 當中所定義的變差函數 V。我們知道 V 和 $V-f$ 都是非遞減的，所以等式 $f = V-(V-f)$ 可以讓我們得到結論。 □

註解 5.1.18 ： 我們注意到在定理 5.1.17 中，(b) 的敘述並沒有唯一性。如果 g_1 和 g_2 都是非遞減函數滿足 $f = g_1 - g_2$，那麼對任意非遞減函數 h，我們也會有分解式 $f = (g_1+h)-(g_2+h)$。

命題 5.1.19 ： 令 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 為在 $[a, b]$ 上的有界變差函數。對於 $x \in [a, b]$，函數 f 在 x 連續，若且唯若 V 在 x 連續。

證明：根據定義 5.1.2 ，我們知道對於任何單調函數 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 來說，他在每個 $x \in (a, b]$ 的左極限 $g(x-)$ 存在；同理，他在每個 $x \in [a, b)$ 的右極限 $g(x+)$ 也存在。此外，定理 5.1.17 告訴我們，對於 $x \in (a, b]$，$f(x-)$ 與 $V(x-)$ 皆定義良好；對於 $x \in [a, b)$，$f(x+)$ 與 $V(x+)$ 皆定義良好。

- 令 $x \in [a, b)$ 並假設 V 在 x 右連續。我們想要證明 f 在 x 也是右連續的。對於任意 $y \in (x, b]$，我們有

$$0 \leqslant |f(y) - f(x)| \leqslant V_f([x, y]) = V(y) - V(x),$$

其中最後一個等式來自命題 5.1.14 。取 $y \to x+$，我們得到

$$0 \leqslant |f(x+) - f(x)| \leqslant V(x+) - V(x),$$

所以 V 在 x 的右連續性會蘊含 f 在相同點的右連續性。當 $x \in (a, b]$ 時，相似的證明可以讓我們處理左連續性。

- 令 $x \in [a,b)$ 並假設 f 在 x 右連續。給定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$ 使得

$$\forall y \in [x, x+\delta), \quad |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{5.3}$$

此外，從命題 5.1.8 ，我們能夠找到分割 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([x,b])$ 使得

$$V_f([x,b]) \leqslant V_P(f) + \varepsilon, \tag{5.4}$$

對於任意分割 $P \supseteq P_\varepsilon$。我們能取分割 $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \supseteq P_\varepsilon$ 滿足 $x_1 \in [x, x+\delta)$，所以式 (5.3) 會成立。這代表著 $|\Delta f_1| \leqslant \varepsilon$。接著，我們可以把式 (5.4) 改寫為

$$V_f([x,b]) \leqslant V_P(f) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} |\Delta f_k| \leqslant 2\varepsilon + V_f([x_1, b]),$$

其中最後一個等式成立是因為 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是個 $[x_1, b]$ 的分割。因此，我們得到

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant V(x_1) - V(x) = V_f([a,x_1]) - V_f([a,x]) = V_f([x,x_1]) \\ &= V_f([x,b]) - V_f([x_1,b]) \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

這證明了

$$\forall y \in [x, x+\delta), \quad 0 \leqslant V(y) - V(x) \leqslant 2\varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們總結 $V(x+) = V(x)$，換句話說，V 在 x 是右連續的。對於左連續性來說，證明也是非常類似的，我們這裡省略。

□

定理 5.1.20 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為連續函數。那麼下面兩個性質是等價的。

(a) f 是有界變差函數。

(b) 存在兩個非遞減連續函數 g_1 和 g_2 使得 $f = g_1 - g_2$。

證明：這個定理是分解定理（定理 5.1.17 ）的直接應用，當中我們還需要使用到 f 和 V 有相同連續點的性質（命題 5.1.19 ）。 □

第二節 Riemann-Stieltjes 積分

在這個章節中，我們會討論 Riemann–Stieltjes 積分的理論。我們會推廣 Riemann 和的概念，使用 Riemann–Stieltjes 和來構造這樣的積分，見定義 5.2.1 。接著，在第 5.2.1 小節剩下的部份，我們會討論關於 Riemann–Stieltjes 積分有用的性質，當中不少是與 Riemann 積分類似的。在第 5.2.2 小節中，我們會考慮積分函數是個階躍函數的情況，這與離散和有關，見系理 5.2.21 和系理 5.2.23 。在第 5.3 節中，我們在 Riemann–Stieltjes 積分的框架中，定義 Darboux 和的概念，這可以讓我們有更好的方式來刻劃這些積分的存在性。這稱作 Riemann 條件，參見定義 5.3.8 和定理 5.3.10 。

第一小節 定義及性質

在下面，我們取 $a < b$ 並考慮在 $\mathbb{R}$ 中的線段 $[a, b]$。我們下面會考慮的函數 f, g, α, β 都會是定義在 $[a, b]$ 上，並且是有界變差的實數函數。換句話說，我們假設 $f, g, \alpha, \beta \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$。

定義 5.2.1 ： 令 $P = (x_0, \ldots, x_n)$ 為 $[a, b]$ 的分割。對於 $1 \leqslant k \leqslant n$，令 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 並記 $t = (t_1, \ldots, t_n)$，稱作<u>標記點</u>。我們把數對 (P, t) 稱作<u>標記分割</u>。我們定義下面這個和，稱作 f 對 α 的 <u>*Riemann–Stieltjes* 和</u>：

$$S_{P,t}(f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta\alpha_k. \tag{5.5}$$

如果下面的性質成立，則我們說 f 對 α 在 $[a, b]$ 上是 <u>*Riemann–Stieltjes* 可積</u>的，或簡稱<u>可積</u>：

(RS) 存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得對於每個 $\varepsilon > 0$，存在分割 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$ 使得對於所有 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 且 $P \supseteq P_\varepsilon$ 以及所有標記點 t，我們會有

$$|S_{P,t}(f, \alpha) - L| \leqslant \varepsilon.$$

如果 f 對 α 在 $[a,b]$ 上是 Riemann–Stieltjes 可積的，我們記作 $f \in R(\alpha;a,b)$；如果根據上下文，線段 $[a,b]$ 省略也不會造成混淆，我們也可以記作 $f \in R(\alpha)$。

註解 5.2.2：

(1) 如果 f 對 α 在 $[a,b]$ 上是 Riemann–Stieltjes 可積的，那麼在 (RS) 性質當中提到的 $L \in \mathbb{R}$ 會是唯一的。

(2) 我們可以把滿足 (RS) 的唯一 $L \in \mathbb{R}$ 記作

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x). \tag{5.6}$$

這稱作 Riemann–Stieltjes 積分。

(3) 函數 f 稱作<u>被積分函數</u> (integrand)，函數 α 稱作<u>積分函數</u> (integrator)。

(4) 如果 $\alpha(x) = x$，那麼在式 (5.6) 裡面的積分稱作 Riemann 積分。我們把 Riemann 可積函數所構成的集合記作 $R(x;a,b)$ 或 $R(x)$。

(5) 在定義 5.1.4 中，分割 $P = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ 需要滿足 $x_{k-1} < x_k$ 對於所有 $1 \leqslant k \leqslant n$。事實上，這個條件可以弱化成 $x_{k-1} \leqslant x_k$，因為即使存在 k 使得 $x_{k-1} = x_k$，他在式 (5.5) 中 Riemann–Stieltjes 和所對應到的項，並不會有任何貢獻。這允許我們在分割中有重複的點。在這樣的情況下，上面的概念可以推廣到當函數被定義在單點集合 $[a,a] = \{a\}$ 上的情況。

(6) 如果被積分項 $f : [a,b] \to V$ 取值在有限維度的向量空間 V 當中，考慮 V 的基底 $(e_1,\dots,e_d)$，我們可以把 f 重新表示做 $f = \sum_{i=1}^d f_i e_i$，其中 $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是取值實數的函數。這樣一來，我們可以針對每個座標做積分，來定義 f 對於 α 的 Riemann–Stieltjes 積分，也就是說，當每個 Riemann–Stieltjes 積分 $\int_a^b f_i \,\mathrm{d}\alpha$ 都是定義良好時，我們可以定義：

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha := \sum_{i=1}^d \Big(\int_a^b f_i \,\mathrm{d}\alpha\Big) e_i,$$

這也就是為什麼我們可以把這套理論直接推廣到 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 或是對於 $d \geqslant 1$ 的 $\mathbb{R}^d$ 之上。

範例 5.2.3 ：

(1) 如果 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是個常數函數，那麼對於任意有界函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$、任意分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$ 以及任意標記點 t，Riemann–Stieltjes 和永遠滿足 $S_{P,t}(f,\alpha) = 0$。因此，我們有 $f \in R(\alpha; a,b)$ 且 $\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha = 0$。

(2) 在大一的微積分中，我們知道在 Riemann 積分的情況，對於任意連續函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，我們會有 $f \in R(x)$。這也會是定理 5.3.21 的結果。

(3) 令 $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}$ 定義做 $\alpha(x) = \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$ 以及 $f = \alpha$。考慮分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$ 滿足 $x_k = 0 \in P$ 對於某個 $k \in \mathbb{N}$，考慮標記點 t，所對應到的 Riemann–Stieltjes 和寫作

$$S_{P,t}(f,\alpha) = f(t_k)\big[\alpha(0) - \alpha(x_{k-1})\big] = f(t_k),$$

其中 $x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k = 0$。這個和取決於標記點 t_k 的選擇：

$$f(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{若 } t_k = x_k = 0, \\ 0 & \text{其他情況,} \end{cases}$$

所以無法滿足 (RS)。

引理 5.2.4 ： 我們繼續使用定義 5.2.1 中的記號。我們考慮下列條件：

(RS') 存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得對於任意分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$ 滿足 $\|P\| < \delta$，以及任意選擇的標記點 t，我們會有

$$|S_{P,t}(f,\alpha) - L| \leqslant \varepsilon.$$

如果 f 滿足 (RS')，那麼 f 也會滿足 (RS)。

證明：選擇 f 和 α 使得 (RS') 成立。令 $\varepsilon > 0$，我們取 $\delta > 0$ 使得對於任意 $P \in \mathcal{P}([a,b])$，且 $\|P\| < \delta$ 以及任意標記點 t，(RS') 會成立。那麼，令 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ 為任意滿足 $\|P_\varepsilon\| < \delta$ 的分割。顯然地，這個 P_ε 的選擇能夠滿足 (RS) 條件，因為對於任意更細緻的分割 $P \supseteq P_\varepsilon$ 來說，他也會滿足 $\|P\| < \delta$。 □

註解 5.2.5 ： 我們注意到，引理 5.2.4 的逆命題一般來說是錯的。 我們考慮函數 $f, \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$，定義做：

$$\alpha(x) = \mathbb{1}_{x \geqslant \frac{1}{2}} \quad \text{以及} \quad f(x) = \mathbb{1}_{x > \frac{1}{2}}.$$

- (RS) 會成立，見習題 5.14 和定理 5.2.20 。
- (RS') 不會成立，我們可以這樣來檢查。對於任意給定的 $\delta \in (0,1)$，我們可以考慮分割 $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{P}([0,1])$，定義做：

  $$x_0 = 0, x_n = 1 \quad \text{以及} \quad x_{k-1} = \frac{1}{2}(1-\delta), x_k = \frac{1}{2}(1+\delta) \text{ 對於選定的 } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

  那麼，對於任意標記點 t，我們有

  $$S_{P,t}(f,\alpha) = f(t_k)\big[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big] = f(t_k) = \mathbb{1}_{t_k > \frac{1}{2}},$$

  而他的值會取決於 $t_k \in [x_{k-1}, \frac{1}{2}]$ 還是 $t_k \in (\frac{1}{2}, x_k]$。

註解 5.2.6 ： 在 Riemann 積分的情況，也就是當 $\alpha(x) = x$ 時，我們能夠證明 (RS) 蘊含 (RS')。這可以看作是定理 5.3.10 的直接結果之一，參見習題 5.29 。

命題 5.2.7 ： 令 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界函數，以及 $f, g \in R(\alpha)$。那麼對於任意常數 $c \in \mathbb{R}$，我們有 $f + cg \in R(\alpha)$ 以及

$$\int_a^b (f + cg)\, \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha + c \int_a^b g \,\mathrm{d}\alpha.$$

換句話說，$R(\alpha)$ 是個在 $\mathbb{R}$ 上的向量空間，而且積分算子 $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha$ 是個在 $R(\alpha)$ 上的線性泛函，所以是個 $\mathcal{L}(R(\alpha),\mathbb{R})$ 中的元素。

證明：令 $c \in \mathbb{R}$ 以及 $h = f + cg$。對於任意分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$ 以及標記點 t，我們有

$$
\begin{aligned}
S_{P,t}(h,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k + c\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta\alpha_k \\
&= S_{P,t}(f,\alpha) + c\,S_{P,t}(g,\alpha).
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon > 0$。由於 $f \in R(\alpha)$，我們能夠找到分割 $P'_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得對於任意分割 $P \supseteq P'_\varepsilon$ 以及標記點 t，我們有

$$\left| S_{P,t}(f,\alpha) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha \right| \leqslant \varepsilon.$$

相似地，我們能找到分割 $P''_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得對於任意分割 $P \supseteq P''_\varepsilon$ 以及標記點 t，我們有

$$\left| S_{P,t}(g,\alpha) - \int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha \right| \leqslant \varepsilon.$$

因此，我們可以取 $P_\varepsilon := P'_\varepsilon \vee P''_\varepsilon$ 來總結，因為對於任意 $P \supseteq P_\varepsilon$，從上面的不等式我們能推得

$$
\begin{aligned}
&\left| S_{P,t}(h,\alpha) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha - c\int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha \right| \\
&\leqslant \left| S_{P,t}(f,\alpha) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha \right| + |c| \left| S_{P,t}(g,\alpha) - \int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha \right| \\
&\leqslant (1+|c|)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

命題 5.2.8 ： 令 $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為兩個有界函數，且 $f \in R(\alpha) \cap R(\beta)$。那麼對於任意 $c \in \mathbb{R}$，我們有 $f \in R(\alpha + c\beta)$ 以及

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}(\alpha + c\beta) = \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha + c\int_a^b f\,\mathrm{d}\beta.$$

證明：你可以嘗試仿效命題 5.2.7 中證明的步驟。見習題 5.17 。 □

定義 5.2.9 ： 對於 $a<b$、任意有界函數 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ 以及 $f\in R(\alpha;a,b)$，我們定義

$$\int_b^a f\,\mathrm{d}\alpha=\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x):=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x), \tag{5.7}$$

並記 $R(\alpha;b,a)=R(\alpha;a,b)$。對於任意定義在 a 的函數 f，我們也定義 $\int_a^a f\,\mathrm{d}\alpha=0$。

命題 5.2.10 ： 令 $I\subseteq\mathbb{R}$ 為線段，以及 $a,b,c\in I$。令 $\alpha:I\to\mathbb{R}$ 為有界函數且 $f\in R(\alpha;a,b)\cap R(\alpha;b,c)$。那麼 $f\in R(\alpha;a,c)$，而且我們有

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha+\int_b^c f\,\mathrm{d}\alpha+\int_c^a f\,\mathrm{d}\alpha=0$$

證明：不失一般性，我們能假設 $a<b<c$。令 $\varepsilon>0$。由於 $f\in R(\alpha;a,b)$，我們能找到分割 $P_\varepsilon^{(1)}\in\mathcal{P}([a,b])$ 使得對於任意更細緻的分割 $P^{(1)}\supseteq P_\varepsilon^{(1)}$ 以及他的標記點 $t^{(1)}$，我們有

$$\left|S_{P^{(1)},t^{(1)}}(f,\alpha)-\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.8}$$

同理，我們也能找到分割 $P_\varepsilon^{(2)}\in\mathcal{P}([b,c])$ 使得對於任意更細緻的分割 $P^{(2)}\supseteq P_\varepsilon^{(2)}$ 以及他的標記點 $t^{(2)}$，我們有

$$\left|S_{P^{(2)},t^{(2)}}(f,\alpha)-\int_b^c f\,\mathrm{d}\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.9}$$

我們設 $P_\varepsilon:=P_\varepsilon^{(1)}\vee P_\varepsilon^{(2)}$。

令 $P\in\mathcal{P}([a,c])$ 為 $[a,c]$ 的分割，且比 P_ε 細緻，考慮 t 為他的標記點。令

$$P^{(1)}=P\cap[a,b]\quad\text{以及}\quad P^{(2)}=P\cap[b,c]$$

為相對應限制在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上的分割，所以我們有 $P^{(1)}\supseteq P_\varepsilon^{(1)}$ 以及 $P^{(2)}\supseteq P_\varepsilon^{(2)}$。我們也把

$t^{(1)}$ 和 $t^{(1)}$ 記為相對應的標記點。那麼，下列 Riemann–Stieltjes 和的關係是成立：

$$S_{P,t}(f,\alpha) = S_{P^{(1)},t^{(1)}}(f,\alpha) + S_{P^{(2)},t^{(2)}}(f,\alpha). \tag{5.10}$$

從式 (5.8)、式 (5.9)、式 (5.10) 以及三角不等式，我們得到

$$\left| S_{P,t}(f,\alpha) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha - \int_b^c f \,\mathrm{d}\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

這告訴我們 $f \in R(\alpha; a, c)$，而且

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha + \int_b^c f \,\mathrm{d}\alpha = \int_a^c f \,\mathrm{d}\alpha$$

□

最後，我們使用式 (5.7) 當中的記號來總結。