第六章 數列與級數

在大一微積分中，我們討論了取值在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 當中的序列與級數，我們也看到不同的方式，來描述他們的收斂。在這學年的第一學期，我們討論了在更一般空間中，像是賦距空間中，序列的收斂。但如果我們想要討論級數，由於我們需要使用的加法運算，如果要對更一般的情況做討論，我們需要限制在賦範向量空間中。在這一章中，序列和級數都會被假設取值在賦範向量空間 $(W, \|\cdot\|_W)$ 當中。

第一節 基本概念

第一小節 實數序列的回顧

定義 6.1.1 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為實數序列。

- 如果對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \quad |a_n - \ell| < \varepsilon,$$

  則我們說序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至 $\ell \in \mathbb{R}$，記作 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$。

- 【Cauchy 條件】上面的定義也與下面等價：對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall m, n \geqslant N, \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

命題 6.1.2 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為實數序列。

(1) 如果 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 非遞減且有上界 $M < \infty$，那麼 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至極限 $\ell \leqslant M$。

(2) 如果 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 非遞增且有下界 $M > -\infty$，那麼 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂至極限 $\ell \geqslant M$。

定義 6.1.3 ： 給定兩個實數序列 $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $b=(b_n)_{n\geqslant 1}$。如果他們其中之一是遞增的，另一個是遞減的，而且 $a_n-b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，則我們說他們是<u>相伴序列</u> (adjacent sequences) 。

命題 6.1.4 ： 如果兩個序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(b_n)_{n\geqslant 1}$ 是相伴的，則他們會收斂到相同的極限。

定義 6.1.5 ： 給定兩個實數序列 $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $b=(b_n)_{n\geqslant 1}$，我們定義下面幾個漸進關係。

(1) 如果存在有界序列 $c=(c_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_n=c_nb_n$ 對於所有 $n\geqslant N$，則我們說 a 會被 b <u>控制</u>，記作 $a_n=\mathcal{O}(b_n)$。

(2) 如果存在序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到 0 以及 $N\in\mathbb{N}$ 滿足 $a_n=\varepsilon_nb_n$ 對於所有 $n\geqslant N$，則我們說 a 相對於 b 是<u>可忽略</u>的，記作 $a_n=o(b_n)$。

(3) 如果存在序列 $c=(c_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂到 1 以及 $N\in\mathbb{N}$ 滿足 $a_n=c_nb_n$ 對於所有 $n\geqslant N$，則我們說 a 與 b 是<u>等價</u>的，記作 $a_n\sim b_n$。

註解 6.1.6 ：

(1) 當我們寫下上面 a 與 b 之間的關係時，我們可以增加條件 $n\to\infty$ 來強調我們的漸進式是在 n 趨近於無窮時的（而不是趨近於其他數），或是當我們有多個變數，可能會導致混淆，也可以這樣強調。

(2) 我們可以檢查二元關係 $\sim$ 的確是個在實數序列空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的等價關係。然而，漸進記號 $\mathcal{O}$ 和 o 並不滿足對稱性。

範例 6.1.7 ：

(1) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 與 $(b_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下

$$\forall n\geqslant 1,\quad a_n=\frac{1}{n}\quad \text{以及}\quad b_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

那麼 $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ 且 $a_n \sim b_n$。

(2) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1} = (0, 1, 1, \dots)$ 與 $(b_n)_{n\geqslant 1} = (1, 1, 1, \dots)$。那麼 $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ 且 $a_n \sim b_n$。

(3) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 與 $(b_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = n^2 \quad \text{以及} \quad b_n = 2^n.$$

那麼 $a_n = o(b_n)$ 且 $a_n = \mathcal{O}(b_n)$。

第二小節 定義

令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在賦範向量空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的序列。

定義 6.1.8：

- 一般項為 u_n 的級數 (series)，是由下列序列 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 所給定的：

$$S_0 = 0, \quad S_n = u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \forall n \geqslant 1.$$

  我們也可以把這個級數記作 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 或 $\sum u_n$。

- 對於每個 $n \geqslant 1$，我們把 u_n 稱作級數 $\sum u_n$ 的第 n 項，把 S_n 稱作級數 $\sum u_n$ 的第 n 個部份和。

- 如果序列 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 在 $(W, \|\cdot\|)$ 中收斂，那麼我們說級數 $\sum u_n$ 收斂。在這個情況下，他的極限稱作級數的和，記作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$；對於每個 $n \geqslant 1$，我們把他第 n 項餘項 R_n 定義為

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

註解 6.1.9 ： 我們注意到，根據定義，序列 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 的收斂與級數 $\sum(S_{n+1}-S_n)$ 的收斂等價，因為他們可以用下列關係式把他們連結在一起：

$$\sum_{n=0}^{N-1}(S_{n+1}-S_n)=S_N-S_0=S_N.$$

這樣的和稱作裂項和。

命題 6.1.10 ： 我們有下列兩個性質。

(1) 如果級數 $\sum u_n$ 收斂，那麼 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是個柯西序列。

(2) 此外，如果 $(W,\|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間，那麼級數 $\sum u_n$ 收斂若且唯若 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是個柯西序列。

證明：這個命題可以直接藉由定義所得到。

(1) 級數 $\sum u_n$ 收斂代表序列 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂。從命題 2.4.6 我們知道收斂序列是個柯西序列。

(2) 我們只需要證明逆命題即可。假設 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是個柯西序列，由於他取值在 Banach 空間中，他會收斂，所以級數 $\sum u_n$ 收斂。 $\square$

系理 6.1.11 【柯西條件】 ： 假設 $(W,\|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間。級數 $\sum u_n$ 收斂若且唯若對於每個 $\varepsilon>0$，存在 $N\geqslant 1$ 使得

$$\forall n\geqslant N,\ \forall k\geqslant 1,\quad \|u_{n+1}+\cdots+u_{n+k}\|<\varepsilon. \tag{6.1}$$

這條件稱作柯西條件 (Cauchy's condition) 。

證明：這是命題 6.1.10 (2) 的直接結果。 $\square$

系理 6.1.12 ： 如果 $\sum u_n$ 是個收斂序列，那麼 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

證明： 這可以看作是式 (6.1) 中柯西條件取 $k=1$ 的特例。 □

註解 6.1.13 ： 我們注意到，一般項收斂到零是級數收斂的必要但不充分條件。例如，調和級數 $\sum \frac{1}{n}$ 發散，但他的一般項趨近於 0。

定義 6.1.14 ： 假設 $(W, \|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間，並令 $\sum u_n$ 為一般項在 W 中的級數。

- 如果級數 $\sum \|u_n\|$ 收斂，那我們說級數 $\sum u_n$ 會絕對收斂 (converges absolutely)。
- 如果級數 $\sum u_n$ 收斂但不絕對收斂，那我們說 $\sum u_n$ 條件收斂 (converges conditionally)。

範例 6.1.15 ： 級數 $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ 收斂但不會絕對收斂。在第 6.4.1 小節中，我們會比較完整地討論這種類型的級數，稱作交錯級數。

定理 6.1.16 ： 假設 $(W, \|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間。在 W 中會絕對收斂的級數 $\sum u_n$ 也會收斂。

證明： 對於每個 $n, k \geqslant 1$，我們有

$$\|u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}\| \leqslant \|u_{n+1}\| + \cdots + \|u_{n+k}\|.$$

因此，級數 $\sum \|u_n\|$ 的柯西條件會蘊含級數 $\sum u_n$ 的柯西條件。 □

註解 6.1.17 ： 根據上面定理，要證明在 Banach 空間中的級數會收斂，我們可以證明他會絕對收斂，也就是需要去討論一般項非負級數的收斂。這也就是為什麼，我們需要更有系統性地去了解這種一般項非負級數的收斂。在下個小節，我們會去討論讓這種級數收斂的一些充分條件。

第二節　一般項非負項的級數

第一小節　級數之間的比較

命題 6.2.1 ： 令 $\sum u_n$ 為一般項非負項的級數。他會收斂若且唯若部份和序列 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 有上界。

證明： 這是命題 6.1.2 的直接結果。 □

命題 6.2.2 【比較法則】： 我們考慮兩個非負序列 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 滿足

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

(1) 如果 $\sum v_n$ 收斂，則 $\sum u_n$ 收斂。

(2) 如果 $\sum u_n$ 發散，則 $\sum v_n$ 發散。

證明： 令 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 為 $\sum u_n$ 的部份和，且 $(T_n)_{n\geqslant 0}$ 為 $\sum v_n$ 的部份和。那麼對於每個 $n \geqslant 0$，我們有 $S_n \leqslant T_n$。我們最後透過命題 6.1.2 來總結。 □

定理 6.2.3 ： 令 $\sum u_n$ 與 $\sum v_n$ 為兩個一般項非負項的級數。

(1) 如果 $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ 而且 $\sum u_n$ 收斂，那麼 $\sum v_n$ 收斂。

(2) 如果 $u_n \sim v_n$，那麼級數 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 會有相同行為（也就是兩者皆發散或兩者皆收斂）。

證明：

(1) 假設 $v_n = \mathcal{O}(u_n)$。令 $M > 0$ 以及 $N \geqslant 1$ 使得 $v_n \leqslant M u_n$ 對於所有 $n \geqslant N$。這代表當

$n \geqslant N$ 時，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{N-1} v_k + \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} v_k + M \sum_{k=N}^{n} u_k.$$

由於 $\sum u_n$ 收斂，序列 $(\sum_{k=N}^{n} u_k)_{n \geqslant N}$ 會有上界。因此，級數 $\sum v_n$ 收斂。

(2) 如果 $u_n \sim v_n$，這代表 $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ 而且 $v_n = \mathcal{O}(u_n)$。因此 (1) 蘊含 $\sum u_n$ 收斂若且唯若 $\sum v_n$ 收斂。

□

註解 6.2.4 ： 我們注意到，如果想要使用定理 6.2.3 ，一般項非負的假設是很重要的。

(1) 對於 $n \geqslant 1$，令 $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 以及 $v_n = \frac{1}{n}$。顯然，我們有 $v_n = \mathcal{O}(u_n)$。然而，根據定理 6.4.2 ，級數 $\sum u_n$ 會收斂，但根據命題 6.2.6 ，級數 $\sum v_n$ 會發散。

(2) 對於 $n \geqslant 1$，令 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ 以及 $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$。顯然，我們有 $u_n \sim v_n$。然而，根據定理 6.4.2 ，級數 $\sum v_n$ 會收斂，但由於 $\sum \frac{1}{n}$ 會發散，級數 $\sum u_n$ 也會發散。

範例 6.2.5 ： 我們來研究級數 $\sum \frac{1}{n^2}$ 的行為。首先，我們注意到

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

由於裂項級數 $\sum(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$ 收斂，根據命題 6.2.2 (1)，級數 $\sum \frac{1}{n^2}$ 也會收斂。此外，對於 $n \geqslant 2$，我們可以控制第 n 項的餘項，也就是：

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

根據柯西條件，級數 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收斂，且他的第 n 項餘項與 $\frac{1}{n}$ 等價。

我們也可以使用定理 6.2.3 (2) 來討論收斂性，因為我們有 $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$。但如果想要找到第 n 項餘項的漸進式，我們需要使用稍後才會看到的定理 6.2.8 。

命題 6.2.6 【黎曼級數】： 令 α 為實數。黎曼級數 $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ 收斂若且唯若 $\alpha > 1$。

證明： 對於實數 $\alpha > \beta$，我們有 $\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^\beta}$ 對於所有 $n \geqslant 1$。根據命題 6.2.2 ，我們只需要證明 $\sum \frac{1}{n}$ 發散，且對於任意 $\alpha > 1$，級數 $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ 會收斂即可。

- 令 $\alpha = 1$。對於每個 $k \geqslant 1$，我們有

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(k+1) - \ln k.$$

這蘊含

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

由於 $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$，我們從 命題 6.2.2 (2) 推得級數 $\sum \frac{1}{n}$ 會發散。

- 令 $\alpha > 1$。同理，對於每個 $k \geqslant 2$，我們有

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}}\right]. \tag{6.2}$$

這會給我們

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] \leqslant \frac{1}{\alpha-1}.$$

因此當 $\alpha > 1$ 時，級數 $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ 會收斂。 □

註解 6.2.7 ： 對一個固定的 $\alpha > 1$ 來說，根據命題 6.2.6 ，黎曼級數 $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ 會收斂。我們可以對他的餘項找到漸進式。對於 $k \geqslant 1$，我們有

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right].$$

這給我們

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

同理，從式 (6.2)，我們得到

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha}.$$

上面兩個關係式讓我們得到

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty. \tag{6.3}$$

第二小節 部份和與餘項

定理 6.2.8 ： 令 $\sum u_n$ 與 $\sum v_n$ 為兩個一般項非負的級數，且滿足 $u_n \sim v_n$ 。那麼下列性質成立。

(1) 如果 $\sum u_n$ 收斂，那麼 $\sum v_n$ 收斂，且他們的餘項滿足

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k, \quad n \to \infty. \tag{6.4}$$

(2) 如果 $\sum u_n$ 發散，那麼 $\sum v_n$ 發散，且他們的部份和滿足

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad n \to \infty. \tag{6.5}$$

證明：根據定理 6.2.3 ，我們已經知道 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 有相同的行為。

(1) 令 $\varepsilon > 0$。從等價關係 $u_n \sim v_n$ 我們能找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall k \geqslant N, \quad (1-\varepsilon) u_k \leqslant v_k \leqslant (1+\varepsilon) u_k. \tag{6.6}$$

對任意 $n \geqslant N$，我們對 $k \geqslant n$ 取和，進而得到

$$\forall n \geqslant N, \quad (1-\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} v_k \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

這剛好就是式 (6.4) 所代表的意思。

(2) 令 $\varepsilon > 0$。同上，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得式 (6.6) 成立。接著，對於任意 $n \geqslant N$，我們有

$$\sum_{k=1}^{N-1} v_k + (1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} v_k + (1+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k. \tag{6.7}$$

由於一般項 v_n 是非負的，而且級數 $\sum u_k$ 發散，我們可以找到 $N' \geqslant N$ 使得下面兩個不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{N-1} v_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n} u_k, \quad \forall n \geqslant N', \tag{6.8}$$

$$(1-2\varepsilon)\sum_{k=1}^{N-1} u_k - \sum_{k=1}^{N-1} v_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n} u_k, \quad \forall n \geqslant N'. \tag{6.9}$$

在式 (6.7) 的右方，我們使用式 (6.8)，進而得到

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant (1+2\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant (1+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

其中最後一個不等式會成立，是因為一般項 u_n 是非負的。同理，在式 (6.7) 的左方我們使用式 (6.9)，會得到

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \geqslant (1-2\varepsilon)\sum_{k=1}^{N-1} u_k - \varepsilon\sum_{k=N}^{n} u_k + (1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k = (1-2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

這會是檢查式 (6.5) 所需要證明的。

□

當我們要找出序列或級數的漸進表示式時，我們可以應用上面的結果。下面我們給一個重要的例子。

範例 6.2.9： 由調和數所構成的序列 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n \geqslant 1, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(1) 我們首先注意到，當 $n \to \infty$ 時，我們有下列等價關係：

$$\frac{1}{n} \sim \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

由於級數 $\sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ 當中的項都是非負的，從定理 6.2.3 (2) 我們知道他們有相同的行為。接著，我們不難看出

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \big[\ln(k+1) - \ln(k)\big] = \ln(n+1)$$

會在 $n \to \infty$ 時發散，因此我們得知 $\sum \frac{1}{n}$ 也會發散。此外，從定理 6.2.8 (2) 我們知道，他們的部份和會是等價的。換句話說，當 $n \to \infty$ 時，我們有

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big) = \ln(n+1) \sim \ln n.$$

這給我們調和數漸進展開中的第一項。

(2) 要找到 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 漸進展開後面的項，我們考慮序列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 定義做 $A_n = H_n - \ln n$ 對於 $n \geqslant 1$。那麼對於 $n \geqslant 2$，我們可以寫

$$A_n - A_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) \sim -\frac{1}{2n^2}. \tag{6.10}$$

根據命題 6.2.6 中黎曼級數的結果，我們知道級數 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收斂，接著使用定理 6.2.3 (2)，我們知道級數 $\sum(A_n - A_{n-1})$ 收斂。此外，由於

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) = A_n - A_1,$$

我們推得序列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂。我們定義 $\gamma := \lim_{n\to\infty} A_n$，稱作歐拉常數，這讓我們可以寫

$$H_n = \ln n + A_n = \ln n + \gamma + o(1), \quad \text{當 } n \to \infty.$$

(3) 接續 (2) 中的計算，由於我們有式 (6.10) 中的等價關係，透過定理 6.2.8 (1) 我們知道下面

等價關係成立：

$$\gamma - A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (A_k - A_{k-1}) \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2n}.$$

其中最後一個等價關係式來自範例 6.2.5 。這給我們下面關於 H_n 的漸進展開：

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty.$$

(4) 我們可以把上面的漸進展開式繼續寫下去。我們考慮序列 $(D_n)_{n\geqslant 1}$ 定義做

$$D_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = A_n - \gamma - \frac{1}{2n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

那麼，當 $n \to \infty$ 時，我們有

$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= \frac{1}{n} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n} - \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big) + \frac{1}{2n}\Big(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big). \end{aligned}$$

由於黎曼級數 $\sum \frac{1}{n^3}$ 收斂，我們知道級數 $\sum(D_n - D_{n-1})$ 也會收斂，而且當 $n \to \infty$ 時，我們有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (D_k - D_{k-1}) \sim \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

如果我們使用式 (6.3)，我們推得 $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$，而左方會等於 $\lim_{k\to\infty} D_k - D_n = -D_n$。把他們放在一起，我們得到 $D_n \sim -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$ 當 $n \to \infty$。調和數的漸進展開式可以寫做

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty.$$

(5) 你可以重複上面的步驟，進而推得下列漸進展開式：

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k\geqslant 1}^{N} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + o\Big(\frac{1}{n^{2N}}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty,$$

其中 $(B_{2k})_{k\geqslant 1}$ 是 Bernoulli 數，他的最前面幾項是 $B_2=\frac{1}{6}$、$B_4=-\frac{1}{30}$、$B_6=\frac{1}{42}$ 等等。

註解 6.2.10 ： 在習題 6.12 中，你可以使用與範例 6.2.9 中相同的方法，來推得 $n!$ 的漸進展開式，稱作*Stirling* 公式。

第三小節 級數與積分的比較

積分和級數有密切的關係：級數是個離散和，積分則是離散和的極限。當級數收斂時，一般來講要得到他極限的值不是容易的事情；然而，很多函數有好的原函數是可以計算的（附錄一）。在這個小節中，我們會介紹一個方法，讓我們可以藉由積分來討論級數的行為。背後的想法與我們在命題 6.2.6 當中類似，但這裡我們會假設的是更一般的情況，並且會給出更精確的結果。

命題 6.2.11 ： 令 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ 為非遞增函數，滿足 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$。對於每個整數 $n\geqslant 1$，我們定義

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad I_n=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t,\quad D_n=S_n-I_n.$$

那麼，下列性質成立。

(1) 對於 $n\geqslant 1$，我們有 $0\leqslant f(n+1)\leqslant D_{n+1}\leqslant D_n\leqslant f(1)$。

(2) 序列 $(D_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂，我們記 $D:=\lim_{n\to\infty}D_n$。

(3) 級數 $\sum f(n)$ 和積分 $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t:=\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 有相同的行為，也就是兩者皆收斂或兩者皆發散。

(4) 對於 $n\geqslant 1$，我們有 $0\leqslant D_n-D\leqslant f(n)$。

證明：

(1) 由於 f 是非遞增的，我們有

$$\forall k \geqslant 0, \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

讓我們固定 $n \geqslant 1$。我們有

$$I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n$$

因此，$f(n+1) = S_{n+1} - S_n \leqslant S_{n+1} - I_{n+1} = D_{n+1}$，這證明了不等式的第一部份。

接著，我們寫

$$D_n - D_{n+1} = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n+1) \geqslant 0,$$

這證明了 $D_{n+1} \leqslant D_n$。最後，我們注意到 $D_1 = f(1)$，再透過數學歸納法，對於所有 $n \geqslant 1$，我們得到 $D_n \leqslant D_1 = f(1)$。

(2) 從 (1)，我們知道 $(D_n)_{n\geqslant 1}$ 是個非負序列，且有 0 為下界，所以會收斂。

(3) 從 (2)，我們知道 $\lim_{n\to\infty}(S_n - I_n)$ 存在。因此，序列 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(I_n)_{n\geqslant 1}$ 有相同的行為。

(4) 對於 $n \geqslant 1$，我們寫下裂項和：

$$D_n - D = \lim_{N\to\infty}(D_n - D_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N-1} (D_k - D_{k+1}).$$

從 (1)，我們知道對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $D_k - D_{k+1} \geqslant 0$，因此 $D_n - D \geqslant 0$。對於每個 $k \geqslant 1$，我們也會有

$$D_k - D_{k+1} = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k+1) \leqslant f(k) - f(k+1),$$

所以

$$D_n - D \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N-1} (f(k) - f(k+1)) = \lim_{N\to\infty}(f(n) - f(N)) = f(n).$$

□

註解 6.2.12 ：

(1) 在命題 6.2.11 中，如果對於某個 $M > 0$，f 在 $[M, +\infty)$ 上是非遞增的，那麼定性的敘述像是 (2) 和 (3) 仍然成立，但 (1) 和 (4) 當中的界需要調整。

(2) 從命題 6.2.11 (4)，我們也可以得知

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - D \leqslant f(n).$$

換句話說，我們會有漸進展開

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + D + \mathcal{O}(f(n)), \quad \text{當 } n \to \infty. \tag{6.11}$$

如果我們把這用在函數 $f(x) = \frac{1}{x}$，那麼我們得到

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + D + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty,$$

這會與範例 6.2.9 中的結果相似，比 (2) 強，但比 (3) 弱。

範例 6.2.13 ： 在命題 6.2.11 中，我們取 $s \in \mathbb{R}$ 以及 $f(x) = x^{-s}$。使用命題 6.2.6 ，我們知道如果 $s > 1$，那麼 $\sum n^{-s}$ 會收斂；如果 $s \leqslant 1$，那麼他則會發散。對於 $s > 1$，這樣的級數稱作黎曼 ζ 函數：

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

對於 $s \in (0, 1)$，式 (6.11) 給我們

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1 - s} + C(s) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^s}\Big), \quad \text{當 } n \to \infty,$$

其中 $C(s)$ 是個取決於 s 的常數。上式中的常數項會等於 $\zeta(s)$，因此級數的餘項寫做

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{s - 1} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^s}\Big) \quad \text{當 } n \to \infty,$$

這也是式 (6.2) 所得到的結果。

命題 6.2.14 【Bertrand 級數】：對於 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，他所對應到的 Bertrand 級數寫做

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

(1) 當 $\alpha > 1$，此 Bertrand 級數收斂。

(2) 當 $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$，此 Bertrand 級數收斂。

(3) 其他狀況下，此 Bertrand 級數發散。

證明：我們會使用比較法則（命題 6.2.2）以及命題 6.2.11 來證明這些性質。

(1) 令 $\alpha > 1$。注意到我們有下面的比較：

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right) \quad \text{當 } n \to \infty.$$

因為 $\frac{1+\alpha}{2} > 1$，我們知道黎曼級數 $\sum \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$ 會收斂。藉由比較法則（命題 6.2.2），我們推得級數 $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ 是會收斂的。

(2) 令 $\alpha = 1$ 以及 $\beta > 1$，並把命題 6.2.11 用在非遞增函數 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ 上。f 的積分寫起來如下：

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{1}{s^\beta}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{1-\beta}\Big[\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\Big].$$

上面積分的右方收斂到某個有限極限，因此級數 $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ 會收斂。

(3) 讓我們先處理 $\alpha = \beta = 1$ 的情況。我們把命題 6.2.11 用在非遞增函數 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ 上。f 的積分寫起來如下：

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln\ln n - \ln\ln 2.$$

上面積分的右方發散，因此級數 $\sum \frac{1}{n \ln n}$ 會發散。

當 $\alpha = 1$ 而且 $\beta < 1$ 時，我們會有

$$\frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^\beta}.$$

藉由比較法則（命題 6.2.2），我們知道級數 $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ 發散。

當 $\alpha < 1$，我們有下列關係式：

$$\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right) \quad \text{當 } n \to \infty,$$

我們就可以藉由黎曼級數 $\sum \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$ 由於 $\frac{1+\alpha}{2} < 1$ 而發散的結果，推得我們所要的。 □

第三節 收斂檢測法

定理 6.3.1 【D'Alembert 法則，商檢測法】： 令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為實數序列。假設從某項開始，他會是嚴格為正的。此外，假設下列極限存在：

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0, +\infty].$$

那麼，下面敘述成立。

(1) 如果 $\ell < 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會收斂。

(2) 如果 $\ell > 1$，那麼 $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ 而且級數 $\sum u_n$ 會發散。

(3) 如果 $\ell = 1$ 而且對於所有夠大的 n 來說，商 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 會保持在 1 之上，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。

註解 6.3.2 ： 當 $\ell = 1$，即使對於所有 n，商 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 永遠維持在 1 以下，D'Alembert 法則無法讓我們得到結論。例如，我們可以考慮級數 $\sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum \frac{1}{n^2}$。在兩種情況下，極限都是 $\ell = 1$，而且對於所有 $n \geqslant 1$，商 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 會比 1 來得小。然而，前者級數發散，而後者級數收斂。

證明：

(1) 假設 $\ell < 1$。令 $N \geqslant 1$ 使得對於 $n \geqslant N$，我們會有 $u_n > 0$ 以及 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+\ell}{2} =: r < 1$。那麼，對於 $n \geqslant N$，我們得到 $u_n \leqslant r^{n-N} u_N$，而且

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} r^{k-N} u_N.$$

在上面的和裡面，第一項是個常數，第二項是公比為 $r < 1$ 的幾何級數，所以會收斂。

(2) 假設 $\ell > 1$。我們使用相同的方法，差別在於得到的不等式方向不同。令 $N \geqslant 1$ 使得對於 $n \geqslant N$，我們會有 $u_n > 0$ 以及 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1+\ell}{2} =: r > 1$。那麼，對於 $n \geqslant N$，我們得到 $u_n \geqslant r^{n-N} u_N$，而且

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} r^{k-N} u_N.$$

在上面的和裡面，第一項是個常數，第二項是公比為 $r > 1$ 的幾何級數，所以會發散。

(3) 假設 $\ell = 1$ 並令 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $u_n > 0$ 而且商滿足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$。那麼，對於所有 $n \geqslant N$，我們會有 $u_n \geqslant u_N > 0$。顯然，這蘊含級數 $\sum u_n$ 會發散。 $\square$

範例 6.3.3 ： 對於給定的 $z \in \mathbb{C}^*$，讓我們來看級數 $\sum \frac{z^n}{n!}$。相鄰兩項的商滿足

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.$$

D'Alembert's 法則告訴我們，級數 $\sum \frac{z^n}{n!}$ 會絕對收斂，所以會收斂。因此，這個級數會對於所有 $z \in \mathbb{C}$ 收斂。當我們把 $\mathbb{C}$ 看作是 $\mathbb{R}$ 上面的二維空間時，這個是定理 6.1.16 的直接結果。

下面的系理是定理 6.3.1 的一個簡單推廣。如果要得到複數級數的絕對收斂，我們只需要去看商的 $\liminf$ 和 $\limsup$ 即可。

系理 6.3.4 ： 令 $\sum u_n$ 為一般項非零，取值在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的級數。令

$$r = \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \quad \text{以及} \quad R = \limsup_{n\to\infty} \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|}.$$

(1) 如果 $R < 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會絕對收斂。

(2) 如果 $r > 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。

(3) 如果 $r \leqslant 1 \leqslant R$，那麼我們無法總結。

註解 6.3.5 ： 不要忘記，在特殊情況 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ 之下，這個系理非常好用。

證明：這個證明與定理 6.3.1 的證明非常相似。我們這裡拿 (1) 的證明為例。

令 $\sum u_n$ 為一般項非零，取值在 $(W, \cdot\cdot)$ 中的級數，並滿足 $R < 1$。根據 $\limsup$ 的定義，會存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \qquad \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leqslant \frac{1+R}{2} =: x < 1.$$

接著，我們可以使用相同方法總結。 □

定理 6.3.6 【柯西法則，根檢測法】 ： 令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為實數序列。假設從某項開始，他會是非負的。此外，假設下列極限存在：

$$\lambda := \lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} \in [0, +\infty].$$

那麼，下面敘述成立。

(1) 如果 $\lambda < 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會收斂。

(2) 如果 $\lambda > 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。

(3) 如果 $\lambda = 1$ 而且對於所有夠大的 n 來說，$(u_n)^{1/n}$ 會保持在 1 之上，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。

證明：

(1) 假設 $\lambda < 1$。令 $\mu = \frac{1+\lambda}{2} \in (\lambda, 1)$。取 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $u_n > 0$ 以及 $(u_n)^{1/n} \leqslant \mu$。這證明了對於任意 $n \geqslant N$，我們有

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} \mu^k \leqslant \frac{\mu^N}{1-\mu} < \infty.$$

因此，級數 $\sum_{k \geqslant N} u_k$ 收斂，所以級數 $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ 也會收斂

(2) 假設 $\lambda > 1$。令 $\mu = \frac{1+\lambda}{2} \in (1, \lambda)$。取 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $(u_n)^{1/n} \geqslant \mu$。這證明了對於任意 $n \geqslant N$，我們有

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=N}^{n} \mu^k \geqslant \mu^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

顯然，級數 $\sum u_n$ 是發散的。

(3) 假設 $\lambda = 1$ 而且存在 $N \geqslant 1$ 使得 $(u_n)^{1/n} \geqslant 1$ 對於所有 $n \geqslant N$。讓我們固定一個這樣的 $N \geqslant 1$。那麼，對於所有 $n \geqslant N$，我們也會有 $u_n \geqslant 1$，所以級數 $\sum u_n$ 會發散。 □

註解 6.3.7 ： 與註解 6.3.2 相似，當 $\lambda = 1$ 而且對於所有 n，我們有 $(u_n)^{1/n}$ 一直處在 1 之下，柯西法則仍然無法讓我們得到任何結論。我們可以取相同的級數 $\sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum \frac{1}{n^2}$ 當作例子。

系理 6.3.8 ： 令 $(u_n)_{n \geqslant 1}$ 為在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的數列，以及

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|^{1/n} \in [0, +\infty].$$

那麼，下列性質成立。

(1) 如果 $\lambda < 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會絕對收斂。

(2) 如果 $\lambda > 1$，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。

(3) 如果 $\lambda = 1$，那麼我們無法總結。

證明：證明與定理 6.3.6 的證明相似，我們留在習題，見習題 6.16 。 □

註解 6.3.9 ： 在習題 2.31 中，我們看到如果數列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的一般項嚴格為正，我們會有下列不等式：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

這代表著，根檢測法比商檢測法來得強。例如，我們可以考慮定義如下的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$：

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = (1+(-1)^n)2^n + 1 = \begin{cases} 2^{n+1}+1 & \text{若 } n \text{ 為偶數}, \\ 1 & \text{若 } n \text{ 為奇數}. \end{cases}.$$

那麼，我們有

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 1 < \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 2 < \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

如果我們想要使用商檢測法（系理 6.3.4 ），我們會在第三個情境中；但如果我們使用根檢測法（系理 6.3.8 ），我們會在第二個情境中，也就是說級數 $\sum a_n$ 會發散。但可以注意到，我們能夠對 $\sum a_{2n}$ 使用商檢測法，來推得級數 $\sum a_{2n}$ 的發散性，進而推得 $\sum a_n$ 的發散性。

第四節　條件收斂級數

在這個小節，我們要考慮的級數一般項仍然會是在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中，而且會條件收斂。我們回顧在定義 6.1.14 中的定義：如果級數收斂但不會絕對收斂，那麼我們說他絕對收斂。我們可以注意到的是，在實際應用中，我們常常會取 $W = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 這樣的例子。

第一小節　交錯級數

定義 6.4.1 ： 令 $\sum u_n$ 為一般項在 $\mathbb{R}$ 中的級數。如果對於所有 $n \geqslant 1$，$(-1)^n u_n$ 有相同的正負號，則我們說他是個<u>交錯級數</u> (alternating series) 。有需要的話，我們可以同時對所有的項改變正負號，我們可以把級數 $\sum u_n$ 寫成 $\sum (-1)^n a_n$，其中 $a_n \geqslant 0$ 對於所有 $n \geqslant 1$。

定理 6.4.2 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為非負序列。假設他是非遞增，且趨近於 0。那麼，交錯級數 $\sum (-1)^n a_n$ 會收斂，而且他的餘項滿足

$$\forall n \geqslant 1, \quad |R_n| \leqslant a_{n+1}, \quad \text{其中 } R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

註解 6.4.3 ： 在習題 6.22 中，你可以看到，在一些微弱的額外假設之下，我們可以對交錯級數的餘項得到更好的估計。這個結果可以用在交錯級數 $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 這個範例上。

證明： 由於 (a_n) 是非遞增的，對於所有 $n \geqslant 1$，我們有

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{以及} \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant 0.$$

換句話說，序列 $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ 是非遞增的，而且序列 $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ 是非遞減的。由於 $S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，數列 $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ 和 $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ 是相伴序列，根據命題 6.1.4 ，他們會收斂到相同極限，記作 S。因此，$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ 而且

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_{2n-1} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

這蘊含

$$\forall n \geqslant 1, \quad |R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

同理，我們也有

$$\forall n \geqslant 1, \quad |R_{2n-1}| = |S - S_{2n-1}| \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}.$$

□

範例 6.4.4 ：根據定理 6.4.2 ，級數 $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 會收斂，接著讓我們來計算他的和。根據範例 6.2.9 ，我們知道調和數會有下面這個漸進行為：

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \quad \text{當 } n \to \infty.$$

我們把交錯級數的部份和記作

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

那麼，對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$H_{2n} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k} = H_n.$$

換句話說，對於 S_{2n} 我們會有下面這個漸進行為：

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1), \quad \text{當 } n \to \infty.$$

這代表著級數 $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 會收斂到 $\ln 2$。

第二小節 Dirichlet 檢測法

我們考慮級數 $\sum u_n$ 其中一般項可以寫做 $u_n = a_n b_n$ 對於所有 $n \geqslant 1$。我們記 $S_0 = 0$ 以及對於 $n \geqslant 1$，記 $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$。

命題 6.4.5 【Abel 變換】： 對於每個 $n \geqslant 0$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n. \tag{6.12}$$

證明： 對於每個 $n \geqslant 0$，我們有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n.\end{aligned}$$

□

註解 6.4.6 ： 在系理 5.2.24 裡面的 Riemann–Stieltjes 積分理論中，當我們把積分函數取做高斯函數 $\lfloor\cdot\rfloor$，所得到的分部積分就是這個結果。你可以嘗試比較兩邊的式子。

定理 6.4.7 【Dirichlet 檢測法】： 令 $\sum u_n$ 為一般項取值在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的級數。假設他的一般項 u_n 可以寫做 $u_n = a_n b_n$，其中 $a_n \in \mathbb{R}$ 且 $b_n \in W$ 對於所有 $n \geqslant 1$，且滿足：

(i) 序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 是非負、非遞增，且趨近於 0；

(ii) 級數 $\sum b_n$ 有界。

那麼級數 $\sum u_n$ 會收斂。

註解 6.4.8 ： 我們可以做出與註解 6.4.6 相同的觀察。在習題 5.21 中，我們有看過系理 5.2.24 的應用，可以來證明級數的收斂。這個定理是建立在 Abel 變換（命題 6.4.5）的基礎上，而且他的結果與習題 5.21 當中的結果完全一樣。

證明： 我們對級數 $\sum u_n$ 使用 Abel 變換式 (6.12)。對於每個 $n \geqslant 0$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n,$$

其中 S_n 是級數 $\sum b_n$ 的第 n 個部份和。令 $M > 0$ 使得 $|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} b_k| \leqslant M$ 對於所有 $n \geqslant 1$。那麼，我們有 $|a_n S_n| \leqslant |a_n| M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，所以級數 $\sum u_n$ 和 $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ 有相同的行為。此

外，對於每個 $k \geqslant 0$，我們有

$$|(a_k - a_{k+1})S_k| \leqslant (a_k - a_{k+1})M,$$

因為 $(a_k)_{k\geqslant 1}$ 是非遞增的。因此，對於每個 $n \geqslant 0$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} |(a_k - a_{k+1})S_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})M = (a_1 - a_{n+1})M \leqslant a_1 M.$$

這證明了級數 $\sum(a_n - a_{n+1})S_n$ 會絕對收斂，所以會收斂。 □

範例 6.4.9 ： 使用定理 6.4.7 ，我們可以得到下列級數的收斂。

(1) 令 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 為非遞增且趨近於 0 的序列。交錯級數 $\sum(-1)^n a_n$ 會收斂，因為下面這個部份和是有界的：

$$\forall n \geqslant 1, \quad |(-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n| \leqslant 1.$$

這是定理 6.4.2 中第一部份關於交錯級數的結果。然而，Dirichlet 檢測法無法給我們此級數餘項的估計。

(2) 令 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 為非遞增且趨近於 0 的序列。令 $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$。考慮級數 $\sum a_n e^{\mathrm{i}n\theta}$。對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$\forall n \geqslant 0, \quad |1 + e^{\mathrm{i}\theta} + \cdots + e^{\mathrm{i}n\theta}| = \left|\frac{1 - e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|}.$$

因此，如果 $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$，則級數 $\sum a_n e^{\mathrm{i}n\theta}$ 收斂。

第五節 級數的重排

令 $(W, \|\cdot\|)$ 為 Banach 空間且 $\sum u_n$ 為一般項在 W 中的級數。

定義 6.5.1 ： 給定級數 $\sum v_n$，如果存在雙射函數 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

$$v_n = u_{\varphi(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

則我們說他是 $\sum u_n$ 的<u>重新排列</u> (rearrangement) 。

定理 6.5.2 ： 假設級數 $\sum u_n$ 會絕對收斂，且和為 s。那麼，任何 $\sum u_n$ 的重新排列也會絕對收斂，且和為 s。

證明： 令 $\sum v_n$ 為 $\sum u_n$ 的重新排列，定義做 $v_n = u_{\varphi(n)}$ 對於所有 $n \in \mathbb{N}$，其中 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是個雙射函數。我們注意到，對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} \|v_k\| = \sum_{k=1}^{n} \left\|u_{\varphi(k)}\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| .$$

級數 $\sum \|v_k\|$ 當中的項非負，且有上界，所以會收斂，也就是說 $\sum v_k$ 會絕對收斂。

令 $\varepsilon > 0$。由於 $\sum u_n$ 會絕對收斂，我們能找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon.$$

我們把 $\sum u_n$ 的部份和記作 $(S_n)_{n\geqslant 0}$，還有 $\sum v_n$ 的部份和記作 $(T_n)_{n\geqslant 0}$。令 $M \geqslant 1$ 滿足

$$\{1, \dots, N\} \subseteq \{\varphi(1), \dots, \varphi(M)\}, \tag{6.13}$$

那麼對於任意 $n \geqslant M+1$，我們有 $\varphi(n) \geqslant N+1$。取 $n \geqslant M+1$，我們有

$$\|T_n - S_N\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{N} u_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon,$$

當中我們在最後一個等式中，使用了式 (6.13) 中的包含關係。最後，我們可以得到

$$\|T_n - s\| \leqslant \|T_n - S_N\| + \|S_N - s\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因此，級數 $\sum v_n$ 也會收斂到 s。 □

註解 6.5.3 ： 在定理 6.5.2 中，假設級數會絕對收斂是很重要的。接下來，我們會在範例 6.5.4 中給一個反例，並且在定理 6.5.5 中討論一般性的結果。

範例 6.5.4 ： 我們已經知道下面的級數會收斂（範例 6.4.4）：

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

如果我們把當中的項用下列方式重新排列，我們會得到不同的和：

$$\begin{aligned}&\Big(1-\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{4}+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\Big)-\frac{1}{8}+\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\Big)-\frac{1}{12}+\dots\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

定理 6.5.5 【黎曼級數定理】 ： 令 $\sum u_n$ 為實數序列，並假設他會條件收斂。令 $-\infty\leqslant x\leqslant y\leqslant+\infty$。那麼，存在 $\sum u_n$ 的重新排列 $\sum v_n$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} T_n=x \quad \text{以及} \quad \limsup_{n\to\infty} T_n=y,$$

其中對於每個 $n\geqslant 1$，我們把 $T_n=v_1+\cdots+v_n$ 記作是 $\sum v_n$ 的第 n 個部份和。

註解 6.5.6 ： 如果在定理 6.5.5 中，我們取特例 $x=y$，那麼定理告訴我們可以找到一個重新排列，使得他的和會是 $x=y$。

證明：這個敘述可以藉由構造法來證明，我們這裡不提供細節。 □

第六節　柯西級數

定義 6.6.1： 令 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 且 $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ 為 $\mathbb{K}$ 上的賦範向量空間。考慮二元算子 $\cdot:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$。

(1) 如果 $\cdot$ 是雙線性的，也就是滿足下列條件，那我們說 $(\mathcal{A},\cdot)$ 是個代數：

(a) 【右分配律】對於 $x,y,z\in\mathcal{A}$，我們有 $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$。

(b) 【左分配律】對於 $x,y,z\in\mathcal{A}$，我們有 $z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y$。

(c) 【純量乘法】對於 $x,y\in\mathcal{A}$ 以及 $a,b\in\mathbb{K}$，我們有 $(ax)\cdot(by)=(ab)(x\cdot y)$。

(2) 如果 $(\mathcal{A},\cdot)$ 是個代數，且範數 $\|\cdot\|$ 具有次可乘性，也就是說

$$\forall x,y\in\mathcal{A},\quad \|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\|\,,$$

那我們說 $(\mathcal{A},\cdot,\|\cdot\|)$ 是個賦範代數 (normed algebra)。

範例 6.6.2：

(1) 賦範代數最簡單的例子是 $(\mathbb{R},\times,|\cdot|)$ 和 $(\mathbb{C},\times,|\cdot|)$。

(2) 在註解 3.2.15 中，我們有看過對於任意賦範向量空間 U，在 $\mathcal{L}_c(U)$ 上賦予算子範數 $|||\cdot|||$ 時，會是個賦範代數。特別來說，如果 U 是個有限維度的賦範向量空間，那麼在 $\mathcal{L}(U)$ 上賦予算子範數 $|||\cdot|||$ 時，他會是個賦範代數。

(3) 等價來說，對於任意整數 $n\geqslant 1$，由 $n\times n$ 矩陣所構成的空間 $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ 在賦予矩陣範數 $|||\cdot|||$ 時，也會是個賦範代數。

定理 6.6.3【柯西積】： 令 $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ 及 $\sum_{n\geqslant 0}b_n$ 為兩個會絕對收斂的級數，且他們的一般項在完備賦範代數 $(\mathcal{A},\cdot,\|\cdot\|)$ 中。我們定義他們的柯西積為定義如下的級數 $\sum_{n\geqslant 0}c_n$：

$$\forall n\in\mathbb{N}_0,\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

級數 $\sum c_n$ 會絕對收斂，而且他的和等於

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \Big(\sum_{p\geqslant 0} a_p\Big)\Big(\sum_{q\geqslant 0} b_q\Big). \tag{6.14}$$

證明：我們定義下面的和：

$$A := \sum_{p=0}^{\infty} \|a_p\| \quad \text{以及} \quad B := \sum_{q=0}^{\infty} \|b_q\|.$$

令 $n \geqslant 0$。$\sum c_n$ 的第 n 個部份和寫做

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \|c_k\| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{p+q=k\\ p,q\geqslant 0}} \|a_p\|\cdot\|b_q\|\Bigg) \leqslant \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} \|a_p\|\cdot\|b_q\| \\ &= \Big(\sum_{p=0}^{n}\|a_p\|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n}\|b_q\|\Big) \leqslant AB.\end{aligned}$$

所以，級數 $\sum c_n$ 會絕對收斂。

要計算級數 $\sum c_n$ 的和，我們定義下面的量：

$$\forall n \geqslant 0, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{2n} c_k - \Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big).$$

那麼，對於任意 $n \geqslant 0$，我們有

$$\Delta_n = \sum_{\substack{p+q\leqslant 2n\\ p,q\geqslant 0}} a_p b_q - \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} a_p b_q = \sum_{\substack{p\geqslant n+1, q\geqslant 0\\ p+q\leqslant 2n}} a_p b_q + \sum_{\substack{q\geqslant n+1, p\geqslant 0\\ p+q\leqslant 2n}} a_p b_q.$$

因此，對於任意 $n \geqslant 0$，三角不等式會給我們：

$$\begin{aligned}\|\Delta_n\| &\leqslant \sum_{\substack{p\geqslant n+1, q\geqslant 0\\ p+q\leqslant 2n}} \|a_p\|\,\|b_q\| + \sum_{\substack{q\geqslant n+1, p\geqslant 0\\ p+q\leqslant 2n}} \|a_p\|\,\|b_q\| \\ &\leqslant \sum_{p\geqslant n+1, q\geqslant 0} \|a_p\|\,\|b_q\| + \sum_{q\geqslant n+1, p\geqslant 0} \|a_p\|\,\|b_q\| \\ &= B\cdot\sum_{p=n+1}^{\infty}\|a_p\| + A\cdot\sum_{q=n+1}^{\infty}\|b_q\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

這證明了式 (6.14)。 □

第七節 雙下標序列、雙下標級數

第一小節 雙下標序列及雙下標極限

令 $(W, \|\cdot\|)$ 為 Banach 空間。有兩個下標，且取值在 W 中的序列 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$，我們把他稱作雙下標序列 (double sequence)。

定義 6.7.1： 令 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 為雙下標序列。令 $\ell \in W$。如果對於每個 $\varepsilon > 0$，都會存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall m, n \geqslant N, \quad \|u_{m,n} - \ell\| < \varepsilon, \tag{6.15}$$

則我們說雙下標序列 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 會收斂到 ℓ，記作

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{m,n} = \ell.$$

我們說 ℓ 是雙下標序列 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 的極限或是雙下標極限。

範例 6.7.2： 令 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 為取值為實數的雙下標序列，定義做

$$\forall m, n \geqslant 1, \quad u_{m,n} = \mathbb{1}_{m\geqslant n}.$$

那麼，我們有

$$\forall n \geqslant 1, \quad \lim_{m\to\infty} u_{m,n} = 1 \quad \text{以及} \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m,n} = 1, \tag{6.16}$$

以及

$$\forall m \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 0 \quad \text{以及} \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = 0. \tag{6.17}$$

然而，這個雙下標序列並不會在定義 6.7.1 的意義下收斂，因為我們需要對於兩個下標 m 和 n 的均勻性。我們稱式 (6.16) 和式 (6.17) 當中的極限為雙下標序列 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 的迭代極限。這表示，在對雙下標序列取迭代極限時，先後順序是很重要的。

定理 6.7.3 ： 令 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 為雙下標序列。假設

(i) 極限 $\lim_{m,n\to\infty} u_{m,n}$ 存在且等於 $\ell \in W$；

(ii) 對於每個 $m \geqslant 1$，極限 $\lim_{n\to\infty} u_{m,n}$ 存在。

那麼下面的迭代極限存在，且滿足

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = \ell.$$

證明： 藉由假設 (ii)，我們可以對所有 $m \geqslant 1$ 定義 $\ell_m := \lim_{n\to\infty} u_{m,n}$。令 $\varepsilon > 0$。藉由假設 (i)，我們可以找到 $N \geqslant 0$ 使得

$$\|u_{m,n} - \ell\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall m, n \geqslant N.$$

固定 $m \geqslant N$，根據上面 ℓ_m 的定義，我們能找到 $N' = N'(m) \geqslant 1$ 使得

$$\|\ell_m - u_{m,n}\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N'.$$

那麼，對於任意 $n \geqslant \max(N, N')$，我們有

$$\|\ell - \ell_m\| \leqslant \|\ell - u_{m,n}\| + \|u_{m,n} - \ell_m\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

這證明了 $\lim_{m\to\infty} \ell_m = \ell$。 □

第二小節　雙下標級數

根據黎曼級數定理（定理 6.5.5），當我們想要討論雙下標級數取和的順序時，我們只對會絕對收斂的有興趣。

定理 6.7.4：令 $(u_{m,n})_{m,n\geqslant 1}$ 為一般項在 Banach 空間中的雙下標序列。那麼，下面兩個性質是等價的。

(1) 對於每個 $n\geqslant 1$，級數 $\sum_m u_{m,n}$ 會絕對收斂，且級數 $\sum_n(\sum_m \|u_{m,n}\|)$ 收斂。

(2) 對於每個 $m\geqslant 1$，級數 $\sum_n u_{m,n}$ 會絕對收斂，且級數 $\sum_m(\sum_n \|u_{m,n}\|)$ 收斂。

此外，當上面其中一個性質成立時，我們會有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}\right). \tag{6.18}$$

證明： 根據對稱性，只需要證明 (1) ⇒ (2)。假設 (1) 成立。對於每個 $n\geqslant 1$，令 $A_n=\sum_{m\geqslant 1}\|u_{m,n}\|$。那麼，性質 (1) 說的是 $\sum A_n$ 會收斂。讓我們固定 $m\geqslant 1$，那麼 $\|u_{m,n}\|\leqslant A_n$ 對於每個 $n\geqslant 1$，所以 $\sum_{n\geqslant 1}u_{m,n}$ 會絕對收斂。對於每個 $m\geqslant 1$，令 $B_m:=\sum_{n\geqslant 1}\|u_{m,n}\|$。那麼，對於任意 $M\geqslant 1$，我們有

$$\sum_{m=1}^{M} B_m=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n\geqslant 1}\|u_{m,n}\|=\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{m=1}^{M}\|u_{m,n}\|\right)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}A_n,$$

在上方的第二個等式中，我們使用收斂級數的線性性質。在左方，我們有個一般項非負的級數，且在右方，我們有個不取決於 M 的上界，所以級數 $\sum B_m$ 收斂。這讓我們可以總結 (2) 會成立。

我們注意到，當 (1) 成立時，式 (6.18) 的右方是定義良好的，因為對於每個 $n\geqslant 1$，級數 $\sum_m u_{m,n}$ 的絕對收斂性蘊含 $\sum_m u_{m,n}$ 收斂，而且滿足

$$\left\|\sum_m u_{m,n}\right\|\leqslant\sum_m\|u_{m,n}\|.$$

那麼，$\sum_n\sum_m\|u_{m,n}\|$ 的收斂會蘊含 $\sum_n\|\sum_m u_{m,n}\|$ 的收斂，再蘊含 $\sum_n(\sum_m u_{m,n})$ 的收斂。由於我們證明了 (1) 和 (2) 是等價的，式 (6.18) 的左方也是定義良好的。

再來，我們要證明式 (6.18)。定義

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} u_{p,q},$$

並證明 S_n 會收斂到式 (6.18) 的右方，我們再使用對稱性來總結。令

$$\forall m, q \geqslant 1, \quad a_{m,q} = \sum_{p=1}^{m} u_{p,q} \quad \text{以及} \quad \forall q \geqslant 1, \quad a_q = \sum_{p\geqslant 1} u_{p,q}.$$

令 $\varepsilon > 0$ 以及 $Q \geqslant 1$ 滿足 $\sum_{q\geqslant Q} A_q \leqslant \varepsilon$。那麼，對於 $n \geqslant Q$，我們有

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q - S_n = \sum_{q=1}^{\infty} a_q - \sum_{q=1}^{n} a_{n,q} = \sum_{q=1}^{Q}(a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=Q+1}^{n}(a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=n+1}^{\infty} a_q.$$

我們注意到，對於 $q \geqslant 1$，我們有 $\|a_q\| \leqslant A_q$ 而且對於 $q \geqslant Q$，我們有 $\|a_q - a_{n,q}\| = \left\|\sum_{p\geqslant n+1} u_{p,q}\right\| \leqslant A_q$。因此，上面的不等式給我們

$$\left\|\sum_{q=1}^{\infty} a_q - S_n\right\| \leqslant \left\|\sum_{q=1}^{Q}(a_q - a_{n,q})\right\| + \sum_{q=Q+1}^{\infty} A_q \leqslant \left\|\sum_{q=1}^{Q}(a_q - a_{n,q})\right\| + \varepsilon.$$

由於對每個 $q \geqslant 1$，我們有 $a_{n,q} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_q$，藉由對 $n \to \infty$ 取 $\limsup$，我們得到

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|\sum_{q=1}^{\infty} a_q - S_n\right\| \leqslant \varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 的選擇可以任意小，我們得到

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|\sum_{q=1}^{\infty} a_q - S_n\right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{q=1}^{\infty} a_q - S_n\right\| = 0,$$

也就是說 $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{q=1}^{\infty} a_q$。 □

第八節　無窮積

第一小節 收斂性與發散性

令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中的序列。我們可以定義序列 $(P_n)_{n\geqslant 0}$ 如下：

$$P_0 = 1, \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k, \quad \forall n \geqslant 1.$$

對於每個 $n \geqslant 1$，我們稱 u_n 為無窮積 $\prod u_n$ 的第 n 個因子，以及 P_n 為無窮積 $\prod u_n$ 的第 n 個部份積。

定義 6.8.1 ： 無窮積 $\prod u_n$ 收斂與發散的概念由下面敘述所給定。

(1) 如果有無窮多個因子 u_n 為零，那麼我們說無窮積 $\prod u_n$ 發散至零。

(2) 如果對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $u_n \neq 0$，我們有下面情況：

(a) 如果 $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \neq 0$，則我們說無窮積收斂至 P，並記 $P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$；

(b) 如果 $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，則我們說無窮積發散至 0；

(c) 其他狀況下，我們說無窮積發散。

(3) 如果存在 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $u_n \neq 0$，讓我們定義

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = u_{n+N-1},$$

以及他所對應到的部份積 $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ 如下：

$$P'_0 = 1, \quad P'_n = \prod_{k=1}^{n} v_k = \prod_{k=N}^{N+n-1} u_k, \quad \forall n \geqslant 1.$$

(a) 如果無窮積 $\prod v_n$ 收斂到 $P \neq 0$，則我們說無窮積 $\prod u_n$ 收斂到 $u_1 \ldots u_{N-1} P$ 並把他的極限記作

$$\prod_{n\geqslant 1} u_n := u_1 \ldots u_{N-1} \prod_{n\geqslant N} u_n = u_1 \ldots u_{N-1} \prod_{n\geqslant 1} v_n;$$

(b) 如果無窮積 $\prod v_n$ 發散至 0，則我們說無窮積 $\prod u_n$ 發散至 0；

(c) 其他狀況下，我們說無窮積 $\prod u_n$ 發散。

註解 6.8.2 ： 從定義 6.8.1 ，我們看到如果我們在無窮積中加入或移除有限多個零，我們不會改變他收斂或發散的行為。

命題 6.8.3 【柯西條件】 ： 無窮積 $\prod u_n$ 收斂若且唯若對於所有 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \forall k \geqslant 1, \quad |u_{n+1} \ldots u_{n+k} - 1| < \varepsilon. \tag{6.19}$$

證明： 如果我們從 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 中移除有限多個零，我們並不會改變 $\prod u_n$ 收斂的概念以及條件式 (6.19)，因此我們可以假設對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $u_n \neq 0$。

- 假設 $\prod u_n$ 收斂。令

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k \neq 0.$$

這代表著 $\prod u_n$ 的部份積 $(P_n)_{n\geqslant 0}$ 有下界，我們記 $M > 0$ 為其中一個下界。令 $\varepsilon > 0$，根據系理 6.1.11 中，對於序列的柯西條件，我們能找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \forall k \geqslant 1, \quad |P_{n+k} - P_n| < \varepsilon M,$$

如果把上式除掉 $|P_n|$，我們會得到

$$\forall n \geqslant N, \forall k \geqslant 1, \quad \left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

這剛好就是式 (6.19)。

- 假設對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得條件式 (6.19) 成立。令 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，並取 $N \geqslant 1$ 使得式 (6.19) 會成立。這證明了對於每個 $n \geqslant N$，我們有 $u_n \neq 0$。對於 $n \geqslant N$，令 $Q_n = \prod_{k=N+1}^{n} u_k$。從式 (6.19)，我們能推得 $\frac{1}{2} < |Q_n| < \frac{3}{2}$ 對於所有 $n \geqslant N$。此外，對於每個 $n \geqslant N$ 和 $k \geqslant 1$，我們也有

$$\left| \frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |Q_{n+k} - Q_n| < \varepsilon |Q_n| < \frac{3}{2}\varepsilon.$$

這代表著序列 $(Q_n)_{n\geqslant N}$ 滿足柯西條件，所以收斂。這也代表積 $\prod u_n$ 收斂。

□

定理 6.8.4 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為一般項嚴格為正的序列。那麼，無窮積 $\prod(1+a_n)$ 收斂若且唯若級數 $\sum a_n$ 收斂。

證明： 無窮積 $\prod(1+a_n)$ 的收斂與級數 $\sum \ln(1+a_n)$ 的收斂等價。

- 如果 $\sum \ln(1+a_n)$ 收斂，這代表著 $\ln(1+a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，所以 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。因此，當 $n\to\infty$ 時，我們有等價關係 $\ln(1+a_n) \sim a_n$。我們利用定理 6.2.8 來得到級數 $\sum a_n$ 會收斂。
- 如果級數 $\sum a_n$ 收斂，那麼 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。那麼，我們可以以相同方式總結。

□

註解 6.8.5 ：

(1) 如果 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 當中有些項為零，那麼 $\sum a_n$ 和 $\prod(1+a_n)$ 的值都不會改變。因此，我們可以合理假設序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 不包含任何零項。

(2) 當 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 是個一般項嚴格為負的序列時，相同的敘述也會成立。

(3) 假設序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的正負號不會變化是很重要的。例如，我們可以考慮 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 對於 $n\geqslant 1$。

- $\sum a_n$ 是個交錯級數，因此根據定理 6.4.2 ，他會收斂。
- 對於每個 $n\geqslant 1$，我們有

$$(1+a_{2n})(1+a_{2n+1}) = \Big(1+\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big)\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big) = 1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \text{當 } n\to\infty.$$

由於 $\sum \frac{1}{n}$ 發散，無窮積 $\prod(1+a_{2n})(1+a_{2n+1})$ 也會發散。

定義 6.8.6 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為複數非零序列。如果 $\prod(1+|a_n|)$ 收斂，則我們說無窮積 $\prod(1+a_n)$ 絕對收斂。

定理 6.8.7 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為複數非零序列。如果無窮積 $\prod(1+a_n)$ 絕對收斂，那麼他會收斂。

證明：讓我們來檢查命題 6.8.3 所提供的柯西條件。對於每個 $n,k\geqslant 1$，根據三角不等式，我們有

$$\left|\prod_{j=1}^{k}(1+a_{n+j})-1\right|\leqslant\prod_{j=1}^{k}(1+|a_{n+j}|)-1.$$

因此，如果無窮積 $\prod(1+|a_n|)$ 滿足柯西條件，$\prod(1+a_n)$ 也會。 □

第二小節 在黎曼 ζ 函數上的應用

令 $(p_k)_{k\geqslant 1}$ 為由排序好的質數所定義出來的序列，也就是說 $p_1=2$、$p_2=3$、$p_3=5$ 等等。

定理 6.8.8 【尤拉積】： 對於 $s>1$，我們有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

此外，上式中的無窮積會絕對收斂。

證明：對於 $n\geqslant 1$，我們把第 n 個部份積記作

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-p_k^{-s}}. \tag{6.20}$$

我們的目的是證明 $P_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\zeta(s)$。

讓我們固定整數 $n\geqslant 1$。我們可以把式 (6.20) 右式中的每一個項展開為級數，也就是說：

$$\forall k\geqslant 1,\quad \frac{1}{1-p_k^{-s}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{ms}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p_k^{ms}} \tag{6.21}$$

還有

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{ms}}=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{m_1 s}\dots p_n^{m_n s}}.$$

對於每個 $n \geqslant 1$，令

$$A_n = \{N \in \mathbb{N} : N \text{ 所有的質因數都在 } p_1, \ldots, p_n \text{ 當中}\}.$$

根據質數分解定理的唯一性，我們知道

$$P_n = \sum_{N \in A_n} \frac{1}{N^s}.$$

因此

$$|P_n - \zeta(s)| \leqslant \sum_{N \geqslant p_{n+1}} \frac{1}{N^s}, \tag{6.22}$$

這是因為定義級數 $\zeta(s)$ 當中的每一項皆是正的。由於 $\sum \frac{1}{N^s}$ 收斂，他的餘項會趨近於零，所以式 (6.22) 的右方趨近於零，也就是 $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta(s)$。

對於每個 $k \geqslant 1$，我們可以把式 (6.21) 中的級數改寫為 $1 + a_k$。級數 $\sum a_k$ 會絕對收斂，因為他所有的項皆為正，而且 $\zeta(s)$ 是他一個上界。最後，我們使用定理 6.8.4 來推得無窮積 $\prod(1 + a_k)$ 會絕對收斂。 $\square$