7 Complements on Riemann Integrals

第七章 黎曼積分的補充

7.1 Riemann integrability on an interval

7.1.1 Setting

In the theory of Riemann–Stieltjes integrals that we saw in Section 5.2, both the integrand and the integrator needed to be defined and bounded on a segment. However, it is not always the case that the integrand is bounded, or the domain of integration is a compact subset of $\mathbb{R}$. In this chapter, we take the Riemann integrals as example, to see how to make sense of Riemann integrals, in the case that the domain of definition is a general interval, or the integrand is not a bounded function.

For the integrand, we are going to take them to be *piecewise continuous functions*; and for the domain of definition, we only consider the intervals of the following forms,

$$\begin{aligned} &[a,b) \quad \text{for } -\infty < a < b \leqslant +\infty, \\ &(a,b] \quad \text{for } -\infty \leqslant a < b < +\infty, \\ &(a,b) \quad \text{for } -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty. \end{aligned}$$

We note that we allow $a = -\infty$ if the interval is open on the left side; $b = +\infty$ if the interval is open on the right side. From the theory for the intervals of $[a,b)$ type, we deduce easily the theory for the intervals of $(a,b]$ type by symmetry; then, for the intervals of (a,b) type, we decompose them into $(a,c] \cup [c,b)$, where $c \in (a,b)$. Therefore, in what follows, to study general intervals, it is actually sufficient to study only the intervals of $[a,b)$ type.

We also recall that we are only interested in real-valued functions here, since for functions taking values in a finite-dimensional vector space, we follow the decomposition as in Remark 5.2.2 (6), and define the corresponding integral on a general interval by linearity.

Definition 7.1.1 :

- A function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is said to be *piecewise continuous on the segment* $[a,b]$ if there exists a partition $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{P}([a,b])$ such that for every $1 \leqslant k \leqslant n$, the restriction of f on the open subinterval (x_{k-1}, x_k) can be extended to a continuous function on $[x_{k-1}, x_k]$.
- Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a subset. A function $f : I \to \mathbb{R}$ is said to be *piecewise continuous on* I if for any segment $J \subseteq I$, the restricted function $f_{|J}$ is piecewise continuous on J.
- For any subset $I \subseteq \mathbb{R}$, we write $\mathcal{PC}(I,\mathbb{R})$ for the set of functions that are piecewise continuous on I.
- For any normed vector space $(W, \|\cdot\|)$, we may define the space $\mathcal{PC}(I,V)$ of piecewise continuous functions with values in W in a similar way.

第一節 區間上的黎曼可積性

第一小節 設定

在第 5.2 節中我們所看到的 Riemann–Stieltjes 積分理論中，積分函數與被積分函數都要求被定義在線段上，而且有界。然而，在一般的情況下，有界的條件未必會被滿足，或是被積分的區域未必會是 $\mathbb{R}$ 的緊緻子集合。在這章中，我們取黎曼積分為例子，來看在一般的區間上面，或是當被積分函數不是個有界函數時，如何定義黎曼積分。

這裡的積分函數，我們會把他們取為片段連續函數；而積分區間的部份，我們只考慮下列形式的區間：

$$\begin{aligned} &[a,b) \quad 對於 \ -\infty < a < b \leqslant +\infty, \\ &(a,b] \quad 對於 \ -\infty \leqslant a < b < +\infty, \\ &(a,b) \quad 對於 \ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty. \end{aligned}$$

我們注意到，當區間在左方是開的，我們允許選擇 $a = -\infty$；當區間在右方是開的，我們允許選擇 $b = +\infty$。從區間形式為 $[a,b)$ 的理論，藉由對稱性，我們可以輕易推得區間形式為 $(a,b]$ 的情況；接著，對於區間為 (a,b) 的形式，我們把他們分解為 $(a,c] \cup [c,b)$，其中 $c \in (a,b)$。因此，在接下來的討論中，要討論一般區間上的性質，我們只需要討論 $[a,b)$ 這種類型區間上的性質就可以了。

我們也再次提醒，我們只對取值為實數的函數有興趣，因為對於任何取值在有限維度向量空間中的函數，我們可以使用如同在註解 5.2.2 (6) 中所提到分解，並透過線性方式來定義積分。

定義 7.1.1 ：

- 給定函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$。如果存在分割 $P = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant n$，函數 f 限制在開區間 (x_{k-1}, x_k) 上可以被延拓為在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的連續函數，則我們說 f 是個在線段 $[a,b]$ 上片段連續的函數。
- 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為子集合。給定函數 $f : I \to \mathbb{R}$。如果對於每個線段 $J \subseteq I$，限制函數 $f_{|J}$ 是個在 J 上片段連續的函數，則我們說 f 是個在 I 上片段連續的函數。
- 對於任意子集合 $I \subseteq \mathbb{R}$，我們把 $\mathcal{PC}(I,\mathbb{R})$ 記為由在 I 上片段連續的函數所構成的集合。
- 同理，對於任意賦範向量空間 $(W, \|\cdot\|)$，我們可以定義 $\mathcal{PC}(I,V)$ 為取值在 W 中片段連續數所構成的集合。

Example 7.1.2 :

(1) The function $x \mapsto \frac{1}{x}$ is piecewise continuous on $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(2) The function $x \mapsto \ln x$ is piecewise continuous on $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$.

Proposition 7.1.3 : *Let $I = [a, b]$ be a segment of $\mathbb{R}$. Any piecewise continuous function $f : I \to \mathbb{R}$ on I is bounded and Riemann-integrable on I.*

Proof : Let $f \in \mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ with $I = [a, b]$ which is a segment. By definition, for every $1 \leqslant k \leqslant n$, there is a continuous function $g : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ such that $f_{|(x_{k-1},x_k)} \equiv g_{|(x_{k-1},x_k)}$. Since g is integrable on $[x_{k-1}, x_k]$, so is f, see Corollary 5.3.22. And we apply Proposition 5.2.10 to conclude that f is integrable on $[a, b]$. □

7.1.2 Integrability on an interval

We saw in Theorem 6.1.16 that for a series with values in a Banach space $(W, \|\cdot\|)$, if it converges absolutely, then it converges. And if it does not converge absolutely, by rearranging the terms, we are able to get any value as limit, see Theorem 6.5.5. When it comes to the Riemann integration on a general interval, we encounter similar phenomena. Actually, for a piecewise continuous function on a general interval I, its integral on any subsegment can be defined thanks to Proposition 7.1.3, then by taking larger and larger subsegments to cover the whole interval, we have a chance to get a meaningful limit, that we want to define as the integral on I. This limit may not be defined uniquely if we do not have *absolute convergence*. To make things simpler, we start with absolutely convergent integrals, which bring us back to study non-negative integrands. Later in Section 7.2.2, we will discuss the situation without the absolute convergence.

Let I be an interval, and denote by $\mathcal{PC}_+(I) = \mathcal{PC}_+(I, \mathbb{R}) := \mathcal{PC}(I, \mathbb{R}_+)$ the set of non-negative piecewise continuous functions on I.

Definition 7.1.4 : Let $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ be a non-negative piecewise continuous function on I. We say that f is *integrable* on I if there exists $M \geqslant 0$ such that $\int_J f \leqslant M$ for any segment $J \subseteq I$, and we write

$$\int_I f = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ is a segment}}} \int_J f. \tag{7.1}$$

Remark 7.1.5 : If $a = \inf I$ and $b = \sup I$, we may also rewrite the integral in Eq. (7.1) as follows,

$$\int_a^b f = \int_I f.$$

Note that in the case that the interval is a segment $I = [a, b]$, and the function f is a non-negative piecewise continuous, the definition of integrability in Eq. (7.1) coincides with the notion of integrability in Definition

範例 7.1.2 ：

(1) 函數 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上是片段連續的。

(2) 函數 $x \mapsto \ln x$ 在 $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$ 上是片段連續的。

命題 7.1.3 ： 令 $I = [a, b]$ 為 $\mathbb{R}$ 中的線段。任意在 I 上片段連續的函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 是有界的，且在 I 上黎曼可積。

證明： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ 其中 $I = [a, b]$ 是個線段。根據定義，對於每個 $1 \leqslant k \leqslant n$，存在連續函數 $g : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ 使得 $f_{|(x_{k-1},x_k)} \equiv g_{|(x_{k-1},x_k)}$。由於 g 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是可積的，所以 f 也是，見系理 5.3.22 。接著我們使用命題 5.2.10 來總結 f 在 $[a, b]$ 上是可積的。 □

第二小節 在區間上的可積性

在定理 6.1.16 中，我們看到對於取值在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的級數來說，如果他會絕對收斂，則也會收斂。如果他不會絕對收斂，那麼藉由重排級數中的項，則他的極限可以是任何的值，見定理 6.5.5 。當我們要討論在一般區間上的黎曼積分時，我們也會遇到類似的現象。事實上，對於定義在一般區間 I 上的片段連續的函數來說，從命題 7.1.3 我們得知，他在任何子線段上的積分都是定義良好的。接著，如果我們取越來越長的子線段來覆蓋整個區間，或許有機會得到有意義的極限，這是我們可能會想要定義為在 I 上的積分的方式。然而，如果我們沒有絕對收斂的話，這個極限未必會是唯一的。我們先從比較簡單的情況下來看，先討論會絕對收斂的積分，也就是我們要討論的是被積分函數為非負的情況。稍後在第 7.2.2 小節中，我們會討論不會絕對收斂的情況。

令 I 為區間，並記 $\mathcal{PC}_+(I) = \mathcal{PC}_+(I, \mathbb{R}) := \mathcal{PC}(I, \mathbb{R}_+)$ 為在 I 上非負片段連續函數所構成的集合。

定義 7.1.4 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。如果存在 $M \geqslant 0$ 使得對於任意區間 $J \subseteq I$，我們有 $\int_J f \leqslant M$，則我們說 f 在 I 上是可積的，這樣的情況下，我們記

$$\int_I f = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J\text{是個線段}}} \int_J f. \tag{7.1}$$

註解 7.1.5 ： 如果 $a = \inf I$ 且 $b = \sup I$，我們也可以把式 (7.1) 中的積分改寫如下：

$$\int_a^b f = \int_I f.$$

我們注意到，當區間是個線段 $I = [a, b]$，且函數 f 是個非負片段連續函數時，式 (7.1) 中定義出來的可積分性，與定義 5.2.1 中的可積分性，在 $\alpha(x) = x$ 時 (RS) 條件會成立，這是等價的。

5.2.1, in the sense that (RS) condition is satisfied with $\alpha(x) = x$.

Proposition 7.1.6 : *Let $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ be a non-negative integrable function on I. Then, for any sequence $(J_n = [a_n, b_n])_{n\geqslant 1}$ of segments with*

$$\forall n \geqslant 1, \quad J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq I \quad \text{and} \quad \bigcup_{n\geqslant 1} J_n = I, \tag{7.2}$$

we have

$$\int_I f = \sup_{n\geqslant 1} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proof : Let us consider a sequence $(J_n)_{n\geqslant 1}$ of segments satisfying Eq. (7.2). We want to show that the limit of $\int_{J_n} f$ is equal to $\int_I f$ defined in Eq. (7.1).

- For every $n \geqslant 1$, we have $J_n \subseteq I$, since f is non-negative, we have $\int_{J_n} f \leqslant \int_I f$. By taking $\limsup$ on n, we find
$$\limsup_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f.$$
- Given $\varepsilon > 0$. By the characterization of supremum, Eq. (7.1) tells us there exists a segment $J = [a, b] \subseteq I$ such that $\int_J f + \varepsilon \geqslant \int_I f$. Since $a, b \in I = \bigcup_{n\geqslant 1} J_n$, there exists $N \geqslant 1$ such that $a, b \in J_n$ for all $n \geqslant N$. Therefore, for $n \geqslant N$, we have
$$\int_{J_n} f \geqslant \int_J f \geqslant \int_I f - \varepsilon.$$
In other words,
$$\liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \geqslant \int_I f - \varepsilon.$$
Since $\varepsilon > 0$ can be made arbitrarily small, we find
$$\liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \geqslant \int_I f.$$

In conclusion, we have

$$\int_I f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f,$$

that is $\lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f = \int_I f$. □

命題 7.1.6 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上的非負可積函數。那麼，對於任意線段序列 $(J_n = [a_n, b_n])_{n\geqslant 1}$ 且滿足

$$\forall n \geqslant 1, \quad J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq I \quad \text{以及} \quad \bigcup_{n\geqslant 1} J_n = I, \tag{7.2}$$

我們會有

$$\int_I f = \sup_{n\geqslant 1} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

證明： 讓我們考慮線段序列 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足式 (7.2)。我們想要證明 $\int_{J_n} f$ 的極限與定義在式 (7.1) 中的 $\int_I f$ 相等。

- 對於每個 $n \geqslant 1$，我們有 $J_n \subseteq I$，由於 f 是非負的，我們有 $\int_{J_n} f \leqslant \int_I f$。藉由對 n 取 $\limsup$，我們得到
$$\limsup_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f.$$
- 給定 $\varepsilon > 0$。藉由最小上界的刻劃，式 (7.1) 告訴我們存在線段 $J = [a, b] \subseteq I$ 使得 $\int_J f + \varepsilon \geqslant \int_I f$。由於 $a, b \in I = \bigcup_{n\geqslant 1} J_n$，會存在 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，我們有 $a, b \in J_n$。因此，對於 $n \geqslant N$，我們有
$$\int_{J_n} f \geqslant \int_J f \geqslant \int_I f - \varepsilon.$$
換句話說，
$$\liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \geqslant \int_I f - \varepsilon.$$
由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得到
$$\liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \geqslant \int_I f.$$

總結來說，我們得到

$$\int_I f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f,$$

也就是說 $\lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f = \int_I f$。 □

Example 7.1.7 : Below we give examples of non-negative continuous integrable / non-integrable functions.

(1) For $\lambda > 0$, the function $t \mapsto e^{-\lambda t}$ is integrable on $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. To see this, let us fix $\lambda > 0$ and take $J_n = [0, n]$ for all $n \geqslant 1$. For every $n \geqslant 1$, we have

$$\int_{I_n} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^n = \frac{1-e^{-\lambda n}}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

The condition in Definition 7.1.4 is indeed satisfied.

(2) The function $x \mapsto |\sin x|$ is not integrable. In fact, for every $k \in \mathbb{N}_0$, we have

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2.$$

Therefore,

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \int_0^{n\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2n,$$

which cannot be bounded uniformly in n.

Example 7.1.8 (Riemann's integrals) **:** We study the integrability of functions $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) For any $a > 0$, the function $t \mapsto t^{-\alpha}$ is integrable on $[a, +\infty)$ if and only if $\alpha > 1$.

(2) For any $a > 0$, the function $t \mapsto t^{-\alpha}$ is integrable on $(0, a]$ if and only if $\alpha < 1$.

(3) For $a < b$, the function $t \mapsto (b-t)^{-\alpha}$ is integrable on $[a, b)$ if and only if $\alpha < 1$.

(4) For $a < b$, the function $t \mapsto (t-a)^{-\alpha}$ is integrable on $(a, b]$ if and only if $\alpha < 1$.

Example 7.1.9 (Bertrand's integrals) **:** We study the integrability of functions $t \mapsto t^{-\alpha}|\ln t|^{-\beta}$ for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) For any $a > 1$, it is integrable on $[a, +\infty)$ if and only if (i) $\alpha > 1$ or (ii) $\alpha = 1$ and $\beta > 1$.

(2) For any $a \in (0, 1)$, it is integrable on $(0, a]$ if and only if (i) $\alpha < 1$ or (ii) $\alpha = 1$ and $\beta > 1$.

See Exercise 7.2 for more details.

Definition 7.1.10 : Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $(W, \|\cdot\|)$ be a finite-dimensional Banach space[1]. A piecewise continuous function $f : I \to W$ is said to be *integrable* on I if $\|f\|$ is integrable on I in the sense of Definition 7.1.4. Given a sequence $(J_n)_{n\geqslant 1}$ of segments in I satisfying Eq. (7.2), we may define

$$\int_I f := \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f \in W. \tag{7.3}$$

範例 7.1.7 ： 下面我們給出非負連續可積與不可積函數的例子。

(1) 對於 $\lambda > 0$，函數 $t \mapsto e^{-\lambda t}$ 在 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上是可積的。我們可以固定 $\lambda > 0$，對於所有 $n \geqslant 1$，取 $J_n = [0, n]$。對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{I_n} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^n = \frac{1-e^{-\lambda n}}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

在定義 7.1.4 中的條件的確是滿足的。

(2) 函數 $x \mapsto |\sin x|$ 是不可積的。事實上，對於每個 $k \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2.$$

因此，

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \int_0^{n\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2n,$$

而這無法對 n 均勻去控制。

範例 7.1.8 【黎曼積分】 ： 對於 $\alpha \in \mathbb{R}$，我們討論函數 $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ 的可積性。

(1) 對於任意 $a > 0$，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $[a, +\infty)$ 上可積，若且唯若 $\alpha > 1$。

(2) 對於任意 $a > 0$，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $(0, a]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

(3) 對於 $a < b$，函數 $t \mapsto (b-t)^{-\alpha}$ 在 $[a, b)$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

(4) 對於 $a < b$，函數 $t \mapsto (t-a)^{-\alpha}$ 在 $(a, b]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

範例 7.1.9 【Bertrand 積分】 ： 對於 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，我們討論函數 $t \mapsto t^{-\alpha}|\ln t|^{-\beta}$ 的可積性。

(1) 對於任意 $a > 1$，他在 $[a, +\infty)$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha > 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$。

(2) 對於 $a \in (0, 1)$，他在 $(0, a]$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha < 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$。

在習題 7.2 中我們會討論更多細節。

定義 7.1.10 ： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間且 $(W, \|\cdot\|)$ 為有限維度的 Banach 空間[1]。給定片段連續函數 $f : I \to W$。如果 $\|f\|$ 在 I 上是在定義 7.1.4 的意義下可積，則我們說 f 在 I 上<u>可積</u>。給定 I 中

We denote by $L^1(I,W)$ the set of piecewise continuous functions from I to W that are integrable in the sense defined here, that is

$$L^1(I,W) := \Big\{ f : I \to W : \int_I \|f\| < +\infty \Big\}.$$

Remark 7.1.11 : In Definition 7.1.10, if we take $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, we find the corresponding notion of *integrability* for real-valued functions.

Proposition 7.1.12 : *In Definition 7.1.10, the limit of the sequence $(\int_{J_n} f)_{n\geqslant 1}$ exists, and does not depend on the choice of $(J_n)_{n\geqslant 1}$, as long as $(J_n)_{n\geqslant 1}$ is chosen to satisfy Eq. (7.2).*

Remark 7.1.13 : As a direct consequence of Proposition 7.1.12,

- for an interval of type $[a,b)$ with $-\infty < a < b < +\infty$, we may consider $J_n = [a, b - \frac{1}{n}]$ for all $n \geqslant 1$;
- for an interval of type $[a,+\infty)$ with $-\infty < a < +\infty$, we may consider $J_n = [a,n]$ for all $n \geqslant 1$.

Proof : We need to check that the limit in Eq. (7.3) is well defined, and does not depend on the choice of $(J_n)_{n\geqslant 1}$.

- Let $(J_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of segments satisfying Eq. (7.2). For every $n \geqslant 1$, write $J_n = [a_n, b_n]$, let $u_n = \int_{J_n} f$ and $U_n = \int_{J_n} \|f\|$. We want to show that $(u_n)_{n\geqslant 1}$ is a Cauchy sequence. Since $(W, \|\cdot\|)$ is a Banach space, $(u_n)_{n\geqslant}$ converges.

  Let $\varepsilon > 0$. Since $\|f\|$ is integrable on I, the sequence $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converges so is a Cauchy sequence. Therefore, we may find $N \geqslant 1$ such that $|U_p - U_q| < \varepsilon$ for all $p, q \geqslant N$. This means that for $p > q \geqslant N$, we have

  $$\|u_p - u_q\| = \left\| \int_{[a_p,a_q]} f + \int_{[b_q,b_p]} f \right\| \leqslant \int_{[a_p,a_q]} \|f\| + \int_{[b_q,b_p]} \|f\| = U_p - U_q < \varepsilon.$$

  This shows that $(u_n)_{n\geqslant 1}$ is a Cauchy sequence, so converges.
- Let $(J_n)_{n\geqslant 1}$ and $(K_n)_{n\geqslant 1}$ be seuqneces of segments satisfying Eq. (7.2). From the first part of the

[1]Note that we have explained in Remark 5.2.2 how to construct the integral of $\int_J f$ in the case that J is a segment and f is a W-valued function. It is also possible to make sense of this integral if W is a general Banach space (without the finite-dimensional assumption). For example, f is continuous, we use the uniform continuity of f to appriximate it by a step function.

的線段序列 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 且滿足式 (7.2)，我們可以定義

$$\int_I f := \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f \in W. \tag{7.3}$$

我們記 $L^1(I,W)$ 為由 I 映射至 W，片段連續，且在上述意義下可積的函數所構成的集合，也就是說

$$L^1(I,W) := \Big\{ f : I \to W : \int_I \|f\| < +\infty \Big\}.$$

註解 7.1.11 ： 在定義 7.1.10 中，如果我們取 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$，我們會得到實數函數相對應到的可積性概念。

命題 7.1.12 ： 在定義 7.1.10 中，序列 $(\int_{J_n} f)_{n\geqslant 1}$ 的極限存在，且當 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足式 (7.2) 中的條件時，這個極限不取決於 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇。

註解 7.1.13 ： 命題 7.1.12 的直接應用，可以讓我們得到：

- 當 $-\infty < a < b < +\infty$ 時，對於 $[a,b)$ 型的區間，對於 $n \geqslant 1$，我們可以取 $J_n = [a, b - \frac{1}{n}]$；
- 當 $-\infty < a < +\infty$，對於 $[a,+\infty)$ 型的區間，對於 $n \geqslant 1$，我們可以取 $J_n = [a,n]$。

證明：我們要檢查式 (7.3) 中的極限是定義良好的，且不取決於 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇。

- 令 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。對於每個 $n \geqslant 1$，我們記 $J_n = [a_n, b_n]$，且令 $u_n = \int_{J_n} f$ 以及 $U_n = \int_{J_n} \|f\|$。我們想要證明 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列。由於 $(W, \|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間，$(u_n)_{n\geqslant}$ 收斂。

  令 $\varepsilon > 0$。由於 $\|f\|$ 在 I 上可積，序列 $(U_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂，所以是個柯西序列。因此，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $p, q \geqslant N$，我們有 $|U_p - U_q| < \varepsilon$。這代表著對於 $p > q \geqslant N$，我們有

  $$\|u_p - u_q\| = \left\| \int_{[a_p,a_q]} f + \int_{[b_q,b_p]} f \right\| \leqslant \int_{[a_p,a_q]} \|f\| + \int_{[b_q,b_p]} \|f\| = U_p - U_q < \varepsilon.$$

  這證明了 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列，所以會收斂。
- 令 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 與 $(K_n)_{n\geqslant 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。從證明的第一部份，我們知道下面極限

[1]我們在註解 5.2.2 當中有解釋，在 J 是個線段，且 f 取值在 W 中時，如何構造積分 $\int_J f$。事實上，當 W 是個一般的 Banach 空間時（不需要有限維度的假設），我們還是能夠定義這個積分的。舉 f 連續為例子，我們可以使用他的均勻連續性來使用階躍函數來逼近 f。

proof, we know that the following limits exist,

$$u_n := \int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} u \quad \text{and} \quad v_n := \int_{K_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

For every $n \geqslant 1$, let $L_n := J_n \cup K_n$, which is a union of two segments. We note that for small values of n, L_n might not be a segment, but for large enough n, L_n will always be a segment (non-empty intersection between J_n and K_n). Therefore, we may find $N \geqslant 1$ such that L_n is a segment for all $n \geqslant N$. Then, $(L_{n+N})_{n\geqslant 1}$ is also a sequence of segments satisfying Eq. (7.2). We may write

$$w_n := \int_{L_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} w.$$

As in the first part, let

$$\forall n \geqslant 1, \quad U_n = \int_{J_n} \|f\| \quad \text{and} \quad W_n = \int_{L_n} \|f\|.$$

We have

$$\|w_n - u_n\| = \left\| \int_{L_n \setminus J_n} f \right\| \leqslant \int_{L_n \setminus J_n} \|f\| = W_n - U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

where the last convergence comes from Proposition 7.1.6. This implies that $w = u$. Similarly, we also have $w = v$, so $u = v$. □

7.1.3 Properties

The integral on a general interval I defined in Definition 7.1.10 satisfies many properties that are also satisfied for integrals defined on segments. It can be understood by the fact that the procedure of taking the limit in Definition 7.1.10 preserves linearity. We can use the following identities safely if f is a integrable W-valued piecewise continuous function,

- Union relation: $\int_I f + \int_J f = \int_{I\cup J} f$ provided that $I \cap J = \varnothing$ and two among the three integrals are well defined.
- Triangle inequality: $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$.
- Integration by parts for $\mathcal{C}^1$ functions.
- Change of variables with respect to a $\mathcal{C}^1$ function. See Exercise A1.5 for an example where problems may arise if the change of variables is not $\mathcal{C}^1$.

Now, we are going to give a few criteria for the integrability on an interval. We start with an interval of the form $I = [a, b)$ and consider $f \in \mathcal{PC}(I, W)$, where W is a finite-dimensional Banach space. The following properties can be proven almost immediately without any technicalities, so we only state the properties, without giving any proofs.

Proposition 7.1.14 : *Let $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ be a piecewise continuous function on I. The following properties are equivalent.*

(1) f is integrable on $[a, b)$.

(2) (Partial integral) $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ is bounded on $[a, b)$.

存在：

$$u_n := \int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} u \quad 以及 \quad v_n := \int_{K_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

對於每個 $n \geqslant 1$，令 $L_n := J_n \cup K_n$，這會是兩個線段的聯集。我們注意到，對於小的 n 值，L_n 可能不會是個線段，但對大的 n 值，L_n 永遠會是個線段（J_n 和 K_n 的交集非空）。因此，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，L_n 是個線段。那麼，$(L_{n+N})_{n\geqslant 1}$ 也是個滿足式 (7.2) 的線段序列。我們會有

$$w_n := \int_{L_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} w.$$

如同在第一部份中，令

$$\forall n \geqslant 1, \quad U_n = \int_{J_n} \|f\| \quad 以及 \quad W_n = \int_{L_n} \|f\|.$$

我們有

$$\|w_n - u_n\| = \left\| \int_{L_n \setminus J_n} f \right\| \leqslant \int_{L_n \setminus J_n} \|f\| = W_n - U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

其中最後一個收斂來自命題 7.1.6。這蘊含 $w = u$。同理，我們也有 $w = v$，所以 $u = v$。□

第三小節 性質

在定義 7.1.10 中所定義，在一般區間 I 上的積分，會滿足在線段上積分的性質。這可以理解為當我們對定義 7.1.10 取極限時，線性性質會被保存。如果 f 是個取值在 W 中且可積的片段連續函數，我們可以安全地使用下列關係式：

- 聯集關係式：$\int_I f + \int_J f = \int_{I\cup J} f$ 所要求的條件是 $I \cap J = \varnothing$ 而且三個積分中的兩個要有定義。
- 三角不等式：$\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$。
- 對 $\mathcal{C}^1$ 函數的分部積分。
- 對 $\mathcal{C}^1$ 函數的變數變換。可以參考習題 A1.5 看到如果變數變換不是 $\mathcal{C}^1$ 的話，會發生什麼現象。

現在我們會給出一些在區間上可積性的判斷準則。我們從 $I = [a, b)$ 形式的區間，並考慮 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$，其中 W 是個有限維度的 Banach 空間。下面性質不需要任何技巧就可以直接證明，我們只敘述這些性質，並不給出證明。

命題 7.1.14 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數。下面性質是等價的。

(1) f 在 $[a, b)$ 上是可積的。

(2) 【部份積分】$x \mapsto \int_a^x \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ 在 $[a, b)$ 上是有界的。

(3) *(Partial integral)* $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ *has a limit when* $x \to b-$.

(4) *(Remainder integral) The limit of* $x \mapsto \int_x^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ *when* $x \to b-$ *is* 0.

(5) *(Cauchy's criterion) For* $\varepsilon > 0$, *there exists* $A \in I$ *such that*

$$\forall x, y \in [A, b), x < y, \quad \int_x^y \|f(t)\| \,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Proof : It is a direction consequence of Definition 7.1.10, Proposition 7.1.12, and Remark 7.1.13. □

Proposition 7.1.15 : *Let* $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ *be a piecewise continuous function on* I *and* $c \in \mathring{I}$. *Write* $I_- := I \cap (-\infty, c]$ *and* $I_+ := I \cap [c, +\infty)$. *Then, the following properties are equivalent.*

(1) f *is integrable on* I.

(2) f *is integrable on* I_- *and* I_+.

And in this case, we have $\int_I f = \int_{I_-} f + \int_{I_+} f$.

Proof : It is a direct consequence of the union relation. □

Proposition 7.1.16 : *Let* $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ *be a piecewise continuous function on* I *with values in a finite-dimensional Banach space* W, *and* $\varphi \in \mathcal{PC}_+(I)$ *be a non-negative piecewise continuous function on* I.

(1) *If* $\|f\| \leqslant \varphi$ *on* I *and* φ *is integrable, then* f *is integrable and we have* $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \varphi$.

(2) *If* f *takes values in* $\mathbb{R}_+$ *and is non-integrable with* $f \leqslant \varphi$, *then* φ *is non-integrable.*

Proof :

(1) For $x \in [a, b)$, we have

$$\int_a^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \varphi(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \int_I \varphi.$$

The left side in the above formula is bounded, so we can conclude by Proposition 7.1.14. Moreover, by the triangle inequality, we have $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$.

(2) By contradiction, if φ were integrable, then by (1), f would also be integrable. □

(3) 【部份積分】$x \mapsto \int_a^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ 當 $x \to b-$ 時極限是存在的。

(4) 【餘項積分】$x \mapsto \int_x^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ 當 $x \to b-$ 時的極限是 0。

(5) 【柯西準則】對於 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in I$ 使得

$$\forall x, y \in [A, b), x < y, \quad \int_x^y \|f(t)\| \,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

證明：這是定義 7.1.10 、命題 7.1.12 和註解 7.1.13 的直接結果。□

命題 7.1.15 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數且 $c \in \mathring{I}$。我們記 $I_- := I \cap (-\infty, c]$ 以及 $I_+ := I \cap [c, +\infty)$。那麼，下列性質是等價的。

(1) f 在 I 上可積。

(2) f 在 I_- 和 I_+ 上可積。

在這樣的情況下，我們有 $\int_I f = \int_{I_-} f + \int_{I_+} f$。

證明：這是聯集關係式的直接結果。□

命題 7.1.16 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上片段連續，且取值在有限維度的 Banach 空間 W 中的函數，以及 $\varphi \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。

(1) 如果在 I 上，我們有 $\|f\| \leqslant \varphi$ 且 φ 是可積的，則 f 是可積的，且我們有 $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \varphi$。

(2) 如果 f 取值在 $\mathbb{R}_+$ 中而且是不可積的，且 $f \leqslant \varphi$，則 φ 是不可積的。

證明：

(1) 對於 $x \in [a, b)$，我們有

$$\int_a^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \varphi(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \int_I \varphi.$$

上式左方是有界的，所以我們可以用命題 7.1.14 來總結。此外，根據三角不等式，我們有 $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$。

(2) 使用反證法，如果 φ 是可積的，那麼從 (1) 我們會得到 f 也是可積的。□

Example 7.1.17 : Check that the non-negative function $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ is integrable on $(0,1)$. Let us take $c = \frac{1}{2}$, $I_- = (0, \frac{1}{2}]$ and $I_+ = [\frac{1}{2}, 1)$.

- For $t \in I_-$, we have $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{t}}$. The function $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ is integrable on $(0, \frac{1}{2}]$, so is f.
- For $t \in I_+$, we have $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-t}}$. The function $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ is integrable on $[\frac{1}{2}, 1)$, so is f.

7.1.4 Comparison of integrals

We consider a finite-dimensional Banach space $(W, \|\cdot\|)$. We are going to give some comparison results for non-negative integrable and non-integrable functions. These results are analogous to those for series, see Section 6.2.1. Note that the function that we compare to needs to be *non-negative*.

Definition 7.1.18 : Let $f : [a,b) \to W$ and $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ be two piecewise continuous functions.

- We write $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$ or $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ when $x \to b$ if there exists $M > 0$ and $\delta > 0$ such that
$$\forall x \in [a,b) \cap B(b,\delta), \quad \|f(x)\| \leqslant M|g(x)|.$$
- We write $f \underset{b}{=} o(g)$ or $f(x) = g(x)$ when $x \to b$ if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that
$$\forall x \in [a,b) \cap B(b,\delta), \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$
- If $W = \mathbb{R}$, we write $f \underset{b}{\sim} g$ or $f(x) \sim g(x)$ when $x \to b$ if $f - g \underset{b}{=} o(g)$.

We recall that for convergent series with asymptotic relations for their non-negative general terms, we may compare their remainders, see Theorem 6.2.8. When it comes to non-negative integrable functions, we may compare their *remainder integrals*, as stated in the following proposition.

Proposition 7.1.19 (Comparison for integrable functions) **:** *Let $f : [a,b) \to W$ be a piecewise continuous function, and $g : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ be a non-negative integrable function. Then, the following properties hold.*

(1) *If $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, then f is integrable on $[a,b)$ and $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(\int_x^b g)$.*

(2) *If $f \underset{b}{=} o(g)$, then f is integrable on $[a,b)$ and $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o(\int_x^b g)$.*

(3) *If $W = \mathbb{R}$ and $f \underset{b}{\sim} g$, then f is integrable on $[a,b)$ and $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$.*

範例 7.1.17 ： 檢查非負函數 $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ 在 $(0,1)$ 上是可積的。讓我們取 $c = \frac{1}{2}$、$I_- = (0, \frac{1}{2}]$ 以及 $I_+ = [\frac{1}{2}, 1)$。

- 對於 $t \in I_-$，我們有 $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{t}}$。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是可積的，所以 f 也是。
- 對於 $t \in I_+$，我們有 $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-t}}$。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上是可積的，所以 f 也是。

第四小節 積分比較

我們考慮有限維度的 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$。我們接著會對非負可積與不可積函數，給出比較的結果。這些結果與級數的結果相似，見第 6.2.1 小節。注意到，我們要比較的對象函數需要是非負的。

定義 7.1.18 ： 令 $f : [a,b) \to W$ 以及 $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ 為兩個片段連續函數。

- 如果存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得
$$\forall x \in [a,b) \cap B(b,\delta), \quad \|f(x)\| \leqslant M|g(x)|,$$
則我們記 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$ 或是 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ 當 $x \to b$。
- 如果對於 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得
$$\forall x \in [a,b) \cap B(b,\delta), \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$
我們記 $f \underset{b}{=} o(g)$ 或 $f(x) = g(x)$ 當 $x \to b$。
- 如果 $W = \mathbb{R}$ 且 $f - g \underset{b}{=} o(g)$，則我們記 $f \underset{b}{\sim} g$ 或 $f(x) \sim g(x)$ 當 $x \to b$。

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會收斂，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的餘項。當我們有非負可積函數時，我們能夠比較他們的餘項積分，如同下面命題所描述的。

命題 7.1.19 【可積函數的比較】 ： 令 $f : [a,b) \to W$ 為片段連續函數以及 $g : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ 為非負可積函數，則下列性質成立。

(1) 如果 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(\int_x^b g)$。

(2) 如果 $f \underset{b}{=} o(g)$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o(\int_x^b g)$。

(3) 如果 $W = \mathbb{R}$ 而且 $f \underset{b}{\sim} g$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$。

Remark 7.1.20 :

(1) We insist again that these comparison results are only valid for a non-negative function g. It is possible to have $f \sim_b g$ but the integrals $\int_a^b f$ and $\int_a^b g$ have different behaviors. The same phenomenon also occurs for series, we recall the result from Remark 6.2.4. For the integrals, we will give a corresponding counterexample later, see Example 7.2.16.

(2) We note that these comparison relations are "preserved" by taking a primitive. However, we do not have a similar result for derivatives. For example, $t \mapsto t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ is integrable on $(0,1]$ and is $o(t)$ when $t \to 0+$. From Proposition 7.1.19 (2), we know that

$$\int_0^x t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to 0+}{=} o(x^2).$$

But the following derivative is clearly not $o(1)$, because is not convergent when $t \to 0+$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{3}{2}t^{1/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right) - t^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

Proof :

(1) By assumption, there exists $M > 0$ and $\delta > 0$ such that

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant Mg(t).$$

Therefore, for any $x \in [b-\delta, b)$, we have

$$\left\|\int_x^b f\right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant M\int_x^b g,$$

which is what we want to show.

(2) Let $\varepsilon > 0$. By assumption, there exists $\delta > 0$ such that

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon g(t).$$

Therefore, for any $x \in [b-\delta, b)$, we have

$$\left\|\int_x^b f\right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant \varepsilon\int_x^b g,$$

which is what we want to show.

(3) Suppose $f \underset{b}{\sim} g$. This means that $f - g \underset{b}{=} o(g)$. Then we apply the result from (2) to conclude that

$$\int_x^b (f-g) \underset{x\to b}{=} o\Big(\int_x^b g\Big) \Leftrightarrow \int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g.$$

□

註解 7.1.20 ：

(1) 我們再次強調這些比較結果只有對非負函數 g 來說是會成立的。我們可以有 $f \sim_b g$ 但積分 $\int_a^b f$ 和 $\int_a^b g$ 有不一樣的行為。在級數的情況下，相同現象也會發生，我們不要忘記在註解 6.2.4 中所看到的結果。對於積分來說，我們稍後會在範例 7.2.16 給出對應的反例。

(2) 我們注意到這些比較關係，在我們取原函數時，是會被「保存」的。然而，在微分時我們不會有這類的結果。例如，函數 $t \mapsto t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $(0,1]$ 上是可積的，且當 $t \to 0+$ 時會是 $o(t)$。從命題 7.1.19 (2)，我們知道

$$\int_0^x t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to 0+}{=} o(x^2).$$

但下面微分顯然不是 $o(1)$，因為在 $t \to 0+$ 時不會收斂：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{3}{2}t^{1/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right) - t^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

證明：

(1) 根據假設，存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant Mg(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b-\delta, b)$，我們有

$$\left\|\int_x^b f\right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant M\int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon > 0$。根據假設，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b-\delta, b)$，我們有

$$\left\|\int_x^b f\right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant \varepsilon\int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \underset{b}{\sim} g$。這代表著 $f - g \underset{b}{=} o(g)$。接著我們可以使用 (2) 的結果來總結

$$\int_x^b (f-g) \underset{x\to b}{=} o\Big(\int_x^b g\Big) \Leftrightarrow \int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g.$$

□

Example 7.1.21 : The Gamma function Γ is defined by

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

The function $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ is continuous on $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$.

- Around 0. When $t \to 0$, we have $f(t) \sim t^{x-1}$. Since $x - 1 > -1$, by Riemann's integral (Example 7.1.8) and the comparison for integrable functions (Proposition 7.1.19), we deduce that f is integrable around 0.
- Around $+\infty$. We have
$$t^{x-1}e^{-t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad \text{when } t \to \infty.$$
Since the function $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ is integrable around $+\infty$, by the comparison for integrable functions (Proposition 7.1.19), we deduce that f is integrable around $+\infty$.

In conclusion, the Gamma function $\Gamma(x)$ is well defined for all $x > 0$. We may check some values taken by the Gamma function: $\Gamma(1) = 1$ (direct computation), $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Gaussian integral up to a change of variables, see Exercise A1.6). Additionally, by an integration by parts, we may show that

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0. \tag{7.4}$$

You may find more properties and a characterization of the Gamma function in Exercise 7.9.

Example 7.1.22 : Our goal is to find an asymptotic expression of $\arccos x$ around $x = 1$. First, note that

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos x.$$

Then, we note that the following equivalent relation,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}, \quad \text{when } t \to 1.$$

Since $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ is integrable on $[0,1)$, by Proposition 7.1.19 (3), when $x \to 1$, we find that

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \sim \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2(1-x)}, \quad \text{when } x \to 1.$$

Example 7.1.23 : The following is the Gaussian integral, whose value was computed in Exercise A1.6,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = 1.$$

範例 7.1.21 ： Gamma 函數 Γ 定義如下：

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

函數 $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ 在 $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ 上是連續的。

- 在 0 附近。當 $t \to 0$，我們有 $f(t) \sim t^{x-1}$。由於 $x-1 > -1$，根據黎曼積分（範例 7.1.8）以及可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 0 附近是可積的。
- 在 $+\infty$ 附近。我們有
$$t^{x-1}e^{-t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad 當\ t \to \infty.$$
由於函數 $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ 在 $+\infty$ 附近是可積的，根據可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 $+\infty$ 附近是可積的。

我們可以總結 Gamma 函數 $\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 來說是定義良好的。我們可以檢查 Gamma 函數在一些點的取值：$\Gamma(1) = 1$（直接計算）、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$（變數變換後是個高斯積分，見習題 A1.6）。此外，透過分部積分，我們可以證明

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0. \tag{7.4}$$

在習題 7.9 中，我們會看到更多 Gamma 函數的性質以及他的一個刻劃。

範例 7.1.22 ： 我們的目標是找到 $\arccos x$ 在 $x = 1$ 附近的漸進表示式。首先，我們注意到

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos x.$$

接著，我們有下面這個等價關係：

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}, \quad 當\ t \to 1.$$

由於 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0,1)$ 上是可積的，從命題 7.1.19 (3)，我們知道當 $x \to 1$ 時，我們會有

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \sim \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2(1-x)}, \quad 當\ x \to 1.$$

範例 7.1.23 ： 下面是高斯積分，我們在習題 A1.6 中有計算過他的值：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = 1.$$

Let us estimate the tail of the above integral

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad \text{when } x\to\infty.$$

(1) First, we have the following asymptotic comparison,

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = o(te^{-\frac{t^2}{2}}), \quad \text{when } t\to\infty.$$

It follows from Proposition 7.1.19 (2) that, when $x\to\infty$, we have

$$F(x) = o\Big(\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\Big) = o\Big(\Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_x^\infty\Big) = o\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big).$$

(2) To get a more precise asymptotic formula for $F(x)$ when $x\to\infty$, we may start with an integration by parts. We write

$$\sqrt{2\pi}F(x) = \int_x^\infty \frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\right]_{t=x}^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Moreover, we have

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right) = o(F(x)), \quad \text{when } x\to\infty,$$

we deduce that

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(1+o(1)), \quad \text{when } x\to\infty.$$

By induction, you may show that for any $n\geqslant 0$,

$$\sqrt{2\pi}F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right) + (-1)^{n+1}(2n+1)!!\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t,$$

which implies that

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right)(1+o(1)), \quad \text{when } x\to\infty.$$

We recall that for divergent series with asymptotic relations for their non-negative general terms, we may compare their partial sums, see Theorem 6.2.8. When it comes to non-negative non-integrable functions, we may compare their *partial integrals*, as stated in the following proposition.

讓我們來估計上面這個積分的尾巴：

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad 當\ x\to\infty.$$

(1) 首先，我們有下面這個漸進比較關係：

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = o(te^{-\frac{t^2}{2}}), \quad 當\ t\to\infty.$$

從命題 7.1.19 (2) 我們得知，當 $x\to\infty$ 是，會有

$$F(x) = o\Big(\int_x^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\Big) = o\Big(\Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_x^\infty\Big) = o\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big).$$

(2) 如果在 $x\to\infty$ 時，想要得到更詳細 $F(x)$ 的漸進式，我們可以從分部積分開始。我們寫

$$\sqrt{2\pi}F(x) = \int_x^\infty \frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\right]_{t=x}^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

此外，我們有

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right) = o(F(x)), \quad 當\ x\to\infty,$$

因此我們推得

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(1+o(1)), \quad 當\ x\to\infty.$$

透過遞迴，你可以證明對於任意 $n\geqslant 0$，我們有

$$\sqrt{2\pi}F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right) + (-1)^{n+1}(2n+1)!!\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t,$$

這會蘊含

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right)(1+o(1)), \quad 當\ x\to\infty.$$

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會發散，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的部份和。當我們有非負不可積函數時，我們能夠比較他們的部份積分，如同下面命題所描述的。

Proposition 7.1.24 (Comparison for non-integrable functions) **:** *Let $f:[a,b)\to W$ and $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$ be a non-negative non-integrable function. Then, the following properties hold.*

(1) If $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$, then $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(\int_a^x g)$.

(2) If $f \underset{b}{=} o(g)$, then $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o(\int_a^x g)$.

(3) If $W=\mathbb{R}$ and $f \underset{b}{\sim} g$, then f is non-integrable on $[a,b)$ and $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$.

Proof : Since g is non-negative and not integrable on $[a,b)$, we have

$$\lim_{x\to b}\int_a^x g=+\infty. \tag{7.5}$$

(1) By assumption, there exists $M>0$ and $\delta>0$ such that

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant Mg(t).$$

Therefore, for any $x\in[b-\delta,b)$, we have

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^x\|f\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_a^x g.$$

Additionally, from Eq. (7.5), we deduce that there exists $\delta'\in(0,\delta)$ such that

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant M\int_a^x g.$$

Putting the two above relations together, we get

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \left\|\int_a^x f\right\|\leqslant 2M\int_a^x g,$$

which is what we want to show.

(2) Let $\varepsilon>0$. By assumption, there exists $\delta>0$ such that

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant\varepsilon g(t).$$

Therefore, for any $x\in[b-\delta,b)$, we have

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_a^x g.$$

Additionally, from Eq. (7.5), we deduce that there exists $\delta'\in(0,\delta)$ such that

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant\varepsilon\int_a^x g.$$

命題 7.1.24 【不可積函數的比較】： 令 $f:[a,b)\to W$ 以及 $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$ 為非負不可積函數，則下列性質成立。

(1) 如果 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$，那麼 $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(\int_a^x g)$。

(2) 如果 $f \underset{b}{=} o(g)$，那麼 $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o(\int_a^x g)$。

(3) 如果 $W=\mathbb{R}$ 而且 $f \underset{b}{\sim} g$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上不可積，而且 $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$。

證明：由於 g 是非負，且在 $[a,b)$ 上不可積，我們有

$$\lim_{x\to b}\int_a^x g=+\infty. \tag{7.5}$$

(1) 根據假設，存在 $M>0$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant Mg(t).$$

因此，對於任意 $x\in[b-\delta,b)$，我們有

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^x\|f\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant M\int_a^x g.$$

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \left\|\int_a^x f\right\|\leqslant 2M\int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon>0$。根據假設，存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant\varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x\in[b-\delta,b)$，我們有

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant\varepsilon\int_a^x g.$$

Putting the two above relations together, we get

$$\forall x \in [b-\delta', b), \qquad \left\| \int_a^x f \right\| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g,$$

which is what we want to show.

(3) Suppose $f \underset{b}{\sim} g$. This means that $f - g \underset{b}{=} o(g)$. Then we apply the result from (2) to conclude that

$$\int_a^x (f-g) \underset{x\to b}{=} o\Big(\int_a^x g\Big) \Leftrightarrow \int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g.$$

□

Example 7.1.25 : The following integral diverges when $x \to \infty$ (Example 7.1.9),

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

We want to find an equivalent expression of it when $x \to \infty$. By an integration by parts, we find

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_{t=2}^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}.$$

We also have the following asymptotic comparison,

$$\frac{1}{(\ln t)^2} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad \text{when } t \to \infty,$$

which leads to

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right), \quad \text{when } x \to \infty.$$

Putting all the above relations together, we deduce

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}, \quad \text{when } x \to \infty.$$

7.2 Improper integrals

As we mentioned in Section 7.1.1, to study the integrals of functions on general intervals, it is enough to consider the case $I = [a, b)$ where $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. The integrands that we are going to consider below are not necessarily non-negative. If the interval of integration writes $I = (a, b)$, where $-\infty < a < b < +\infty$, then as in Proposition 7.1.15, we need to take any $c \in (a, b)$ and divide the interval into $I_- = (a, c]$ and $I_+ = [c, b)$, and deal with them independently, see Definition 7.2.9.

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x \in [b-\delta', b), \qquad \left\| \int_a^x f \right\| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \underset{b}{\sim} g$。這代表著 $f - g \underset{b}{=} o(g)$。再來我們使用 (2) 的結果來總結：

$$\int_a^x (f-g) \underset{x\to b}{=} o\Big(\int_a^x g\Big) \Leftrightarrow \int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g.$$

□

範例 7.1.25 ： 當 $x \to \infty$ 時，下面的積分會發散（範例 7.1.9）：

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

我們想要找出當 $x \to \infty$ 時，一個等價的關係式。透過分部積分，我們有

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_{t=2}^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}.$$

我們也有下面這個漸進比較：

$$\frac{1}{(\ln t)^2} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad 當\ t \to \infty,$$

這會讓我們得到

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right), \quad 當\ x \to \infty.$$

把上面的關係式放在一起，我們推得

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}, \quad 當\ x \to \infty.$$

第二節 瑕積分

如同我們在第 7.1.1 小節當中所提到的，要討論在一般區間上函數的積分，我們只需要考慮 $I = [a, b)$ 的情況，其中 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$。我們接下來要考慮的積分函數不一定要是非負的。如果積分區間寫做 $I = (a, b)$，其中 $-\infty < a < b < +\infty$，那麼如同在命題 7.1.15 中所看到的，我們只需要取任意的 $c \in (a, b)$ 並把區間切割成 $I_- = (a, c]$ 和 $I_+ = [c, b)$，並各自處理即可，見定義 7.2.9 。

7.2.1 Definition and properties

Definition 7.2.1 : Let $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ be a piecewise continuous function.

(1) We say that the integral $\int_{[a,b)} f = \int_{[a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converges if the function

$$x\mapsto \int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

is well defined and has a finite limit when $x\to b-$. In this case, the limit is denoted by $\int_{[a,b)} f$ or $\int_{[a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Such an integral is called an improper integral (瑕積分).

(2) If the above limit does not exist, then we say that the integral $\int_{[a,b)} f$ diverges.

Remark 7.2.2 : In the case that f is non-negative, then the convergence defined in Definition 7.2.1 coincides with the notion of integrability defined in Definition 7.1.4.

Proposition 7.2.3 (Cauchy's criterion) **:** *Let $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ be a piecewise continuous function. The following properties are equivalent.*

(1) The integral $\int_{[a,b)} f$ converges.

(2) For any $\varepsilon>0$, there exists $c\in[a,b)$ such that for any $x,y\in[c,b)$ with $x<y$, we have

$$\Big|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big|<\varepsilon.$$

Proof : Since $(\mathbb{R},|\cdot|)$ is complete, the convergence and the Cauchy's property are equivalent. □

Proposition 7.2.4 : *Let $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ be a piecewise continuous function. Let $c\in[a,b)$. Then, the following properties hold.*

(1) Both integrals $\int_{[a,b)} f$ and $\int_{[c,b)} f$ have the same behavior.

(2) If they both converge, we have

$$\int_{[a,b)} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b)} f.$$

Proof : Both properties are direct consequences of the cyclic relation on segments (Proposition 5.2.10),

$$\forall c\in[a,b),\forall x\in[c,b),\quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$ □

第一小節 定義與性質

定義 7.2.1 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。

(1) 如果函數

$$x\mapsto \int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是定義良好的，且當 $x\to b-$ 時有有限的極限，則我們說積分 $\int_{[a,b)} f = \int_{[a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 收斂。在這個情況下，我們把這個極限記作 $\int_{[a,b)} f$ 或 $\int_{[a,b)} f(t)\,\mathrm{d}t$。這樣的積分稱作瑕積分 (improper integral)。

(2) 如果上面的極限不存在，則我們說積分 $\int_{[a,b)} f$ 發散。

註解 7.2.2 ： 在 f 是非負的情況，定義 7.2.1 中定義的收斂與定義 7.1.4 中定義的可積性是相同的。

命題 7.2.3 【柯西準則】： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。下面性質是等價的。

(1) 積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂。

(2) 對於任意 $\varepsilon>0$，存在 $c\in[a,b)$ 使得對於任意 $x,y\in[c,b)$ 滿足 $x<y$，我們有

$$\Big|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big|<\varepsilon.$$

證明： 由於 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是完備的，收斂性與柯西性質是等價的。 □

命題 7.2.4 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。令 $c\in[a,b)$。那麼下面性質成立。

(1) 積分 $\int_{[a,b)} f$ 和 $\int_{[c,b)} f$ 有相同行為。

(2) 如果他們兩個都收斂的話，我們有

$$\int_{[a,b)} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b)} f.$$

證明： 兩個性質都是線段上的所對應性質（命題 5.2.10）推廣後的直接結果：

$$\forall c\in[a,b),\forall x\in[c,b),\quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$ □

Corollary 7.2.5 : *Let $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ be a piecewise continuous function. If the integral $\int_{[a,b)} f$ converges, then when $x \to b-$, we have*

$$\int_{[x,b)} f \to 0.$$

In such a case, the integral $\int_{[a,x]} f$ is called partial integral*, and the integral $\int_{[x,b)} f$ is called the* remainder integral *of the integral $\int_{[a,b)} f$.*

Proof : Suppose that the limit when $x \to b-$ of $\int_{[a,x]} f$ is finite, and is denoted by $\int_{[a,b)} f$. This means that $\int_{[x,b)} f = \int_{[a,b)} f - \int_{[a,x]} f$ tends to 0 when $x \to b-$. □

Proposition 7.2.6 : *Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Assume that $f \in R(x;a,b)$, then the improper integral $\int_{[a,b)} f$ converges and we have*

$$\int_{[a,b)} f = \int_a^b f.$$

Remark 7.2.7 : This proposition shows that, if a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is Riemann-integrable, then its integral and the improper integral on $[a,b)$ coincide. In other words, the definition of the improper integral in Definition 7.2.1 generalizes the notion we saw previously on segments in Chapter 5. Therefore, we may also denote the improper integral using the classical notation,

$$\int_a^b f := \int_{[a,b)} f,$$

whenever $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ is a function that is piecewise continuous on $[a,b)$ and such that the integral $\int_{[a,b)} f$ converges.

Proposition 7.2.8 : *Let $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ be bounded and F be a primitive of f. The following properties are equivalent,*

(1) The integral $\int_a^b f$ converges,

(2) F has a finite limit at $b-$.

In this case, we have

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} F(x) - F(a),$$

and the function

$$x \mapsto \int_x^b f$$

is well defined on $[a,b)$, differentiable on (a,b), with derivative $-f$.

系理 7.2.5 ： 令 $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ 為片段連續函數。如果積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂，那麼當 $x \to b-$ 時，我們有

$$\int_{[x,b)} f \to 0.$$

在這樣的情況下，我們稱積分 $\int_{[a,x]} f$ 為 $\int_{[a,b)} f$ 的部份積分，積分 $\int_{[x,b)} f$ 為他的餘項積分。

證明： 假設 $\int_{[a,x]} f$ 在當 $x \to b-$ 時的極限是有限的，且記作 $\int_{[a,b)} f$。這代表著 $\int_{[x,b)} f = \int_{[a,b)} f - \int_{[a,x]} f$ 在 $x \to b-$ 時會收斂至 0。□

命題 7.2.6 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為有界函數。假設 $f \in R(x;a,b)$，那麼瑕積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂且我們有

$$\int_{[a,b)} f = \int_a^b f.$$

註解 7.2.7 ： 這個命題告訴我們，如果數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是黎曼可積的，那麼他的積分與在 $[a,b)$ 上的瑕積分是相等的。換句話說，在定義 7.2.1 中所定義的瑕積分，推廣了我們在第五章中所看到的線段上的積分。因此，只要當 $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ 是個在 $[a,b)$ 上片段連續的函數，且積分 $\int_{[a,b)} f$ 存在時，我們也可以用之前的記號來記瑕積分：

$$\int_a^b f := \int_{[a,b)} f.$$

命題 7.2.8 ： 令 $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ 有界且 F 是個 f 的原函數。下面性質是等價的：

(1) 積分 $\int_a^b f$ 收斂；

(2) F 在 $b-$ 有個有限的極限。

在這樣的情況下，我們有

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} F(x) - F(a),$$

而且函數

$$x \mapsto \int_x^b f$$

在 $[a,b)$ 上定義良好，在 (a,b) 上可微，且微分為 $-f$。

Proof : The proof follows directly from what has been said above and is left as an exercise. □

Definition 7.2.9 : Let $-\infty < a < b < +\infty$ and $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ be a piecewise continuous function. Fix $c \in (a,b)$. We say that the *improper integral*

$$\int_{(a,b)} f := \int_a^b f$$

is well defined, if both $\int_{(a,c]} f$ and $\int_{[c,b)} f$ are well defined.

Remark 7.2.10 : In Definition 7.2.9, we note that the choice of $c \in (a,b)$ is irrelevant. In fact, for any $c_1, c_2 \in (a,b)$ with $c_1 < c_2$, we have

- $\int_{(a,c_1]} f$ converges if and only if $\int_{(a,c_2]} f$ converges;
- $\int_{[c_1,b)} f$ converges if and only if $\int_{[c_2,b)} f$ converges.

Example 7.2.11 : Let us consider the function $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, defined by

$$\forall x \in (0,1), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

(1) If we consider $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, then we have, for any $n \geqslant 1$,

$$\int_{I_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = 0.$$

(2) If we consider $J_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}]$, then we have, for any $n \geqslant 1$,

$$\int_{J_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{2}{n}} = \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln 2,$$

which implies that

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2.$$

(3) However, the integral of f on $(0, \frac{1}{2}]$ does not converge. For $n \geqslant 1$, consider $K_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, then

$$\int_{K_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} = 2\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

The existence of the improper integral of f on $(0,1)$ needs to be checked as in (3), see Definition 7.2.9. In conclusion, (1) and (2) give different finite limits because f is *not integrable* in the sense of Definition 7.1.10.

證明： 這證明可以從我們前面討論過的內容直接推得，可以當作習題證明。 □

定義 7.2.9 ： 令 $-\infty < a < b < +\infty$ 以及 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 為片段連續函數。固定 $c \in (a,b)$。如果 $\int_{(a,c]} f$ 和 $\int_{[c,b)} f$ 都定義良好，則我們說瑕積分

$$\int_{(a,b)} f := \int_a^b f$$

是定義良好的。

註解 7.2.10 ： 我們注意到，在定義 7.2.9 當中，$c \in (a,b)$ 的選擇並不重要。事實上，對於任意 $c_1, c_2 \in (a,b)$ 滿足 $c_1 < c_2$，我們有

- $\int_{(a,c_1]} f$ 收斂若且唯若 $\int_{(a,c_2]} f$ 收斂；
- $\int_{[c_1,b)} f$ 收斂若且唯若 $\int_{[c_2,b)} f$ 收斂。

範例 7.2.11 ： 讓我們考慮函數 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$，定義做：

$$\forall x \in (0,1), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

(1) 如果我們考慮 $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$，那麼對於任意 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{I_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = 0.$$

(2) 如果我們考慮 $J_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}]$，那麼對於任意 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{J_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{2}{n}} = \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln 2,$$

這會蘊含

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2.$$

(3) 然而，函數 f 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上的積分是不會收斂的。對於 $n \geqslant 1$，考慮 $K_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$，那麼我們有

$$\int_{K_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} = 2\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

f 在 $(0,1)$ 瑕積分的存在性必須使用 (3) 的方法來檢查，見定義 7.2.9 。總結來說，(1) 和 (2) 給我們不同的有限極限，這是因為 f 在定義 7.1.10 的意義下是不可積的。

7.2.2 Conditional convergence

We saw that there are series that converge conditionally, i.e. they converge but do not converge absolutely, see Section 6.4. The way we define the integral on a general interval in Definition 7.2.1 is similar to the definition of a series, so we also have integrals that converge, but do not converge absolutely, and we say that such integrals *covnerge conditionally*. For such integrals, we also have Abel's transform, and the corresponding Dirichlet's test for convergent integrals, see Theorem 7.2.14.

Definition 7.2.12 : Given a piecewise continuous function $f : I \to \mathbb{R}$, we say that its integral $\int_I f$ is *conditionally convergent* if its integral converges (in the sense of an improper integral, see Definition 7.2.1 and Definition 7.2.9) but does not converge absolutely (or f is not integrable on I, see Definition 7.1.10).

Example 7.2.13 : The following integral is conditionally convergent,

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{7.6}$$

- Let us show that this integral does not converge absolutely. For every $k \in \mathbb{N}$, we have

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Since the series $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverges, we deduce that

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

also diverges. Therefore, Eq. (7.6) does not converge absolutely.

- Let $t > \pi$. We write

$$\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=\pi}^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

When $t \to \infty$, we have $\frac{\cos t}{t} \to 0$. Additionally, since the function $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ is integrable on $[\pi, \infty)$, we know that the integral

$$\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converges when $t \to \infty$.

Theorem 7.2.14 (Abel's rule) **:** *Let $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ be of class C^1 and $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ be continuous. Suppose that*

(i) f is decreasing with $\lim_{x\to b} f(x) = 0$;

(ii) There exists $M > 0$ such that for any $x \in [a,b)$, we have $|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant M$.

第二小節 條件收斂

我們看過有些級數會條件收斂，也就是說會收斂，但不會絕對收斂，見第 6.4 節。在定義 7.2.1 中，我們定義在一般區間上積分的方式，與級數的定義是類似的，所以我們也可以有會收斂，但不會絕對收斂的積分，我們稱這樣的積分為條件收斂。對於這樣的積分，我們也會有 Abel 變換，以及相對應的 Dirichlet 檢測法，來討論積分的收斂性，見定理 7.2.14 。

定義 7.2.12 ： 給定片段連續函數 $f : I \to \mathbb{R}$。如果他的積分收斂（在瑕積分的意義下，見定義 7.2.1 以及定義 7.2.9 ），但不會絕對收斂（或是說 f 在 I 上不可積，見定義 7.1.10 ），則我們說他的積分 $\int_I f$ 是條件收斂的。

範例 7.2.13 ： 下面積分會條件收斂：

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{7.6}$$

- 我們證明這個積分不會絕對收斂。對於每個 $k \in \mathbb{N}$，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

由於級數 $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ 發散，我們推得

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

也發散。因此，式 (7.6) 不會絕對收斂。

- 令 $t > \pi$。我們寫

$$\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=\pi}^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

當 $t \to \infty$，我們有 $\frac{\cos t}{t} \to 0$。此外，由於函數 $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ 在 $[\pi, \infty)$ 上是可積的，我們知道積分

$$\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

在 $t \to \infty$ 時會收斂。

定理 7.2.14 【Abel 法則】 **：** 令 $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ 為 C^1 類函數且 $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ 為連續函數。假設

(i) f 遞減且 $\lim_{x\to b} f(x) = 0$；

(ii) 存在 $M > 0$ 使得對於任意 $x \in [a,b)$，我們有 $|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant M$。

則積分 $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ 會收斂。

Then, the integral $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ is convergent.

Proof : Let $\varepsilon > 0$. Due to the assumption (i), we may find $A \in [a, b)$ such that

$$\forall x \in [A, b), \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

We may also define

$$\forall x \in [a, b), \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

and it follows from (ii) that $|G(x)| \leqslant M$ for all $x \in [a, b)$.

For any $x, y \in [a, b)$ with $y \geqslant x \geqslant A$, an integration by parts gives us

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)G(t)\Big]_{t=x}^{y} - \int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

Let us control each of the terms on the right side of the above formula. We have

$$|f(y)G(y) - f(x)G(x)| \leqslant 2\varepsilon M,$$

and

$$\Big|\int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_x^y (-f'(t))M\,\mathrm{d}t = [f(x) - f(y)]M \leqslant \varepsilon M.$$

This means that

$$\Big|\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant 3\varepsilon M,$$

so the Cauchy's criterion (Proposition 7.2.3) is satisfied, which implies the convergence of $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. $\square$

Example 7.2.15 : When $\alpha > 0$, the following integrals converge,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

This is a direct consequence of Theorem 7.2.14, or by an integration by parts as in Example 7.2.13.

Example 7.2.16 : Let us consider the two following functions defined on $[1, +\infty)$,

$$\forall x \in [1, +\infty), \quad f(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

These two functions are equivalent when $x \to +\infty$.

- It follows from Example 7.2.15 that $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converges.

證明： 令 $\varepsilon > 0$。由假設 (i)，我們能找到 $A \in [a, b)$ 使得

$$\forall x \in [A, b), \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

我們也能定義

$$\forall x \in [a, b), \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

接著從 (ii) 我們知道對於所有 $x \in [a, b)$，我們有 $|G(x)| \leqslant M$。

對於任意 $x, y \in [a, b)$ 滿足 $y \geqslant x \geqslant A$，透過分部積分我們得到：

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)G(t)\Big]_{t=x}^{y} - \int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

讓我們一一控制上式右手邊中的項。我們有

$$|f(y)G(y) - f(x)G(x)| \leqslant 2\varepsilon M,$$

還有

$$\Big|\int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_x^y (-f'(t))M\,\mathrm{d}t = [f(x) - f(y)]M \leqslant \varepsilon M.$$

這代表著

$$\Big|\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant 3\varepsilon M,$$

所以柯西準則（命題 7.2.3）會成立，所以會蘊含 $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ 的收斂。 $\square$

範例 7.2.15 ： 當 $\alpha > 0$ 時，下列積分收斂：

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{以及} \quad \int_1^\infty \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

這是定理 7.2.14 的直接結果，也可以透過像是在範例 7.2.13 中一樣，使用分部積分得到此結果。

範例 7.2.16 ： 讓我們考慮下面兩個定義在 $[1, +\infty)$ 上的函數：

$$\forall x \in [1, +\infty), \quad f(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} \quad \text{以及} \quad g(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

這兩個函數在 $x \to +\infty$ 時是等價的。

- 從範例 7.2.15 我們知道 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 會收斂。

- $\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ cannot converge, because otherwise, $\int_1^{\infty}(g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ would converge, which is false.

7.3 Laplace's method

To conclude the chapter, we introduce the Laplace's method, which is very useful when it comes to finding an asymptotic expression.

Theorem 7.3.1 (Laplace's method) **:** *Let $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, and two functions $g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ be of class $\mathcal{C}^2$. Suppose that*

(i) The function $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ is integrable on (a,b);

(ii) There exists $c \in (a,b)$ such that

(a) h is increasing on (a,c) and decreasing on (c,b), with $h''(c) < 0$;

(b) $g(c) \neq 0$.

Then, when $\lambda \to +\infty$, we have

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot g(c)e^{\lambda h(c)}. \tag{7.7}$$

Proof : The rigorous proof of this theorem is more involved, and only give a sketch below to illustrate the ideas. Additionally, let us take the function g be a constant function $g \equiv 1$. We write the Taylor expansion of h around c,

$$h(c+x) = h(c) + \underbrace{h'(c)}_{=0}x + h''(c)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{when } x \to 0.$$

We have the following approximations, which need to be justified carefully,

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x &\approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c+x)}\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c)+\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\approx e^{\lambda h(c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}}\cdot e^{\lambda h(x)},\end{aligned}$$

where the last equality follows from the Gaussian integral, see Exercise A1.6. □

Example 7.3.2 : Let us consider the Gamma function defined in Example 7.1.21,

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

- $\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 無法收斂，因為如果收斂的話，$\int_1^{\infty}(g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 也會收斂，但這是錯的。

第三節 Laplace 方法

我們使用 Laplace 方法來總結這個章節。這是個當我們需要去找出漸進式時，非常好用的方法。

定理 7.3.1 【Laplace 方法】**：** 令 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ 以及兩個 $\mathcal{C}^2$ 類的函數 $g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$。假設

(i) 函數 $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ 在 (a,b) 上是可積的。

(ii) 存在 $c \in (a,b)$ 滿足

(a) h 在 (a,c) 是遞增的，且在 (c,b) 上是遞減的，而且 $h''(c) < 0$；

(b) $g(c) \neq 0$。

那麼，當 $\lambda \to +\infty$ 時，我們有

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot g(c)e^{\lambda h(c)}. \tag{7.7}$$

證明：這個定理的嚴謹證明比較複雜一點，我們這裡只給證明的想法、以及簡化過的證明。此外，我們也把函數 g 取為常數函數 $g \equiv 1$。我們把 h 在 c 附近的 Taylor 展開式寫下來：

$$h(c+x) = h(c) + \underbrace{h'(c)}_{=0}x + h''(c)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad 當\ x \to 0.$$

我們需要詳細解釋下面這個近似：

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x &\approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c+x)}\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c)+\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\approx e^{\lambda h(c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}}\cdot e^{\lambda h(x)},\end{aligned}$$

其中最後一個等式是透過高斯積分所得到的，見習題 A1.6 。 □

範例 7.3.2 ： 讓我們考慮範例 7.1.21 中所定義的 Gamma 函數。

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

We recall the recurrence relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ satisfied by all $x > 0$. In particular, for any integer $n \geqslant 1$, we have $\Gamma(n+1) = n!$. We may apply Laplace's method to the Gamma function to find an asymptotic expression for $n!$, called Stirling's formula, also see Exercise 6.12.

We have

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{n\ln t - t}\,\mathrm{d}t.$$

To make the integrand in the above formula in the form as in Eq. (7.7), we make the change of variables $t = nx$, and we have

$$n! = \int_0^{+\infty} n e^{n\ln(nx) - nx}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,\mathrm{d}x.$$

Let us consider the function $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x - x$. We have

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{and} \quad h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Therefore, we may take $c = 1$ and check that h is increasing on $(0,1)$ and decreasing on $(1, +\infty)$. By applying Laplace's method, we find

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

我們回顧他的遞迴關係式：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 都會成立。特別來說，對於任意整數 $n \geqslant 1$，我們會有 $\Gamma(n+1) = n!$。我們可以對 Gamma 函數使用 Laplace 方法，來找出 $n!$ 的漸進展開式，稱作 Stirling 公式，也可以參考習題 6.12 。

我們有

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{n\ln t - t}\,\mathrm{d}t.$$

如果要把上式中的被積分函數改寫成式 (7.7) 中的形式，我們使用變數變換 $t = nx$，進而得到

$$n! = \int_0^{+\infty} n e^{n\ln(nx) - nx}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,\mathrm{d}x.$$

讓我們考慮函數 $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x - x$。我們有

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{以及} \quad h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

因此，我們可以取 $c = 1$ 並檢查 h 在 $(0,1)$ 上遞增，且在 $(1, +\infty)$ 上遞減。使用 Laplace 方法，我們得到：

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$