第七章 黎曼積分的補充

第一節 區間上的黎曼可積性

第一小節 設定

在第 5.2 節中我們所看到的 Riemann–Stieltjes 積分理論中，積分函數與被積分函數都要求被定義在線段上，而且有界。然而，在一般的情況下，有界的條件未必會被滿足，或是被積分的區域未必會是 $\mathbb{R}$ 的緊緻子集合。在這章中，我們取黎曼積分為例子，來看在一般的區間上面，或是當被積分函數不是個有界函數時，如何定義黎曼積分。

這裡的積分函數，我們會把他們取為片段連續函數；而積分區間的部份，我們只考慮下列形式的區間：

$$
\begin{aligned}
&[a,b) \quad \text{對於 } -\infty < a < b \leqslant +\infty, \\
&(a,b] \quad \text{對於 } -\infty \leqslant a < b < +\infty, \\
&(a,b) \quad \text{對於 } -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.
\end{aligned}
$$

我們注意到，當區間在左方是開的，我們允許選擇 $a = -\infty$；當區間在右方是開的，我們允許選擇 $b = +\infty$。從區間形式為 $[a,b)$ 的理論，藉由對稱性，我們可以輕易推得區間形式為 $(a,b]$ 的情況；接著，對於區間為 (a,b) 的形式，我們把他們分解為 $(a,c] \cup [c,b)$，其中 $c \in (a,b)$。因此，在接下來的討論中，要討論一般區間上的性質，我們只需要討論 $[a,b)$ 這種類型區間上的性質就可以了。

我們也再次提醒，我們只對取值為實數的函數有興趣，因為對於任何取值在有限維度向量空間中的函數，我們可以使用如同在註解 5.2.2 (6) 中所提到分解，並透過線性方式來定義積分。

定義 7.1.1：

- 給定函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$。如果存在分割 $P = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant n$，函數 f 限制在開區間 (x_{k-1}, x_k) 上可以被延拓為在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的連續函數，則我們說 f 是個在線段 $[a,b]$ 上片段連續的函數。
- 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為子集合。給定函數 $f : I \to \mathbb{R}$。如果對於每個線段 $J \subseteq I$，限制函數 $f_{|J}$ 是個在 J 上片段連續的函數，則我們說 f 是個在 I 上片段連續的函數。
- 對於任意子集合 $I \subseteq \mathbb{R}$，我們把 $\mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ 記為由在 I 上片段連續的函數所構成的集合。
- 同理，對於任意賦範向量空間 $(W, \|\cdot\|)$，我們可以定義 $\mathcal{PC}(I, V)$ 為取值在 W 中片段連續數所構成的集合。

範例 7.1.2：

(1) 函數 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上是片段連續的。

(2) 函數 $x \mapsto \ln x$ 在 $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$ 上是片段連續的。

命題 7.1.3： 令 $I = [a,b]$ 為 $\mathbb{R}$ 中的線段。任意在 I 上片段連續的函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 是有界的，且在 I 上黎曼可積。

證明： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ 其中 $I = [a,b]$ 是個線段。根據定義，對於每個 $1 \leqslant k \leqslant n$，存在連續函數 $g : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ 使得 $f_{|(x_{k-1},x_k)} \equiv g_{|(x_{k-1},x_k)}$。由於 g 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是可積的，所以 f 也是，見系理 5.3.22 。接著我們使用命題 5.2.10 來總結 f 在 $[a,b]$ 上是可積的。 □

第二小節 在區間上的可積性

在定理 6.1.16 中，我們看到對於取值在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的級數來說，如果他會絕對收斂，則也會收斂。如果他不會絕對收斂，那麼藉由重排級數中的項，則他的極限可以是任何的值，見定理 6.5.5 。當我們要討論在一般區間上的黎曼積分時，我們也會遇到類似的現象。事實上，對於定義在一般區間 I 上的片段連續的函數來說，從命題 7.1.3 我們得知，他在任何子線段上的積分都是定義良好的。接著，如果我們取越來越長的子線段來覆蓋整個區間，或許有機會得到有意義的極限，這是我們可能會想要定義為在 I 上的積分的方式。然而，如果我們沒有絕對收斂的話，這個極限未必會是唯一的。我們先從比較簡單的情況下來看，先討論會絕對收斂的積分，也就是我們要討論的是被積分函數為非負的情況。稍後在第 7.2.2 小節中，我們會討論不會絕對收斂的情況。

令 I 為區間，並記 $\mathcal{PC}_+(I) = \mathcal{PC}_+(I, \mathbb{R}) := \mathcal{PC}(I, \mathbb{R}_+)$ 為在 I 上非負片段連續函數所構成的集合。

定義 7.1.4 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。如果存在 $M \geqslant 0$ 使得對於任意區間 $J \subseteq I$，我們有 $\int_J f \leqslant M$，則我們說 f 在 I 上是可積的，這樣的情況下，我們記

$$\int_I f = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J\text{是個線段}}} \int_J f. \tag{7.1}$$

註解 7.1.5 ： 如果 $a = \inf I$ 且 $b = \sup I$，我們也可以把式 (7.1) 中的積分改寫如下：

$$\int_a^b f = \int_I f.$$

我們注意到，當區間是個線段 $I = [a, b]$，且函數 f 是個非負片段連續函數時，式 (7.1) 中定義出來的可積分性，與定義 5.2.1 中的可積分性，在 $\alpha(x) = x$ 時 (RS) 條件會成立，這是等價的。

命題 7.1.6 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上的非負可積函數。那麼，對於任意線段序列 $(J_n = [a_n, b_n])_{n \geqslant 1}$ 且滿足

$$\forall n \geqslant 1, \quad J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq I \quad \text{以及} \quad \bigcup_{n \geqslant 1} J_n = I, \tag{7.2}$$

我們會有

$$\int_I f = \sup_{n\geqslant 1}\int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{J_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

證明：讓我們考慮線段序列 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足式 (7.2)。我們想要證明 $\int_{J_n} f$ 的極限與定義在式 (7.1) 中的 $\int_I f$ 相等。

- 對於每個 $n\geqslant 1$，我們有 $J_n\subseteq I$，由於 f 是非負的，我們有 $\int_{J_n} f\leqslant \int_I f$。藉由對 n 取 $\limsup$，我們得到
$$\limsup_{n\to\infty}\int_{J_n} f\leqslant \int_I f.$$
- 給定 $\varepsilon>0$。藉由最小上界的刻劃，式 (7.1) 告訴我們存在線段 $J=[a,b]\subseteq I$ 使得 $\int_J f+\varepsilon\geqslant \int_I f$。由於 $a,b\in I=\bigcup_{n\geqslant 1} J_n$，會存在 $N\geqslant 1$ 使得對於所有 $n\geqslant N$，我們有 $a,b\in J_n$。因此，對於 $n\geqslant N$，我們有
$$\int_{J_n} f\geqslant \int_J f\geqslant \int_I f-\varepsilon.$$
換句話說，
$$\liminf_{n\to\infty}\int_{J_n} f\geqslant \int_I f-\varepsilon.$$
由於 $\varepsilon>0$ 可以任意小，我們得到
$$\liminf_{n\to\infty}\int_{J_n} f\geqslant \int_I f.$$

總結來說，我們得到

$$\int_I f\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{J_n} f\leqslant \limsup_{n\to\infty}\int_{J_n} f\leqslant \int_I f,$$

也就是說 $\lim_{n\to\infty}\int_{J_n} f=\int_I f$。 □

範例 7.1.7 ： 下面我們給出非負連續可積與不可積函數的例子。

(1) 對於 $\lambda > 0$，函數 $t \mapsto e^{-\lambda t}$ 在 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上是可積的。我們可以固定 $\lambda > 0$，對於所有 $n \geqslant 1$，取 $J_n = [0, n]$。對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{I_n} e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \int_0^n e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^n = \frac{1 - e^{-\lambda n}}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

在定義 7.1.4 中的條件的確是滿足的。

(2) 函數 $x \mapsto |\sin x|$ 是不可積的。事實上，對於每個 $k \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\, \mathrm{d}x = 2.$$

因此，

$$\forall n \geqslant 0, \quad \int_0^{n\pi} |\sin x|\, \mathrm{d}x = 2n,$$

而這無法對 n 均勻去控制。

範例 7.1.8 【黎曼積分】 ： 對於 $\alpha \in \mathbb{R}$，我們討論函數 $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ 的可積性。

(1) 對於任意 $a > 0$，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $[a, +\infty)$ 上可積，若且唯若 $\alpha > 1$。

(2) 對於任意 $a > 0$，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $(0, a]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

(3) 對於 $a < b$，函數 $t \mapsto (b - t)^{-\alpha}$ 在 $[a, b)$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

(4) 對於 $a < b$，函數 $t \mapsto (t - a)^{-\alpha}$ 在 $(a, b]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$。

範例 7.1.9 【Bertrand 積分】 ： 對於 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，我們討論函數 $t \mapsto t^{-\alpha} |\ln t|^{-\beta}$ 的可積性。

(1) 對於任意 $a > 1$，他在 $[a, +\infty)$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha > 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$。

(2) 對於 $a \in (0, 1)$，他在 $(0, a]$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha < 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$。

在習題 7.2 中我們會討論更多細節。

定義 7.1.10 ： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間且 $(W, \|\cdot\|)$ 為有限維度的 Banach 空間[1]。給定片段連續函數 $f : I \to W$。如果 $\|f\|$ 在 I 上是在定義 7.1.4 的意義下可積，則我們說 f 在 I 上可積。給定 I 中的線段序列 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 且滿足式 (7.2)，我們可以定義

$$\int_I f := \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f \in W. \tag{7.3}$$

我們記 $L^1(I, W)$ 為由 I 映射至 W，片段連續，且在上述意義下可積的函數所構成的集合，也就是說

$$L^1(I, W) := \Big\{ f : I \to W : \int_I \|f\| < +\infty \Big\}.$$

註解 7.1.11 ： 在定義 7.1.10 中，如果我們取 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$，我們會得到實數函數相對應到的可積性概念。

命題 7.1.12 ： 在定義 7.1.10 中，序列 $(\int_{J_n} f)_{n\geqslant 1}$ 的極限存在，且當 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足式 (7.2) 中的條件時，這個極限不取決於 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇。

註解 7.1.13 ： 命題 7.1.12 的直接應用，可以讓我們得到：

- 當 $-\infty < a < b < +\infty$ 時，對於 $[a, b)$ 型的區間，對於 $n \geqslant 1$，我們可以取 $J_n = [a, b - \frac{1}{n}]$；
- 當 $-\infty < a < +\infty$，對於 $[a, +\infty)$ 型的區間，對於 $n \geqslant 1$，我們可以取 $J_n = [a, n]$。

證明：我們要檢查式 (7.3) 中的極限是定義良好的，且不取決於 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇。

- 令 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。對於每個 $n \geqslant 1$，我們記 $J_n = [a_n, b_n]$，且令 $u_n = \int_{J_n} f$ 以及 $U_n = \int_{J_n} \|f\|$。我們想要證明 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列。由於 $(W, \|\cdot\|)$ 是個

[1]我們在註解 5.2.2 當中有解釋，在 J 是個線段，且 f 取值在 W 中時，如何構造積分 $\int_J f$。事實上，當 W 是個一般的 Banach 空間時（不需要有限維度的假設），我們還是能夠定義這個積分的。舉 f 連續為例子，我們可以使用他的均勻連續性來使用階躍函數來逼近 f。

Banach 空間，$(u_n)_{n\geqslant}$ 收斂。

令 $\varepsilon > 0$。由於 $\|f\|$ 在 I 上可積，序列 $(U_n)_{n\geqslant 1}$ 收斂，所以是個柯西序列。因此，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $p, q \geqslant N$，我們有 $|U_p - U_q| < \varepsilon$。這代表著對於 $p > q \geqslant N$，我們有

$$\|u_p - u_q\| = \left\| \int_{[a_p,a_q]} f + \int_{[b_q,b_p]} f \right\| \leqslant \int_{[a_p,a_q]} \|f\| + \int_{[b_q,b_p]} \|f\| = U_p - U_q < \varepsilon.$$

這證明了 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列，所以會收斂。

- 令 $(J_n)_{n\geqslant 1}$ 與 $(K_n)_{n\geqslant 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。從證明的第一部份，我們知道下面極限存在：

$$u_n := \int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} u \quad \text{以及} \quad v_n := \int_{K_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

對於每個 $n \geqslant 1$，令 $L_n := J_n \cup K_n$，這會是兩個線段的聯集。我們注意到，對於小的 n 值，L_n 可能不會是個線段，但對大的 n 值，L_n 永遠會是個線段（J_n 和 K_n 的交集非空）。因此，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得對於所有 $n \geqslant N$，L_n 是個線段。那麼，$(L_{n+N})_{n\geqslant 1}$ 也是個滿足式 (7.2) 的線段序列。我們會有

$$w_n := \int_{L_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} w.$$

如同在第一部份中，令

$$\forall n \geqslant 1, \quad U_n = \int_{J_n} \|f\| \quad \text{以及} \quad W_n = \int_{L_n} \|f\|.$$

我們有

$$\|w_n - u_n\| = \left\| \int_{L_n \setminus J_n} f \right\| \leqslant \int_{L_n \setminus J_n} \|f\| = W_n - U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

其中最後一個收斂來自命題 7.1.6 。這蘊含 $w = u$。同理，我們也有 $w = v$，所以 $u = v$。□

第三小節　性質

在定義 7.1.10 中所定義，在一般區間 I 上的積分，會滿足在線段上積分的性質。這可以理解為當我們對定義 7.1.10 取極限時，線性性質會被保存。如果 f 是個取值在 W 中且可積的片段連續函數，我們可以安全地使用下列關係式：

- 聯集關係式：$\int_I f + \int_J f = \int_{I\cup J} f$ 所要求的條件是 $I \cap J = \varnothing$ 而且三個積分中的兩個要有定義。
- 三角不等式：$\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$。
- 對 $\mathcal{C}^1$ 函數的分部積分。
- 對 $\mathcal{C}^1$ 函數的變數變換。可以參考習題 A1.5 看到如果變數變換不是 $\mathcal{C}^1$ 的話，會發生什麼現象。

現在我們會給出一些在區間上可積性的判斷準則。我們從 $I = [a, b)$ 形式的區間，並考慮 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$，其中 W 是個有限維度的 Banach 空間。下面性質不需要任何技巧就可以直接證明，我們只敘述這些性質，並不給出證明。

命題 7.1.14 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數。下面性質是等價的。

(1) f 在 $[a, b)$ 上是可積的。

(2) 【部份積分】$x \mapsto \int_a^x \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ 在 $[a, b)$ 上是有界的。

(3) 【部份積分】$x \mapsto \int_a^x \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ 當 $x \to b-$ 時極限是存在的。

(4) 【餘項積分】$x \mapsto \int_x^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ 當 $x \to b-$ 時的極限是 0。

(5) 【柯西準則】對於 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in I$ 使得

$$\forall x, y \in [A, b), x < y, \quad \int_x^y \|f(t)\|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

證明： 這是定義 7.1.10 、命題 7.1.12 和註解 7.1.13 的直接結果。 □

命題 7.1.15 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數且 $c \in \mathring{I}$。我們記 $I_- := I \cap (-\infty, c]$ 以及 $I_+ := I \cap [c, +\infty)$。那麼，下列性質是等價的。

(1) f 在 I 上可積。

(2) f 在 I_- 和 I_+ 上可積。

在這樣的情況下，我們有 $\int_I f = \int_{I_-} f + \int_{I_+} f$。

證明：這是聯集關係式的直接結果。 □

命題 7.1.16 ： 令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上片段連續，且取值在有限維度的 Banach 空間 W 中的函數，以及 $\varphi \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。

(1) 如果在 I 上，我們有 $\|f\| \leqslant \varphi$ 且 φ 是可積的，則 f 是可積的，且我們有 $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \varphi$。

(2) 如果 f 取值在 $\mathbb{R}_+$ 中而且是不可積的，且 $f \leqslant \varphi$，則 φ 是不可積的。

證明：

(1) 對於 $x \in [a, b)$，我們有

$$\int_a^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \varphi(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \int_I \varphi.$$

上式左方是有界的，所以我們可以用命題 7.1.14 來總結。此外，根據三角不等式，我們有 $\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$。

(2) 使用反證法，如果 φ 是可積的，那麼從 (1) 我們會得到 f 也是可積的。 □

範例 7.1.17 ： 檢查非負函數 $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ 在 $(0, 1)$ 上是可積的。讓我們取 $c = \frac{1}{2}$、$I_- = (0, \frac{1}{2}]$ 以及 $I_+ = [\frac{1}{2}, 1)$。

- 對於 $t \in I_-$，我們有 $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{t}}$。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是可積的，所以 f 也是。
- 對於 $t \in I_+$，我們有 $f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-t}}$。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上是可積的，所以 f 也是。

第四小節 積分比較

我們考慮有限維度的 Banach 空間 $(W,\|\cdot\|)$。我們接著會對非負可積與不可積函數，給出比較的結果。這些結果與級數的結果相似，見第 6.2.1 小節。注意到，我們要比較的對象函數需要是非負的。

定義 7.1.18： 令 $f:[a,b)\to W$ 以及 $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為兩個片段連續函數。

- 如果存在 $M>0$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$\forall x\in[a,b)\cap B(b,\delta),\quad \|f(x)\|\leqslant M|g(x)|,$$

  則我們記 $f\underset{b}{=}\mathcal{O}(g)$ 或是 $f(x)=\mathcal{O}(g(x))$ 當 $x\to b$。

- 如果對於 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall x\in[a,b)\cap B(b,\delta),\quad \|f(x)\|\leqslant\varepsilon|g(x)|.$$

  我們記 $f\underset{b}{=}o(g)$ 或 $f(x)=g(x)$ 當 $x\to b$。

- 如果 $W=\mathbb{R}$ 且 $f-g\underset{b}{=}o(g)$，則我們記 $f\underset{b}{\sim}g$ 或 $f(x)\sim g(x)$ 當 $x\to b$。

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會收斂，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的餘項。當我們有非負可積函數時，我們能夠比較他們的餘項積分，如同下面命題所描述的。

命題 7.1.19【可積函數的比較】： 令 $f:[a,b)\to W$ 為片段連續函數以及 $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$ 為非負可積函數，則下列性質成立。

(1) 如果 $f\underset{b}{=}\mathcal{O}(g)$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f\underset{x\to b}{=}\mathcal{O}(\int_x^b g)$。

(2) 如果 $f\underset{b}{=}o(g)$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f\underset{x\to b}{=}o(\int_x^b g)$。

(3) 如果 $W=\mathbb{R}$ 而且 $f\underset{b}{\sim}g$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f\underset{x\to b}{\sim}\int_x^b g$。

註解 7.1.20 ：

(1) 我們再次強調這些比較結果只有對非負函數 g 來說是會成立的。我們可以有 $f \sim_b g$ 但積分 $\int_a^b f$ 和 $\int_a^b g$ 有不一樣的行為。在級數的情況下，相同現象也會發生，我們不要忘記在註解 6.2.4 中所看到的結果。對於積分來說，我們稍後會在範例 7.2.16 給出對應的反例。

(2) 我們注意到這些比較關係，在我們取原函數時，是會被「保存」的。然而，在微分時我們不會有這類的結果。例如，函數 $t \mapsto t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $(0,1]$ 上是可積的，且當 $t \to 0+$ 時會是 $o(t)$。從命題 7.1.19 (2)，我們知道

$$\int_0^x t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to 0+}{=} o(x^2).$$

但下面微分顯然不是 $o(1)$，因為在 $t \to 0+$ 時不會收斂：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{3/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{3}{2}t^{1/2}\sin\left(\frac{1}{t}\right) - t^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

證明：

(1) 根據假設，存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant Mg(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b-\delta, b)$，我們有

$$\left\|\int_x^b f\right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant M\int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon > 0$。根據假設，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b-\delta, b), \quad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b-\delta, b)$，我們有

$$\left\| \int_x^b f \right\| \leqslant \int_x^b \|f\| \leqslant \varepsilon \int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \underset{b}{\sim} g$。這代表著 $f - g \underset{b}{=} o(g)$。接著我們可以使用 (2) 的結果來總結

$$\int_x^b (f-g) \underset{x \to b}{=} o\Big(\int_x^b g\Big) \Leftrightarrow \int_x^b f \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g.$$ □

範例 7.1.21 ： Gamma 函數 Γ 定義如下：

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

函數 $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ 在 $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ 上是連續的。

- 在 0 附近。當 $t \to 0$，我們有 $f(t) \sim t^{x-1}$。由於 $x - 1 > -1$，根據黎曼積分（範例 7.1.8）以及可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 0 附近是可積的。

- 在 $+\infty$ 附近。我們有

$$t^{x-1}e^{-t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \quad 當 \ t \to \infty.$$

  由於函數 $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ 在 $+\infty$ 附近是可積的，根據可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 $+\infty$ 附近是可積的。

我們可以總結 Gamma 函數 $\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 來說是定義良好的。我們可以檢查 Gamma 函數在一些點的取值：$\Gamma(1) = 1$（直接計算）、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$（變數變換後是個高斯積分，見習題 A1.6）。此外，透過分部積分，我們可以證明

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0. \tag{7.4}$$

在習題 7.9 中，我們會看到更多 Gamma 函數的性質以及他的一個刻劃。

範例 7.1.22 ： 我們的目標是找到 $\arccos x$ 在 $x = 1$ 附近的漸進表示式。首先，我們注意到

$$\forall x \in [0,1], \quad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos x.$$

接著，我們有下面這個等價關係：

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}, \quad \text{當 } t \to 1.$$

由於 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0,1)$ 上是可積的，從命題 7.1.19 (3)，我們知道當 $x \to 1$ 時，我們會有

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \sim \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2(1-x)}, \quad \text{當 } x \to 1.$$

範例 7.1.23 ： 下面是高斯積分，我們在習題 A1.6 中有計算過他的值：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1.$$

讓我們來估計上面這個積分的尾巴：

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad \text{當 } x \to \infty.$$

(1) 首先，我們有下面這個漸進比較關係：

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = o(te^{-\frac{t^2}{2}}), \quad \text{當 } t \to \infty.$$

從命題 7.1.19 (2) 我們得知，當 $x \to \infty$ 是，會有

$$F(x) = o\Big(\int_x^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\Big) = o\Big(\Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_x^{\infty}\Big) = o\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big).$$

(2) 如果在 $x \to \infty$ 時，想要得到更詳細 $F(x)$ 的漸進式，我們可以從分部積分開始。我們寫

$$\sqrt{2\pi}F(x) = \int_x^{\infty} \frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t}\right]_{t=x}^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

此外，我們有

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right) = o(F(x)), \quad \text{當 } x \to \infty,$$

因此我們推得

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(1+o(1)), \quad \text{當 } x \to \infty.$$

透過遞迴，你可以證明對於任意 $n \geqslant 0$，我們有

$$\sqrt{2\pi}F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right) + (-1)^{n+1}(2n+1)!!\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t,$$

這會蘊含

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}}\right)(1+o(1)), \quad \text{當 } x \to \infty.$$

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會發散，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的部份和。當我們有非負不可積函數時，我們能夠比較他們的部份積分，如同下面命題所描述的。

命題 7.1.24 【不可積函數的比較】：令 $f : [a,b) \to W$ 以及 $g : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ 為非負不可積函數，則下列性質成立。

(1) 如果 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$，那麼 $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathcal{O}(\int_a^x g)$。

(2) 如果 $f \underset{b}{=} o(g)$，那麼 $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o(\int_a^x g)$。

(3) 如果 $W = \mathbb{R}$ 而且 $f \underset{b}{\sim} g$，那麼 f 在 $[a,b)$ 上不可積，而且 $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$。

證明： 由於 g 是非負，且在 $[a,b)$ 上不可積，我們有

$$\lim_{x\to b}\int_a^x g = +\infty. \tag{7.5}$$

(1) 根據假設，存在 $M>0$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant Mg(t).$$

因此，對於任意 $x\in[b-\delta,b)$，我們有

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^x\|f\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+M\int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant M\int_a^x g.$$

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \left\|\int_a^x f\right\|\leqslant 2M\int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon>0$。根據假設，存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall t\in[b-\delta,b),\quad \|f(t)\|\leqslant\varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x\in[b-\delta,b)$，我們有

$$\left\|\int_a^x f\right\|\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_{b-\delta}^x g\leqslant\int_a^{b-\delta}\|f\|+\varepsilon\int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得

$$\forall x\in[b-\delta',b),\quad \int_a^{b-\delta}\|f\|\leqslant\varepsilon\int_a^x g.$$

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x \in [b-\delta', b), \qquad \left\| \int_a^x f \right\| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \underset{b}{\sim} g$。這代表著 $f - g \underset{b}{=} o(g)$。再來我們使用 (2) 的結果來總結：

$$\int_a^x (f-g) \underset{x\to b}{=} o\Big(\int_a^x g\Big) \Leftrightarrow \int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g. \qquad \square$$

範例 7.1.25 ： 當 $x \to \infty$ 時，下面的積分會發散（範例 7.1.9）：

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

我們想要找出當 $x \to \infty$ 時，一個等價的關係式。透過分部積分，我們有

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_{t=2}^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}.$$

我們也有下面這個漸進比較：

$$\frac{1}{(\ln t)^2} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right), \qquad \text{當 } t \to \infty,$$

這會讓我們得到

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right), \qquad \text{當 } x \to \infty.$$

把上面的關係式放在一起，我們推得

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}, \qquad \text{當 } x \to \infty.$$

第二節　瑕積分

如同我們在第 7.1.1 小節當中所提到的，要討論在一般區間上函數的積分，我們只需要考慮 $I=[a,b)$ 的情況，其中 $-\infty<a<b\leqslant+\infty$。我們接下來要考慮的積分函數不一定要是非負的。如果積分區間寫做 $I=(a,b)$，其中 $-\infty<a<b<+\infty$，那麼如同在命題 7.1.15 中所看到的，我們只需要取任意的 $c\in(a,b)$ 並把區間切割成 $I_-=(a,c]$ 和 $I_+=[c,b)$，並各自處理即可，見定義 7.2.9 。

第一小節 定義與性質

定義 7.2.1 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。

(1) 如果函數

$$x\mapsto\int_{[a,x]}f(t)\,\mathrm{d}t:=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是定義良好的，且當 $x\to b-$ 時有有限的極限，則我們說積分 $\int_{[a,b)}f=\int_{[a,b)}f(t)\,\mathrm{d}t$ 收斂。在這個情況下，我們把這個極限記作 $\int_{[a,b)}f$ 或 $\int_{[a,b)}f(t)\,\mathrm{d}t$。這樣的積分稱作瑕積分 (improper integral)。

(2) 如果上面的極限不存在，則我們說積分 $\int_{[a,b)}f$ 發散。

註解 7.2.2 ： 在 f 是非負的情況，定義 7.2.1 中定義的收斂與定義 7.1.4 中定義的可積性是相同的。

命題 7.2.3 【柯西準則】 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。下面性質是等價的。

(1) 積分 $\int_{[a,b)}f$ 收斂。

(2) 對於任意 $\varepsilon>0$，存在 $c\in[a,b)$ 使得對於任意 $x,y\in[c,b)$ 滿足 $x<y$，我們有

$$\Big|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big|<\varepsilon.$$

證明： 由於 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 是完備的，收斂性與柯西性質是等價的。 $\square$

命題 7.2.4 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。令 $c\in[a,b)$。那麼下面性質成立。

(1) 積分 $\int_{[a,b)} f$ 和 $\int_{[c,b)} f$ 有相同行為。

(2) 如果他們兩個都收斂的話，我們有

$$\int_{[a,b)} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b)} f.$$

證明： 兩個性質都是線段上的所對應性質（命題 5.2.10 ）推廣後的直接結果：

$$\forall c\in[a,b), \forall x\in[c,b), \quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$

$\square$

系理 7.2.5 ： 令 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 為片段連續函數。如果積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂，那麼當 $x\to b-$ 時，我們有

$$\int_{[x,b)} f \to 0.$$

在這樣的情況下，我們稱積分 $\int_{[a,x]} f$ 為 $\int_{[a,b)} f$ 的部份積分，積分 $\int_{[x,b)} f$ 為他的餘項積分。

證明： 假設 $\int_{[a,x]} f$ 在當 $x\to b-$ 時的極限是有限的，且記作 $\int_{[a,b)} f$。這代表著 $\int_{[x,b)} f = \int_{[a,b)} f - \int_{[a,x]} f$ 在 $x\to b-$ 時會收斂至 0。 $\square$

命題 7.2.6 ： 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為有界函數。假設 $f\in R(x;a,b)$，那麼瑕積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂且我們有

$$\int_{[a,b)} f = \int_a^b f.$$

註解 7.2.7 ： 這個命題告訴我們，如果數 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是黎曼可積的，那麼他的積分與在 $[a, b)$ 上的瑕積分是相等的。換句話說，在定義 7.2.1 中所定義的瑕積分，推廣了我們在第五章中所看到的線段上的積分。因此，只要當 $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ 是個在 $[a, b)$ 上片段連續的函數，且積分 $\int_{[a,b)} f$ 存在時，我們也可以用之前的記號來記瑕積分：

$$\int_a^b f := \int_{[a,b)} f.$$

命題 7.2.8 ： 令 $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ 有界且 F 是個 f 的原函數。下面性質是等價的：

(1) 積分 $\int_a^b f$ 收斂；

(2) F 在 $b-$ 有個有限的極限。

在這樣的情況下，我們有

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} F(x) - F(a),$$

而且函數

$$x \mapsto \int_x^b f$$

在 $[a, b)$ 上定義良好，在 (a, b) 上可微，且微分為 $-f$。

證明： 這證明可以從我們前面討論過的內容直接推得，可以當作習題證明。 □

定義 7.2.9 ： 令 $-\infty < a < b < +\infty$ 以及 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 為片段連續函數。固定 $c \in (a, b)$。如果 $\int_{(a,c]} f$ 和 $\int_{[c,b)} f$ 都定義良好，則我們說瑕積分

$$\int_{(a,b)} f := \int_a^b f$$

是定義良好的。

註解 7.2.10 ： 我們注意到，在定義 7.2.9 當中，$c \in (a,b)$ 的選擇並不重要。事實上，對於任意 $c_1, c_2 \in (a,b)$ 滿足 $c_1 < c_2$，我們有

- $\int_{(a,c_1]} f$ 收斂若且唯若 $\int_{(a,c_2]} f$ 收斂；
- $\int_{[c_1,b)} f$ 收斂若且唯若 $\int_{[c_2,b)} f$ 收斂。

範例 7.2.11 ： 讓我們考慮函數 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$，定義做：

$$\forall x \in (0,1), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

(1) 如果我們考慮 $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$，那麼對於任意 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{I_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = 0.$$

(2) 如果我們考慮 $J_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}]$，那麼對於任意 $n \geqslant 1$，我們有

$$\int_{J_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{2}{n}} = \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln 2,$$

這會蘊含

$$\int_{J_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2.$$

(3) 然而，函數 f 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上的積分是不會收斂的。對於 $n \geqslant 1$，考慮 $K_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$，那麼我們有

$$\int_{K_n} f = \left[\ln x + \ln(1-x)\right]_{x=\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} = 2\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

f 在 $(0,1)$ 瑕積分的存在性必須使用 (3) 的方法來檢查，見定義 7.2.9 。總結來說，(1) 和 (2) 給我們不同的有限極限，這是因為 f 在定義 7.1.10 的意義下是不可積的。

第二小節 條件收斂

我們看過有些級數會條件收斂，也就是說會收斂，但不會絕對收斂，見第 6.4 節。在定義 7.2.1 中，我們定義在一般區間上積分的方式，與級數的定義是類似的，所以我們也可以有會收斂，但不會絕對收斂的積分，我們稱這樣的積分為條件收斂。對於這樣的積分，我們也會有 Abel 變換，以及相對應的 Dirichlet 檢測法，來討論積分的收斂性，見定理 7.2.14 。

定義 7.2.12 ： 給定片段連續函數 $f : I \to \mathbb{R}$。如果他的積分收斂（在瑕積分的意義下，見定義 7.2.1 以及定義 7.2.9），但不會絕對收斂（或是說 f 在 I 上不可積，見定義 7.1.10），則我們說他的積分 $\int_I f$ 是條件收斂的。

範例 7.2.13 ： 下面積分會條件收斂：

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{7.6}$$

- 我們證明這個積分不會絕對收斂。對於每個 $k \in \mathbb{N}$，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

由於級數 $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ 發散，我們推得

$$\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

也發散。因此，式 (7.6) 不會絕對收斂。

- 令 $t > \pi$。我們寫

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=\pi}^{t} - \int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

當 $t \to \infty$，我們有 $\frac{\cos t}{t} \to 0$。此外，由於函數 $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ 在 $[\pi, \infty)$ 上是可積的，我們知道

積分

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x$$

在 $t \to \infty$ 時會收斂。

定理 7.2.14【Abel 法則】：令 $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ 為 $\mathcal{C}^1$ 類函數且 $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ 為連續函數。假設

(i) f 遞減且 $\lim_{x\to b} f(x) = 0$；

(ii) 存在 $M > 0$ 使得對於任意 $x \in [a, b)$，我們有 $|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant M$。

則積分 $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ 會收斂。

證明： 令 $\varepsilon > 0$。由假設 (i)，我們能找到 $A \in [a, b)$ 使得

$$\forall x \in [A, b), \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

我們也能定義

$$\forall x \in [a, b), \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

接著從 (ii) 我們知道對於所有 $x \in [a, b)$，我們有 $|G(x)| \leqslant M$。

對於任意 $x, y \in [a, b)$ 滿足 $y \geqslant x \geqslant A$，透過分部積分我們得到：

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)G(t)\Big]_{t=x}^{y} - \int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

讓我們一一控制上式右手邊中的項。我們有

$$|f(y)G(y) - f(x)G(x)| \leqslant 2\varepsilon M,$$

還有

$$\Big|\int_x^y f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_x^y (-f'(t))M\,\mathrm{d}t = [f(x) - f(y)]M \leqslant \varepsilon M.$$

這代表著

$$\Big| \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant 3\varepsilon M,$$

所以柯西準則（命題 7.2.3）會成立，所以會蘊含 $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ 的收斂。 □

範例 7.2.15 ： 當 $\alpha > 0$ 時，下列積分收斂：

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{以及} \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x.$$

這是定理 7.2.14 的直接結果，也可以透過像是在範例 7.2.13 中一樣，使用分部積分得到此結果。

範例 7.2.16 ： 讓我們考慮下面兩個定義在 $[1, +\infty)$ 上的函數：

$$\forall x \in [1, +\infty), \quad f(x) = \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{\sqrt{x}} \quad \text{以及} \quad g(x) = \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

這兩個函數在 $x \to +\infty$ 時是等價的。

- 從範例 7.2.15 我們知道 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 會收斂。
- $\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 無法收斂，因為如果收斂的話，$\int_1^{\infty}(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 也會收斂，但這是錯的。

第三節 Laplace 方法

我們使用 Laplace 方法來總結這個章節。這是個當我們需要去找出漸進式時，非常好用的方法。

定理 7.3.1 【Laplace 方法】 ： 令 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ 以及兩個 $\mathcal{C}^2$ 類的函數 $g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$。假設

(i) 函數 $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ 在 (a,b) 上是可積的。

(ii) 存在 $c \in (a,b)$ 滿足

(a) h 在 (a,c) 是遞增的，且在 (c,b) 上是遞減的，而且 $h''(c) < 0$；

(b) $g(c) \neq 0$。

那麼，當 $\lambda \to +\infty$ 時，我們有

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot g(c)e^{\lambda h(c)}. \tag{7.7}$$

證明：這個定理的嚴謹證明比較複雜一點，我們這裡只給證明的想法、以及簡化過的證明。此外，我們也把函數 g 取為常數函數 $g \equiv 1$。我們把 h 在 c 附近的 Taylor 展開式寫下來：

$$h(c+x) = h(c) + \underbrace{h'(c)}_{=0}x + h''(c)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad 當\ x \to 0.$$

我們需要詳細解釋下面這個近似：

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\lambda h(x)}\,\mathrm{d}x &\approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c+x)}\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c)+\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\approx e^{\lambda h(c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}}\cdot e^{\lambda h(x)},\end{aligned}$$

其中最後一個等式是透過高斯積分所得到的，見習題 A1.6 。 □

範例 7.3.2 ： 讓我們考慮範例 7.1.21 中所定義的 Gamma 函數。

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

我們回顧他的遞迴關係式：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 都會成立。特別來說，對於任意整數 $n \geqslant 1$，我們會有 $\Gamma(n+1) = n!$。我們可以對 Gamma 函數使用 Laplace 方法，來找出 $n!$ 的漸進展開式，稱作 Stirling 公式，也可以參考習題 6.12 。

我們有

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{n\ln t - t}\,\mathrm{d}t.$$

如果要把上式中的被積分函數改寫成式 (7.7) 中的形式，我們使用變數變換 $t = nx$，進而得到

$$n! = \int_0^{+\infty} n e^{n\ln(nx) - nx}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,\mathrm{d}x.$$

讓我們考慮函數 $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x - x$。我們有

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{以及} \quad h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

因此，我們可以取 $c = 1$ 並檢查 h 在 $(0,1)$ 上遞增，且在 $(1,+\infty)$ 上遞減。使用 Laplace 方法，我們得到：

$$n! \sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$