

黎曼積分的補充

第一節 區間上的黎曼可積性

第一小節 設定

在第 5.2 節中我們所看到的 Riemann–Stieltjes 積分理論中，積分函數與被積分函數都要求被定義在線段上，而且有界。然而，在一般的情況下，有界的條件未必會被滿足，或是被積分的區域未必會是 $\mathbb{R}$ 的緊緻子集合。在這章中，我們取黎曼積分為例子，來看在一般的區間上面，或是當被積分函數不是個有界函數時，如何定義黎曼積分。

這裡的積分函數，我們會把他們取為片段連續函數；而積分區間的部份，我們只考慮下列形式的區間：

$$\begin{aligned} [a, b) & \text{ 對於 } -\infty < a < b \leq +\infty, \\ (a, b] & \text{ 對於 } -\infty \leq a < b < +\infty, \\ (a, b) & \text{ 對於 } -\infty \leq a < b \leq +\infty. \end{aligned}$$

我們注意到，當區間在左方是開的，我們允許選擇 $a = -\infty$ ；當區間在右方是開的，我們允許選擇 $b = +\infty$ 。從區間形式為 $[a, b)$ 的理論，藉由對稱性，我們可以輕易推得區間形式為 $(a, b]$ 的情況；接著，對於區間為 (a, b) 的形式，我們把他們分解為 $(a, c] \cup [c, b)$ ，其中 $c \in (a, b)$ 。因此，在接下來的討論中，要討論一般區間上的性質，我們只需要討論 $[a, b)$ 這種類型區間上的性質就可以了。

我們也再次提醒，我們只對取值為實數的函數有興趣，因為對於任何取值在有限維度向量空間中的函數，我們可以使用如同在註解 5.2.2 (6) 中所提到分解，並透過線性方式來定義積分。

定義 7.1.1：

- 給定函數 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果存在分割 $P = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{P}([a, b])$ 使得對於每個 $1 \leq k \leq n$ ，函數 f 限制在開區間 (x_{k-1}, x_k) 上可以被延拓為在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的連續函數，則我們說 f 是個在線段 $[a, b]$ 上片段連續的函數。
- 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為子集合。給定函數 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果對於每個線段 $J \subseteq I$ ，限制函數 $f|_J$ 是個在 J 上片段連續的函數，則我們說 f 是個在 I 上片段連續的函數。
- 對於任意子集合 $I \subseteq \mathbb{R}$ ，我們把 $\mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ 記為由在 I 上片段連續的函數所構成的集合。
- 同理，對於任意賦範向量空間 $(W, \|\cdot\|)$ ，我們可以定義 $\mathcal{PC}(I, W)$ 為取值在 W 中片段連續數所構成的集合。

範例 7.1.2 :

- (1) 函數 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上是片段連續的。
- (2) 函數 $x \mapsto \ln x$ 在 $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$ 上是片段連續的。

命題 7.1.3 : 令 $I = [a, b]$ 為 $\mathbb{R}$ 中的線段。任意在 I 上片段連續的函數 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界的，且在 I 上黎曼可積。

證明 : 令 $f \in \mathcal{PC}(I, \mathbb{R})$ 其中 $I = [a, b]$ 是個線段。根據定義，對於每個 $1 \leq k \leq n$ ，存在連續函數 $g : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f|_{(x_{k-1}, x_k)} \equiv g|_{(x_{k-1}, x_k)}$ 。由於 g 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是可積的，所以 f 也是，見系理 5.3.22。接著我們使用命題 5.2.10 來總結 f 在 $[a, b]$ 上是可積的。□

第二小節 在區間上的可積性

在定理 6.1.16 中，我們看到對於取值在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的級數來說，如果牠會絕對收斂，則也會收斂。如果牠不會絕對收斂，那麼藉由重排級數中的項，則他的極限可以是任何的值，見定理 6.5.5。當我們要討論在一般區間上的黎曼積分時，我們也會遇到類似的現象。事實上，對於定義在一般區間 I 上的片段連續的函數來說，從命題 7.1.3 我們得知，他在任何子線段上的積分都是定義良好的。接著，如果我們取越來越長的子線段來覆蓋整個區間，或許有機會得到有意義的極限，這是我們可能會想要定義為在 I 上的積分的方式。然而，如果我們沒有絕對收斂的話，這個極限未必會是唯一的。我們先從比較簡單的情況下來看，先討論會絕對收斂的積分，也就是我們要討論的是被積分函數為非負的情況。稍後在第 7.2.2 小節中，我們會討論不會絕對收斂的情況。

令 I 為區間，並記 $\mathcal{PC}_+(I) = \mathcal{PC}_+(I, \mathbb{R}) := \mathcal{PC}(I, \mathbb{R}_+)$ 為在 I 上非負片段連續函數所構成的集合。

定義 7.1.4 : 令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。如果存在 $M \geq 0$ 使得對於任意區間 $J \subseteq I$ ，我們有 $\int_J f \leq M$ ，則我們說 f 在 I 上是可積的，這樣的情況下，我們記

$$\int_I f = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ 是個線段}}} \int_J f. \quad (7.1)$$

註解 7.1.5 : 如果 $a = \inf I$ 且 $b = \sup I$ ，我們也可以把式 (7.1) 中的積分改寫如下：

$$\int_a^b f = \int_I f.$$

我們注意到，當區間是個線段 $I = [a, b]$ ，且函數 f 是個非負片段連續函數時，式 (7.1) 中定義出來的可積分性，與定義 5.2.1 中的可積分性，在 $\alpha(x) = x$ 時 (RS) 條件會成立，這是等價的。

命題 7.1.6：令 $f \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上的非負可積函數。那麼，對於任意線段序列 $(J_n = [a_n, b_n])_{n \geq 1}$ 且滿足

$$\forall n \geq 1, \quad J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq I \quad \text{以及} \quad \bigcup_{n \geq 1} J_n = I, \quad (7.2)$$

我們會有

$$\int_I f = \sup_{n \geq 1} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx.$$

證明：讓我們考慮線段序列 $(J_n)_{n \geq 1}$ 滿足式 (7.2)。我們想要證明 $\int_{J_n} f$ 的極限與定義在式 (7.1) 中的 $\int_I f$ 相等。

- 對於每個 $n \geq 1$ ，我們有 $J_n \subseteq I$ ，由於 f 是非負的，我們有 $\int_{J_n} f \leq \int_I f$ 。藉由對 n 取 $\limsup$ ，我們得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \leq \int_I f.$$

- 給定 $\varepsilon > 0$ 。藉由最小上界的刻劃，式 (7.1) 告訴我們存在線段 $J = [a, b] \subseteq I$ 使得 $\int_J f + \varepsilon \geq \int_I f$ 。由於 $a, b \in I = \bigcup_{n \geq 1} J_n$ ，會存在 $N \geq 1$ 使得對於所有 $n \geq N$ ，我們有 $a, b \in J_n$ 。因此，對於 $n \geq N$ ，我們有

$$\int_{J_n} f \geq \int_J f \geq \int_I f - \varepsilon.$$

換句話說，

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \geq \int_I f - \varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \geq \int_I f.$$

總結來說，我們得到

$$\int_I f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \leq \int_I f,$$

也就是說 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f = \int_I f$ 。 □

範例 7.1.7：下面我們給出非負連續可積與不可積函數的例子。

- (1) 對於 $\lambda > 0$ ，函數 $t \mapsto e^{-\lambda t}$ 在 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上是可積的。我們可以固定 $\lambda > 0$ ，對於所

有 $n \geq 1$ ，取 $J_n = [0, n]$ 。對於每個 $n \geq 1$ ，我們有

$$\int_{J_n} e^{-\lambda t} dt = \int_0^n e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^n = \frac{1 - e^{-\lambda n}}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

在定義 7.1.4 中的條件的確是滿足的。

(2) 函數 $x \mapsto |\sin x|$ 是不可積的。事實上，對於每個 $k \in \mathbb{N}_0$ ，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

因此，

$$\forall n \geq 0, \quad \int_0^{n\pi} |\sin x| dx = 2n,$$

而這無法對 n 均勻去控制。

範例 7.1.8 【黎曼積分】：對於 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，我們討論函數 $f: t \mapsto t^{-\alpha}$ 的可積性。

- (1) 對於任意 $a > 0$ ，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $[a, +\infty)$ 上可積，若且唯若 $\alpha > 1$ 。
- (2) 對於任意 $a > 0$ ，函數 $t \mapsto t^{-\alpha}$ 在 $(0, a]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$ 。
- (3) 對於 $a < b$ ，函數 $t \mapsto (b - t)^{-\alpha}$ 在 $[a, b]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$ 。
- (4) 對於 $a < b$ ，函數 $t \mapsto (t - a)^{-\alpha}$ 在 $(a, b]$ 上可積，若且唯若 $\alpha < 1$ 。

範例 7.1.9 【Bertrand 積分】：對於 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，我們討論函數 $t \mapsto t^{-\alpha} |\ln t|^{-\beta}$ 的可積性。

- (1) 對於任意 $a > 1$ ，他在 $[a, +\infty)$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha > 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$ 。
- (2) 對於 $a \in (0, 1)$ ，他在 $(0, a]$ 上可積若且唯若 (i) $\alpha < 1$ 或 (ii) $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$ 。

在習題 7.2 中我們會討論更多細節。

定義 7.1.10：令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間且 $(W, \|\cdot\|)$ 為有限維度的 Banach 空間¹。給定片段連續函數 $f: I \rightarrow W$ 。如果 $\|f\|$ 在 I 上是在定義 7.1.4 的意義下可積，則我們說 f 在 I 上可積。給定 I 中的線段序列 $(J_n)_{n \geq 1}$ 且滿足式 (7.2)，我們可以定義

$$\int_I f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f \in W. \quad (7.3)$$

我們記 $L^1(I, W)$ 為由 I 映射至 W ，片段連續，且在上述意義下可積的函數所構成的集合，也

就是說

$$L^1(I, W) := \left\{ f : I \rightarrow W : \int_I \|f\| < +\infty \right\}.$$

註解 7.1.11：在定義 7.1.10 中，如果我們取 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ，我們會得到實數函數相對應到的可積性概念。

命題 7.1.12：在定義 7.1.10 中，序列 $(\int_{J_n} f)_{n \geq 1}$ 的極限存在，且當 $(J_n)_{n \geq 1}$ 滿足式 (7.2) 中的條件時，這個極限不取決於 $(J_n)_{n \geq 1}$ 的選擇。

註解 7.1.13：命題 7.1.12 的直接應用，可以讓我們得到：

- 當 $-\infty < a < b < +\infty$ 時，對於 $[a, b)$ 型的區間，對於 $n \geq 1$ ，我們可以取 $J_n = [a, b - \frac{1}{n}]$ ；
- 當 $-\infty < a < +\infty$ ，對於 $[a, +\infty)$ 型的區間，對於 $n \geq 1$ ，我們可以取 $J_n = [a, n]$ 。

證明：我們要檢查式 (7.3) 中的極限是定義良好的，且不取決於 $(J_n)_{n \geq 1}$ 的選擇。

- 令 $(J_n)_{n \geq 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。對於每個 $n \geq 1$ ，我們記 $J_n = [a_n, b_n]$ ，且令 $u_n = \int_{J_n} f$ 以及 $U_n = \int_{J_n} \|f\|$ 。我們想要證明 $(u_n)_{n \geq 1}$ 是個柯西序列。由於 $(W, \|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間， $(u_n)_{n \geq 1}$ 收斂。

令 $\varepsilon > 0$ 。由於 $\|f\|$ 在 I 上可積，序列 $(U_n)_{n \geq 1}$ 收斂，所以是個柯西序列。因此，我們可以找到 $N \geq 1$ 使得對於所有 $p, q \geq N$ ，我們有 $|U_p - U_q| < \varepsilon$ 。這代表著對於 $p > q \geq N$ ，我們有

$$\|u_p - u_q\| = \left\| \int_{[a_p, a_q]} f + \int_{[b_q, b_p]} f \right\| \leq \int_{[a_p, a_q]} \|f\| + \int_{[b_q, b_p]} \|f\| = U_p - U_q < \varepsilon.$$

這證明了 $(u_n)_{n \geq 1}$ 是個柯西序列，所以會收斂。

- 令 $(J_n)_{n \geq 1}$ 與 $(K_n)_{n \geq 1}$ 為滿足式 (7.2) 的線段序列。從證明的第一部份，我們知道下面極限存在：

$$u_n := \int_{J_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad \text{以及} \quad v_n := \int_{K_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v.$$

對於每個 $n \geq 1$ ，令 $L_n := J_n \cup K_n$ ，這會是兩個線段的聯集。我們注意到，對於小的 n 值， L_n 可能不會是個線段，但對大的 n 值， L_n 永遠會是個線段（ J_n 和 K_n 的交集非空）。因此，我們可以找到 $N \geq 1$ 使得對於所有 $n \geq N$ ， L_n 是個線段。那麼，

¹我們在註解 5.2.2 當中有解釋，在 J 是個線段，且 f 取值在 W 中時，如何構造積分 $\int_J f$ 。事實上，當 W 是個一般的 Banach 空間時（不需要有限維度的假設），我們還是能夠定義這個積分的。舉 f 連續為例子，我們可以使用他的均勻連續性來使用階躍函數來逼近 f 。

$(L_{n+N})_{n \geq 1}$ 也是個滿足式 (7.2) 的線段序列。我們會有

$$w_n := \int_{L_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w.$$

如同在第一部份中，令

$$\forall n \geq 1, \quad U_n = \int_{J_n} \|f\| \quad \text{以及} \quad W_n = \int_{L_n} \|f\|.$$

我們有

$$\|w_n - u_n\| = \left\| \int_{L_n \setminus J_n} f \right\| \leq \int_{L_n \setminus J_n} \|f\| = W_n - U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

其中最後一個收斂來自命題 7.1.6。這蘊含 $w = u$ 。同理，我們也有 $w = v$ ，所以 $u = v$ 。□

第三小節 性質

在定義 7.1.10 中所定義，在一般區間 I 上的積分，會滿足在線段上積分的性質。這可以理解為當我們對定義 7.1.10 取極限時，線性性質會被保存。如果 f 是個取值在 W 中且可積的片段連續函數，我們可以安全地使用下列關係式：

- 聯集關係式： $\int_I f + \int_J f = \int_{I \cup J} f$ 所要求的條件是 $I \cap J = \emptyset$ 而且三個積分中的兩個要有定義。
- 三角不等式： $\|\int_I f\| \leq \int_I \|f\|$ 。
- 對 C^1 函數的分部積分。
- 對 C^1 函數的變數變換。可以參考習題 A1.5 看到如果變數變換不是 C^1 的話，會發生什麼現象。

現在我們會給出一些在區間上可積性的判斷準則。我們從 $I = [a, b)$ 形式的區間，並考慮 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ ，其中 W 是個有限維度的 Banach 空間。下面性質不需要任何技巧就可以直接證明，我們只敘述這些性質，並不給出證明。

命題 7.1.14：令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數。下面性質是等價的。

- (1) f 在 $[a, b)$ 上是可積的。
- (2) 【部份積分】 $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\| dt$ 在 $[a, b)$ 上是有界的。
- (3) 【部份積分】 $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\| dt$ 當 $x \rightarrow b-$ 時極限是存在的。
- (4) 【餘項積分】 $x \mapsto \int_x^b \|f(t)\| dt$ 當 $x \rightarrow b-$ 時的極限是 0。
- (5) 【柯西準則】對於 $\varepsilon > 0$ ，存在 $A \in I$ 使得

$$\forall x, y \in [A, b), x < y, \quad \int_x^y \|f(t)\| dt < \varepsilon.$$

證明：這是定義 7.1.10、命題 7.1.12 和註解 7.1.13 的直接結果。 $\square$

命題 7.1.15：令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上的片段連續函數且 $c \in \overset{\circ}{I}$ 。我們記 $I_- := I \cap (-\infty, c]$ 以及 $I_+ := I \cap [c, +\infty)$ 。那麼，下列性質是等價的。

- (1) f 在 I 上可積。
- (2) f 在 I_- 和 I_+ 上可積。

在這樣的情況下，我們有 $\int_I f = \int_{I_-} f + \int_{I_+} f$ 。

證明：這是聯集關係式的直接結果。 $\square$

命題 7.1.16：令 $f \in \mathcal{PC}(I, W)$ 為在 I 上片段連續，且取值在有限維度的 Banach 空間 W 中的函數，以及 $\varphi \in \mathcal{PC}_+(I)$ 為在 I 上非負片段連續的函數。

- (1) 如果在 I 上，我們有 $\|f\| \leq \varphi$ 且 φ 是可積的，則 f 是可積的，且我們有 $\|\int_I f\| \leq \int_I \varphi$ 。
- (2) 如果 f 取值在 $\mathbb{R}_+$ 中而且是不可積的，且 $f \leq \varphi$ ，則 φ 是不可積的。

證明：

- (1) 對於 $x \in [a, b]$ ，我們有

$$\int_a^x \|f(t)\| dt \leq \int_a^x \varphi(t) dt \leq \int_a^b \varphi(t) dt = \int_I \varphi.$$

上式左方是有界的，所以我們可以用命題 7.1.14 來總結。此外，根據三角不等式，我們有 $\|\int_I f\| \leq \int_I \|f\|$ 。

- (2) 使用反證法，如果 φ 是可積的，那麼從 (1) 我們會得到 f 也是可積的。 $\square$

範例 7.1.17：檢查非負函數 $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ 在 $(0, 1)$ 上是可積的。讓我們取 $c = \frac{1}{2}$ 、 $I_- = (0, \frac{1}{2}]$ 以及 $I_+ = [\frac{1}{2}, 1)$ 。

- 對於 $t \in I_-$ ，我們有 $f(t) \leq \frac{2}{\sqrt{t}}$ 。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是可積的，所以 f 也是。
- 對於 $t \in I_+$ ，我們有 $f(t) \leq \frac{2}{\sqrt{1-t}}$ 。函數 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上是可積的，所以 f 也是。

第四小節 積分比較

我們考慮有限維度的 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 。我們接著會對非負可積與不可積函數，給出比較的結果。這些結果與級數的結果相似，見第 6.2.1 小節。注意到，我們比較的對象函數需要是非負的。

定義 7.1.18：令 $f: [a, b) \rightarrow W$ 以及 $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為兩個片段連續函數。

- 如果存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in [a, b) \cap B(b, \delta), \quad \|f(x)\| \leq M|g(x)|,$$

則我們記 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$ 或是 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ 當 $x \rightarrow b$ 。

- 如果對於 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x \in [a, b) \cap B(b, \delta), \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

我們記 $f \underset{b}{=} o(g)$ 或 $f(x) = o(g(x))$ 當 $x \rightarrow b$ 。

- 如果 $W = \mathbb{R}$ 且 $f - g \underset{b}{=} o(g)$ ，則我們記 $f \underset{b}{\sim} g$ 或 $f(x) \sim g(x)$ 當 $x \rightarrow b$ 。

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會收斂，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的餘項。當我們有非負可積函數時，我們能夠比較他們的餘項積分，如同下面命題所描述的。

命題 7.1.19 【可積函數的比較】：令 $f: [a, b) \rightarrow W$ 為片段連續函數以及 $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 為非負可積函數，則下列性質成立。

- (1) 如果 $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$ ，那麼 f 在 $[a, b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{=} \mathcal{O}(\int_x^b g)$ 。
- (2) 如果 $f \underset{b}{=} o(g)$ ，那麼 f 在 $[a, b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{=} o(\int_x^b g)$ 。
- (3) 如果 $W = \mathbb{R}$ 而且 $f \underset{b}{\sim} g$ ，那麼 f 在 $[a, b)$ 上可積，而且 $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g$ 。

註解 7.1.20：

- (1) 我們再次強調這些比較結果只有對非負函數 g 來說是會成立的。我們可以有 $f \underset{b}{\sim} g$ 但積分 $\int_a^b f$ 和 $\int_a^b g$ 有不一樣的行為。在級數的情況下，相同現象也會發生，我們不要忘記在註解 6.2.4 中所看到的結果。對於積分來說，我們稍後會在範例 7.2.16 給出對應的反例。
- (2) 我們注意到這些比較關係，在我們取原函數時，是會被「保存」的。然而，在微分時我們不會有這類的結果。例如，函數 $t \mapsto t^{3/2} \sin(\frac{1}{t})$ 在 $(0, 1]$ 上是可積的，且當 $t \rightarrow 0+$ 時會是 $o(t)$ 。從

命題 7.1.19 (2)，我們知道

$$\int_0^x t^{3/2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \underset{x \rightarrow 0+}{=} o(x^2).$$

但下面微分顯然不是 $o(1)$ ，因為在 $t \rightarrow 0+$ 時不會收斂：

$$\frac{d}{dt} \left(t^{3/2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \frac{3}{2} t^{1/2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) - t^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

證明：

(1) 根據假設，存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b - \delta, b), \quad \|f(t)\| \leq M g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b - \delta, b)$ ，我們有

$$\left\| \int_x^b f \right\| \leq \int_x^b \|f\| \leq M \int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon > 0$ 。根據假設，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b - \delta, b), \quad \|f(t)\| \leq \varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b - \delta, b)$ ，我們有

$$\left\| \int_x^b f \right\| \leq \int_x^b \|f\| \leq \varepsilon \int_x^b g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \sim_b g$ 。這代表著 $f - g \underset{b}{=} o(g)$ 。接著我們可以使用 (2) 的結果來總結

$$\int_x^b (f - g) \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g\right) \Leftrightarrow \int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g.$$

□

範例 7.1.21： Gamma 函數 Γ 定義如下：

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

函數 $f: t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ 在 $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ 上是連續的。

- 在 0 附近。當 $t \rightarrow 0$ ，我們有 $f(t) \sim t^{x-1}$ 。由於 $x-1 > -1$ ，根據黎曼積分（範例 7.1.8）以及可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 0 附近是可積的。

- 在 $+\infty$ 附近。我們有

$$t^{x-1}e^{-t} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{當 } t \rightarrow \infty.$$

由於函數 $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ 在 $+\infty$ 附近是可積的，根據可積函數的比較（命題 7.1.19），我們推得 f 在 $+\infty$ 附近是可積的。

我們可以總結 Gamma 函數 $\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 來說是定義良好的。我們可以檢查 Gamma 函數在一些點的取值： $\Gamma(1) = 1$ （直接計算）、 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ （變數變換後是個高斯積分，見習題 A1.6）。此外，透過分部積分，我們可以證明

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0. \quad (7.4)$$

在習題 7.9 中，我們會看到更多 Gamma 函數的性質以及他的一個刻劃。

範例 7.1.22：我們的目標是找到 $\arccos x$ 在 $x = 1$ 附近的漸進表示式。首先，我們注意到

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos x.$$

接著，我們有下面這個等價關係：

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}, \quad \text{當 } t \rightarrow 1.$$

由於 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0, 1)$ 上是可積的，從命題 7.1.19 (3)，我們知道當 $x \rightarrow 1$ 時，我們會有

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2(1-x)}, \quad \text{當 } x \rightarrow 1.$$

範例 7.1.23：下面是高斯積分，我們在習題 A1.6 中有計算過他的值：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

讓我們來估計上面這個積分的尾巴：

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{當 } x \rightarrow \infty.$$

- (1) 首先，我們有下面這個漸進比較關係：

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = o(te^{-\frac{t^2}{2}}), \quad \text{當 } t \rightarrow \infty.$$

從命題 7.1.19 (2) 我們得知，當 $x \rightarrow \infty$ 是，會有

$$F(x) = o\left(\int_x^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = o\left(\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^{\infty}\right) = o\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

(2) 如果在 $x \rightarrow \infty$ 時，想要得到更詳細 $F(x)$ 的漸進式，我們可以從分部積分開始。我們寫

$$\sqrt{2\pi}F(x) = \int_x^\infty \frac{-te^{-\frac{t^2}{2}}}{-t} dt = \left[\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t} \right]_{t=x}^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt.$$

此外，我們有

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2} dt = o\left(\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = o(F(x)), \quad \text{當 } x \rightarrow \infty,$$

因此我們推得

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} (1 + o(1)), \quad \text{當 } x \rightarrow \infty.$$

透過遞迴，你可以證明對於任意 $n \geq 0$ ，我們有

$$\sqrt{2\pi}F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}} \right) + (-1)^{n+1} (2n+1)!! \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^{2n+2}} dt,$$

這會蘊含

$$F(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}} \right) (1 + o(1)), \quad \text{當 } x \rightarrow \infty.$$

我們回顧在定理 6.2.8 當中，對於會發散，一般項非負，且有漸進關係的級數來說，我們可以比較他們的部份和。當我們有非負不可積函數時，我們能夠比較他們的部份積分，如同下面命題所描述的。

命題 7.1.24 【不可積函數的比較】： 令 $f : [a, b) \rightarrow W$ 以及 $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 為非負不可積函數，則下列性質成立。

- (1) 如果 $f = \mathcal{O}(g)$ ，那麼 $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g\right)$ 。
- (2) 如果 $f = o(g)$ ，那麼 $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$ 。
- (3) 如果 $W = \mathbb{R}$ 而且 $f \underset{b}{\sim} g$ ，那麼 f 在 $[a, b)$ 上不可積，而且 $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g$ 。

證明：由於 g 是非負，且在 $[a, b)$ 上不可積，我們有

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g = +\infty. \quad (7.5)$$

(1) 根據假設，存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b - \delta, b), \quad \|f(t)\| \leq M g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b - \delta, b)$ ，我們有

$$\left\| \int_a^x f \right\| \leq \int_a^x \|f\| \leq \int_a^{b-\delta} \|f\| + M \int_{b-\delta}^x g \leq \int_a^{b-\delta} \|f\| + M \int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta' \in (0, \delta)$ 使得

$$\forall x \in [b - \delta', b), \quad \int_a^{b-\delta} \|f\| \leq M \int_a^x g.$$

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x \in [b - \delta', b), \quad \left\| \int_a^x f \right\| \leq 2M \int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(2) 令 $\varepsilon > 0$ 。根據假設，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall t \in [b - \delta, b), \quad \|f(t)\| \leq \varepsilon g(t).$$

因此，對於任意 $x \in [b - \delta, b)$ ，我們有

$$\left\| \int_a^x f \right\| \leq \int_a^{b-\delta} \|f\| + \varepsilon \int_{b-\delta}^x g \leq \int_a^{b-\delta} \|f\| + \varepsilon \int_a^x g.$$

此外，從式 (7.5) 我們可以推得存在 $\delta' \in (0, \delta)$ 使得

$$\forall x \in [b - \delta', b), \quad \int_a^{b-\delta} \|f\| \leq \varepsilon \int_a^x g.$$

把上面兩個關係式放在一起，我們得到

$$\forall x \in [b - \delta', b), \quad \left\| \int_a^x f \right\| \leq 2\varepsilon \int_a^x g,$$

這是我們想要證明的。

(3) 假設 $f \sim_b g$ 。這代表著 $f - g = o(g)$ 。再來我們使用 (2) 的結果來總結：

$$\int_a^x (f - g) \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g\right) \Leftrightarrow \int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g.$$

□

範例 7.1.25：當 $x \rightarrow \infty$ 時，下面的積分會發散（範例 7.1.9）：

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

我們想要找出當 $x \rightarrow \infty$ 時，一個等價的關係式。透過分部積分，我們有

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_{t=2}^x + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

我們也有下面這個漸進比較：

$$\frac{1}{(\ln t)^2} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad \text{當 } t \rightarrow \infty,$$

這會讓我們得到

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right), \quad \text{當 } x \rightarrow \infty.$$

把上面的關係式放在一起，我們推得

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}, \quad \text{當 } x \rightarrow \infty.$$

第二節 瑕積分

如同我們在第 7.1.1 小節當中所提到的，要討論在一般區間上函數的積分，我們只需要考慮 $I = [a, b)$ 的情況，其中 $-\infty < a < b \leq +\infty$ 。我們接下來要考慮的積分函數不一定要是非負的。如果積分區間寫做 $I = (a, b)$ ，其中 $-\infty < a < b < +\infty$ ，那麼如同在命題 7.1.15 中所看到的，我們只需要取任意的 $c \in (a, b)$ 並把區間切割成 $I_- = (a, c]$ 和 $I_+ = [c, b)$ ，並各自處理即可，見定義 7.2.9。

第一小節 定義與性質

定義 7.2.1：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。

(1) 如果函數

$$x \mapsto \int_{[a, x]} f(t) dt := \int_a^x f(t) dt$$

是定義良好的，且當 $x \rightarrow b-$ 時有有限的極限，則我們說積分 $\int_{[a, b)} f = \int_{[a, b)} f(t) dt$ 收斂。在這個情況下，我們把這個極限記作 $\int_{[a, b)} f$ 或 $\int_{[a, b)} f(t) dt$ 。這樣的積分稱作瑕積分 (improper integral)。

(2) 如果上面的極限不存在，則我們說積分 $\int_{[a, b)} f$ 發散。

註解 7.2.2：在 f 是非負的情況，定義 7.2.1 中定義的收斂與定義 7.1.4 中定義的可積性是相同的。

命題 7.2.3 【柯西準則】：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。下面性質是等價的。

- (1) 積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂。
- (2) 對於任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $c \in [a, b)$ 使得對於任意 $x, y \in [c, b)$ 滿足 $x < y$ ，我們有

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

證明：由於 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 是完備的，收斂性與柯西性質是等價的。 □

命題 7.2.4：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。令 $c \in [a, b)$ 。那麼下面性質成立。

- (1) 積分 $\int_{[a,b)} f$ 和 $\int_{[c,b)} f$ 有相同行為。
- (2) 如果他們兩個都收斂的話，我們有

$$\int_{[a,b)} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b)} f.$$

證明：兩個性質都是線段上的所對應性質（命題 5.2.10）推廣後的直接結果：

$$\forall c \in [a, b), \forall x \in [c, b), \quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f. \quad \square$$

系理 7.2.5：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。如果積分 $\int_{[a,b)} f$ 收斂，那麼當 $x \rightarrow b-$ 時，我們有

$$\int_{[x,b)} f \rightarrow 0.$$

在這樣的情況下，我們稱積分 $\int_{[a,x]} f$ 為 $\int_{[a,b)} f$ 的部份積分，積分 $\int_{[x,b)} f$ 為他的餘項積分。

證明：假設 $\int_{[a,x]} f$ 在當 $x \rightarrow b-$ 時的極限是有限的，且記作 $\int_{[a,b)} f$ 。這代表著 $\int_{[a,b)} f = \int_{[a,b)} f - \int_{[a,x]} f$ 在 $x \rightarrow b-$ 時會收斂至 0。 □

命題 7.2.6：令 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為有界函數。假設 $f \in R(x; a, b)$ ，那麼瑕積分 $\int_{[a, b)} f$ 收斂且我們有

$$\int_{[a, b)} f = \int_a^b f.$$

註解 7.2.7：這個命題告訴我們，如果數 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是黎曼可積的，那麼他的積分與在 $[a, b)$ 上的瑕積分是相等的。換句話說，在定義 7.2.1 中所定義的瑕積分，推廣了我們在第五章中所看到的線段上的積分。因此，只要當 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是個在 $[a, b)$ 上片段連續的函數，且積分 $\int_{[a, b)} f$ 存在時，我們也可以用之前的記號來記瑕積分：

$$\int_a^b f := \int_{[a, b)} f.$$

命題 7.2.8：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 有界且 F 是個 f 的原函數。下面性質是等價的：

- (1) 積分 $\int_a^b f$ 收斂；
- (2) F 在 $b-$ 有個有限的極限。

在這樣的情況下，我們有

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - F(a),$$

而且函數

$$x \mapsto \int_x^b f$$

在 $[a, b)$ 上定義良好，在 (a, b) 上可微，且微分為 $-f$ 。

證明：這證明可以從我們前面討論過的內容直接推得，可以當作習題證明。 □

定義 7.2.9：令 $-\infty < a < b < +\infty$ 以及 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。固定 $c \in (a, b)$ 。如果 $\int_{(a, c]} f$ 和 $\int_{[c, b)} f$ 都定義良好，則我們說瑕積分

$$\int_{(a, b)} f := \int_a^b f$$

是定義良好的。

註解 7.2.10：我們注意到，在定義 7.2.9 當中， $c \in (a, b)$ 的選擇並不重要。事實上，對於任意 $c_1, c_2 \in (a, b)$ 滿足 $c_1 < c_2$ ，我們有

- $\int_{(a, c_1]} f$ 收斂若且唯若 $\int_{(a, c_2]} f$ 收斂；
- $\int_{[c_1, b)} f$ 收斂若且唯若 $\int_{[c_2, b)} f$ 收斂。

範例 7.2.11：讓我們考慮函數 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ，定義做：

$$\forall x \in (0, 1), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

(1) 如果我們考慮 $I_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ ，那麼對於任意 $n \geq 1$ ，我們有

$$\int_{I_n} f = [\ln x + \ln(1-x)]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = 0.$$

(2) 如果我們考慮 $J_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}]$ ，那麼對於任意 $n \geq 1$ ，我們有

$$\int_{J_n} f = [\ln x + \ln(1-x)]_{x=\frac{1}{n}}^{1-\frac{2}{n}} = \ln(1 - \frac{2}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n}) + \ln 2,$$

這會蘊含

$$\int_{J_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2.$$

(3) 然而，函數 f 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上的積分是不會收斂的。對於 $n \geq 1$ ，考慮 $K_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ ，那麼我們有

$$\int_{K_n} f = [\ln x + \ln(1-x)]_{x=\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} = 2 \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{n} - \ln(1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

f 在 $(0, 1)$ 瑕積分的存在性必須使用 (3) 的方法來檢查，見定義 7.2.9。總結來說，(1) 和 (2) 給我們不同的有限極限，這是因為 f 在定義 7.1.10 的意義下是不可積的。

第二小節 條件收斂

我們看過有些級數會條件收斂，也就是說會收斂，但不會絕對收斂，見第 6.4 節。在定義 7.2.1 中，我們定義在一般區間上積分的方式，與級數的定義是類似的，所以我們也可以有會收斂，但不會絕對收斂的積分，我們稱這樣的積分為條件收斂。對於這樣的積分，我們也會有 Abel 變換，以及相對應的 Dirichlet 檢測法，來討論積分的收斂性，見定理 7.2.14。

定義 7.2.12：給定片段連續函數 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果他的積分收斂（在瑕積分的意義下，見定義 7.2.1 以及定義 7.2.9），但不會絕對收斂（或是說 f 在 I 上不可積，見定義 7.1.10），則我們說他的積分 $\int_I f$ 是條件收斂的。

範例 7.2.13：下面積分會條件收斂：

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (7.6)$$

- 我們證明這個積分不會絕對收斂。對於每個 $k \in \mathbb{N}$ ，我們有

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

由於級數 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ 發散，我們推得

$$\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

也發散。因此，式 (7.6) 不會絕對收斂。

- 令 $t > \pi$ 。我們寫

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{x=\pi}^t - \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

當 $t \rightarrow \infty$ ，我們有 $\frac{\cos t}{t} \rightarrow 0$ 。此外，由於函數 $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ 在 $[\pi, \infty)$ 上是可積的，我們知道積分

$$\int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx$$

在 $t \rightarrow \infty$ 時會收斂。

定理 7.2.14 【Abel 法則】：令 $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為 C^1 類函數且 $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數。假設

(i) f 遞減且 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ ；

(ii) 存在 $M > 0$ 使得對於任意 $x \in [a, b)$ ，我們有 $|\int_a^x g(t) dt| \leq M$ 。

則積分 $\int_a^b f(t)g(t) dt$ 會收斂。

證明：令 $\varepsilon > 0$ 。由假設 (i)，我們能找到 $A \in [a, b)$ 使得

$$\forall x \in [A, b), \quad 0 \leq f(x) \leq \varepsilon.$$

我們也能定義

$$\forall x \in [a, b), \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

接著從 (ii) 我們知道對於所有 $x \in [a, b)$ ，我們有 $|G(x)| \leq M$ 。

對於任意 $x, y \in [a, b]$ 滿足 $y \geq x \geq A$ ，透過分部積分我們得到：

$$\int_x^y f(t)g(t) dt = \left[f(t)G(t) \right]_{t=x}^y - \int_x^y f'(t)G(t) dt.$$

讓我們一一控制上式右手邊中的項。我們有

$$|f(y)G(y) - f(x)G(x)| \leq 2\varepsilon M,$$

還有

$$\left| \int_x^y f'(t)G(t) dt \right| \leq \int_x^y (-f'(t))M dt = [f(x) - f(y)]M \leq \varepsilon M.$$

這代表著

$$\left| \int_x^y f(t)g(t) dt \right| \leq 3\varepsilon M,$$

所以柯西準則（命題 7.2.3）會成立，所以會蘊含 $\int_a^b f(t)g(t) dt$ 的收斂。 $\square$

範例 7.2.15：當 $\alpha > 0$ 時，下列積分收斂：

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad \text{以及} \quad \int_1^\infty \frac{e^{ix}}{x^\alpha} dx.$$

這是定理 7.2.14 的直接結果，也可以透過像是在範例 7.2.13 中一樣，使用分部積分得到此結果。

範例 7.2.16：讓我們考慮下面兩個定義在 $[1, +\infty)$ 上的函數：

$$\forall x \in [1, +\infty), \quad f(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \quad \text{以及} \quad g(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

這兩個函數在 $x \rightarrow +\infty$ 時是等價的。

- 從範例 7.2.15 我們知道 $\int_1^\infty f(x) dx$ 會收斂。
- $\int_1^\infty g(x) dx$ 無法收斂，因為如果收斂的話， $\int_1^\infty (g(x) - f(x)) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ 也會收斂，但這是錯的。

第三節 Laplace 方法

我們使用 Laplace 方法來總結這個章節。這是個當我們需要去找出漸進式時，非常好用的方法。

定理 7.3.1 【Laplace 方法】： 令 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ 以及兩個 C^2 類的函數 $g, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 。假設

- (i) 函數 $x \mapsto g(x)e^{h(x)}$ 在 (a, b) 上是可積的。
- (ii) 存在 $c \in (a, b)$ 滿足
 - (a) h 在 (a, c) 是遞增的，且在 (c, b) 上是遞減的，而且 $h''(c) < 0$ ；
 - (b) $g(c) \neq 0$ 。

那麼，當 $\lambda \rightarrow +\infty$ 時，我們有

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda h(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot g(c)e^{\lambda h(c)}. \quad (7.7)$$

證明： 這個定理的嚴謹證明比較複雜一點，我們這裡只給證明的想法、以及簡化過的證明。此外，我們也把函數 g 取為常數函數 $g \equiv 1$ 。我們把 h 在 c 附近的 Taylor 展開式寫下來：

$$h(c+x) = h(c) + \underbrace{h'(c)}_{=0}x + h''(c)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{當 } x \rightarrow 0.$$

我們需要詳細解釋下面這個近似：

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\lambda h(x)} dx &\approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c+x)} dx \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda h(c) + \frac{\lambda h''(c)}{2}x^2} dx \\ &\approx e^{\lambda h(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda h''(c)}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot e^{\lambda h(c)}, \end{aligned}$$

其中最後一個等式是透過高斯積分所得到的，見習題 A1.6。 □

範例 7.3.2： 讓我們考慮範例 7.1.21 中所定義的 Gamma 函數。

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

我們回顧他的遞迴關係式： $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 對於所有 $x > 0$ 都會成立。特別來說，對於任意整數 $n \geq 1$ ，我們會有 $\Gamma(n+1) = n!$ 。我們可以對 Gamma 函數使用 Laplace 方法，來找出 $n!$ 的漸進展開式，稱作 Stirling 公式，也可以參考習題 6.12。

我們有

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{n \ln t - t} dt.$$

如果要把上式中的被积分函数改写成式 (7.7) 中的形式，我們使用變數變換 $t = nx$ ，進而得到

$$n! = \int_0^{+\infty} n e^{n \ln(nx) - nx} dx = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)} dx.$$

讓我們考慮函數 $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x - x$ 。我們有

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{以及} \quad h''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

因此，我們可以取 $c = 1$ 並檢查 h 在 $(0, 1)$ 上遞增，且在 $(1, +\infty)$ 上遞減。使用 Laplace 方法，我們得到：

$$n! \sim n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$