第八章 函數的數列與級數

令 A 為集合，且 (M,d) 為賦距空間。我們記 $\mathcal{F}(A,M)$ 為由 A 映射到 M 的函數所構成的空間，還有 $\mathcal{B}(A,M)$ 為由 A 映射至 M 的有界函數所構成的空間。我們也可以把賦距空間取做在 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量空間 W，這樣我們就會有 $+$ 的運算。我們把這個向量空間所賦予的範數記作 $\|\cdot\|$。

在這一章中，我們有興趣的是函數的序列和級數，我們也可以把他們看做是項在 $\mathcal{F}(A,M)$ 或 $\mathcal{F}(A,W)$ 裡面的序列和級數。

第一節 收斂概念

我們討論對於函數序列以及函數級數的不同收斂概念。

第一小節 函數序列

對於函數序列來說，我們有不同收斂概念。我們接下來會討論逐點收斂（定義 8.1.1 ）以及比較強的收斂概念，稱作均勻收斂（定義 8.1.4 ）。

定義 8.1.1 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 A 映射至 M 的函數所構成的序列，也就是說他們是 $\mathcal{F}(A,M)$ 中的元素。

- 令 $f\in\mathcal{F}(A,M)$。如果在 (M,d) 中，對於每個 $x\in A$，我們有 $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$，則我們說序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂 (pointwise convergence) 至 f。
- 如果存在 $f\in\mathcal{F}(A,M)$ 使得 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐點收斂至 f，則我們說序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂。
- 令 $B\subseteq A$ 為子集合。如果 $((f_n)_{|B})_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂，則我們說 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 B 上逐點收斂。

範例 8.1.2 ： 讓我們考慮定義如下的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$：

$$\forall n\geqslant 1,\quad f_n:\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^n.\end{array}$$

函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[0,1]$ 上逐點收斂到指標函數 $f=\mathbb{1}_{\{1\}}$。

註解 8.1.3 ：

(1) 如果序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐點收斂，則他的極限函數 f 是唯一的。

(2) 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為會逐點收斂的函數序列。假設這些函數取值在有限維度的向量空間 $(W,\|\cdot\|)$ 中，那麼他的極限不會取決於他的範數，因為所有 W 中的範數都是等價的。

(3) 函數的性質像是線性、乘積、不等式、單調性等等都會被逐點收斂所保存。

(4) 我們在範例 8.1.2 中看到，在 1 的連續性在極限時不會被保存下來。的確，對於所有 $n\in\mathbb{N}$，函數 f_n 是連續的，但是極限函數 f 在 1 不連續。換句話說，下面這兩個迭代極限是不同的：

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=0\neq 1=\lim_{n\to\infty} 1=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x).$$

我們在範例 6.7.2 中有看過類似的現象。

(5) 分析性質像是連續性和可微分性是無法被逐點收斂所保存的。稍後我們會定義均勻收斂的概念（定義 8.1.4），並且看到分析性質可以被這樣的收斂概念所保存（命題 8.2.1）。

定義 8.1.4 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 A 映射至 M 的函數所構成的序列。

- 令 $f\in\mathcal{F}(A,M)$。如果

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\geqslant 1,\ \forall n\geqslant N,\ \forall x\in A,\quad d(f_n(x),f(x))\leqslant\varepsilon, \tag{8.1}$$

則我們說序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會<u>均勻收斂</u> (uniform convergence) 至 f。

- 如果存在 $f\in\mathcal{F}(A,M)$ 使得 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂至 f，則我們說序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收

斂。

- 令 $B \subseteq A$ 為子集合。如果 $((f_n)_{|B})_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂，則我們說 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 B 上均勻收斂。

註解 8.1.5 ： 我們可以把逐點收斂的定義數學化。如果

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 1,\ \forall n \geqslant N, \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon, \tag{8.2}$$

則我們說 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂至 f。如果我們比較式 (8.1) 和式 (8.2)，我們看到在逐點收斂的情況下，N 的選擇會取決於 $x \in A$；但在均勻收斂的情況下，則不會取決於 $x \in A$。這就是位什麼我們把式 (8.1) 條件所刻劃的收斂稱作均勻收斂。這個註解會讓我們得到下面這個系理。

系理 8.1.6 ： 如果函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f，那麼他會逐點收斂到 f。

註解 8.1.7 ： 透過逐點收斂的唯一性（註解 8.1.3 ），我們能推得函數序列均勻收斂極限的唯一性。要證明函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 均勻收斂，我們可以先從計算他逐點收斂的極限 f 開始，然後證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f。

命題 8.1.8 【均勻收斂的柯西準則】： 假設 (M, d) 是個完備賦距空間。令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $\mathcal{F}(A, M)$ 中的序列。則 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂，若且唯若他滿足均勻柯西準則，換句話說：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geqslant 1, \forall m, n \geqslant N, \forall x \in A, \quad d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon.$$

證明：給定 $\varepsilon > 0$。令 $N \geqslant 1$ 使得均勻柯西準則成立，也就是說：

$$\forall m, n \geqslant N, \forall x \in A, \quad d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon. \tag{8.3}$$

對於每個 $x \in A$，我們看到 $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ 是個柯西序列，所以會收斂到某個極限，我們記作

$f(x)$。藉由在式 (8.3) 中對 $m \to \infty$ 取極限，我們得到

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in A, \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon,$$

這剛好就是式 (8.1) 中，刻劃 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 均勻收斂到 f 的方式。 □

定義 8.1.9 ： 均勻收斂的概念可以使用距離（或是範數）來描述。

- 令 (M, d) 為賦距空間以及 $\mathcal{B}(A, M)$ 為由 A 映射到 M 有界函數所構成的集合。我們可以賦予 $\mathcal{B}(A, M)$ 下面這個距離：

$$\forall f, g \in \mathcal{B}(A, M), \quad d_\infty(f, g) = d_{\infty, A}(f, g) := \sup_{x \in A} d(f(x), g(x)), \tag{8.4}$$

稱作均勻收斂距離。對有界函數序列 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 來說，他會均勻收斂到 f 與在距離 d_∞ 之下，$(f_n)_{n \geqslant 1}$ 會收斂到 f 等價。

- 令 $(W, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間以及 $\mathcal{B}(A, W)$ 為由 A 映射到 W 有界函數所構成的集合。我們可以賦予 $\mathcal{B}(A, W)$ 下面這個範數：

$$\forall f \in \mathcal{B}(A, W), \quad \|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, A} := \sup_{x \in A} \|f(x)\|, \tag{8.5}$$

稱作均勻收斂範數。對有界函數序列 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 來說，他會均勻收斂到 f 與在範數 $\|\cdot\|_\infty$ 之下，$(f_n)_{n \geqslant 1}$ 會收斂到 f 等價。

命題 8.1.10 ： 令 $(W, \|\cdot\|)$ 為 Banach 空間。那麼下列性質成立。

(1) 有界函數空間 $\mathcal{B}(A, W)$ 在賦予式 (8.5) 中定義的範數 $\|\cdot\|_\infty$ 時，是個 Banach 空間。

(2) 在 $\mathcal{B}(A, W)$ 中的序列 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 會均勻收斂到 $f \in \mathcal{B}(A, W)$ 若且唯若 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 在式 (8.5) 中定義的範數 $\|\cdot\|_\infty$ 之下會收斂到 f，換句話說 $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$。

證明：

(1) 不難檢查 $\|\cdot\|_\infty$ 定義在向量空間 $\mathcal{B}(A,W)$ 上的範數。接著我們檢查這是個完備空間。我們給定 $\mathcal{B}(A,W)$ 中的序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$，使得他對於範數 $\|\cdot\|_\infty$ 來說是個柯西序列。對於每個 $x\in A$，我們知道 $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ 是個在 Banach 空間 $(W,\|\cdot\|)$ 中的柯西序列，所以他會收斂到某個極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$。由於 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個在 $(\mathcal{B}(A,W),\|\cdot\|_\infty)$ 中的柯西序列，存在 $M>0$ 使得 $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ 對於所有 $n\geqslant 1$。因此，對於每個 $x\in A$，我們有 $\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\| \leqslant M$，所以 $\|f\|_\infty \leqslant M$，也就是說 $f\in\mathcal{B}(A,W)$。最後，我們不難檢查 $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，所以我們可以總結 $(\mathcal{B}(A,W),\|\cdot\|_\infty)$ 是完備的。

(2) 把式 (8.5) 中定義的範數用上來，這剛好就只是把式 (8.1) 在賦範向量空間 $(W,\|\cdot\|)$ 中改寫所得到的。 □

範例 8.1.11 ： 考慮函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0,1],\quad f_n(x) = x^n(1-x).$$

不難檢查 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到零函數。對於每個 $n\in\mathbb{N}$，函數 f_n 是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的，所以我們可以透過計算他的微分，來找出在 $[0,1]$ 上的極值。我們有

$$\forall x\in[0,1],\quad f_n'(x) = nx^{n-1}\Big(1-\frac{n+1}{n}x\Big).$$

因此，函數 f_n 在 $[0,\frac{n}{n+1}]$ 上會遞增，在 $[\frac{n}{n+1},1]$ 上會遞減，所以在 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 時有最大值在，也就是說：

$$\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)\leqslant f_n(x_n) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

因此，序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[0,1]$ 上均勻收斂到零函數。

註解 8.1.12 ： 如果函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐點收斂到 f，如果想要證明這個收斂不是均勻的，我們可以考

處式 (8.1) 的否命題，寫做：

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \geqslant 1,\ \exists n \geqslant N\ \exists x \in A \quad d(f_n(x), f(x)) > \varepsilon.$$

換句話說，我們需要找到取值在 A 中的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 以及萃取函數 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得序列 $(d(f_{\varphi(n)}(x_n), f(x_n)))_{n\geqslant 1}$ 有個嚴格為正的均勻下界。

範例 8.1.13 ： 讓我們考慮下面這個函數序列：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \frac{x+\sqrt{n}}{x+n}.$$

不難看出來函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到零函數。如果想要證明他不會均勻收斂，我們使用註解 8.1.12 中提到的方法。對於 $n \geqslant 1$，令 $x_n = n$。那麼我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x_n) - 0 = \frac{n+\sqrt{n}}{n+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$

我們總結 $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ 會逐點收斂但不會均勻收斂。

下面的定理告訴我們，可以加上什麼樣的假設，讓我們可以把逐點收斂升級為均勻收斂。

定理 8.1.14 【Dini 定理】 ： 令 (K,d) 為緊緻空間，且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 K 映射至 $\mathbb{R}$ 的連續函數所構成的序列。假設

(i) 序列是遞增的，也就是說對於每個 $x \in K$ 還有 $n \in \mathbb{N}$，我們有 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$；

(ii) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到一個連續函數 $f : K \to \mathbb{R}$。

那麼，序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f。

證明： 對於每個 $n \in \mathbb{N}$，我們定義連續函數 $g_n = f - f_n \geqslant 0$。根據假設 (i)，函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 是遞減的。給定 $\varepsilon > 0$，對於 $n \in \mathbb{N}$，我們定義 $E_n = \{x \in K : g_n(x) < \varepsilon\}$。對於每個 $n \in \mathbb{N}$，

由於 g_n 是連續的，集合 E_n 是個開集；由於序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 是遞減的，序列 $(E_n)_{n\geqslant 1}$ 是遞增的。假設 (ii) 會告訴我們 $\bigcup_{n\geqslant 1} E_n = K$。由於 K 是緊緻的，根據 Borel–Lebesgue 性質（定義 3.1.3），存在 $N \geqslant 1$ 使得 $E_N = \bigcup_{n=1}^{N} E_n = K$。這代表著對於任意 $n \geqslant N$ 以及 $x \in K$，我們有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。 □

註解 8.1.15：我們下面給出另一個版本 Dini 定理的敘述。令 $I = [a,b]$ 為線段且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$（未必連續）的函數序列。假設

(i) 對於每個 $n \geqslant 1$，函數 f_n 在 I 上是遞增的；

(ii) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到連續函數 $f : I \to \mathbb{R}$。

那麼，序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂至 f。證明請見習題 8.7。

第二小節 函數級數

在這個章節，令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 A 映射至 W 的函數序列，其中 $(W, \|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間。

定義 8.1.16：

- 如果對於每個 $x \in A$，級數 $\sum u_n(x)$ 會收斂，則我們說函數級數 $\sum u_n$ 逐點收斂。我們記

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n\geqslant 1} u_n : \quad A &\to \quad W \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x). \end{aligned}$$

- 對於 $x \in A$，我們定義函數 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$，稱作函數級數 $\sum u_n$ 的第 n 個部份和。
- 如果函數級數 $\sum u_n$ 會逐點收斂，那麼第 n 個餘項定義做 $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 對於 $x \in A$。
- 如果部份和 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 會均勻收斂，則我們說函數級數 $\sum u_n$ 均勻收斂。

命題 8.1.17 ： 函數級數 $\sum u_n$ 會均勻收斂若且唯若

(i) 函數級數 $\sum u_n$ 會逐點收斂，而且

(ii) 餘項序列 $(R_n)_{n\geqslant 0}$ 會均勻收斂到零函數。

證明： 令 $\sum u_n$ 為函數級數，$(S_n)_{n\geqslant 0}$ 為他的部份和，還有 $(R_n)_{n\geqslant 0}$ 為他的餘項。

- 假設 $\sum u_n$ 均勻收斂至 u，這代表著 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 均勻收斂至 u，從系理 8.1.6 我們得知這個收斂也會是逐點的。均勻收斂代表 $\|S_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，由於 $u - S_n = R_n$，我們得知這和 $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 等價。
- 假設 (i) 和 (ii) 成立，並把 $\sum u_n$ 逐點收斂的極限記作 u。由於 $R_n = u - S_n$，且會均勻收斂至零，我們得到 $\|S_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，我們會得到 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 均勻收斂至 u。 □

範例 8.1.18 ： 讓我們考慮函數級數 $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 其中每項都是定義在 $[0,1]$ 上的函數。我們這裡要證明這個函數級數會均勻收斂。對於每個 $x \in [0,1]$，序列 $(\frac{x^n}{n})_{n\geqslant 1}$ 非遞增且極限為零。從定理 6.4.2 我們得知級數 $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 會收斂，而且餘項 $R_n(x)$ 滿足

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

這不會取決於 $x \in [0,1]$。這代表這個函數級數的收斂是均勻的。

註解 8.1.19 ： 我們注意到函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 均勻收斂與函數級數 $\sum (f_{n+1} - f_n)$ 均勻收斂是等價的。

命題 8.1.20 【柯西條件】 ： 函數級數 $\sum u_n$ 會均勻收斂若且唯若對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \forall k \geqslant 1, \quad \|u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}\|_\infty < \varepsilon.$$

這個是在函數級數情況下的柯西條件。

證明：這個與系理 6.1.11 非常相同。從命題 8.1.10 (1)，我們知道 $(\mathcal{B}(A,W),\|\cdot\|_\infty)$ 是個 Banach 空間，而在這個空間中，序列收斂若且唯若他是個柯西序列。 □

定義 8.1.21 ： 對於每個 $n\geqslant 1$，令 $u_n\in\mathcal{B}(A,W)$。如果級數 $\sum\|u_n\|_{\infty,A}$ 收斂，則我們說函數級數 $\sum u_n$ 會在 A 上正規收斂 (normal convergence) 。

命題 8.1.22 ： 假設 $(W,\|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間。令 $\sum u_n$ 為由 A 映射到 W 的有界函數構成的級數，且會在 A 上正規收斂。那麼下列性質會成立。

(1) 對於每個 $a\in A$，級數 $\sum u_n(a)$ 會絕對收斂。

(2) 函數級數 $\sum u_n$ 會均勻收斂。

證明：

(1) 令 $a\in A$。對於每個 $n\geqslant 1$，我們有 $\|u_n(a)\|\leqslant\|u_n\|_\infty$。由於 $\sum\|u_n\|_\infty$ 會收斂，我們推得 $\sum u_n(a)$ 會絕對收斂。

(2) 對於每個 $n,k\geqslant 1$ 以及 $x\in A$，我們有

$$\|u_n(x)+\cdots+u_{n+k}(x)\|\leqslant\|u_n(x)\|+\cdots+\|u_{n+k}(x)\|\leqslant\|u_n\|_\infty+\cdots+\|u_{n+k}\|_\infty\,.$$

因此，級數 $\sum\|u_n\|_\infty$ 的柯西條件蘊含級數 $\sum u_n(x)$ 的柯西條件，而且對於所有 $x\in A$ 是均勻的。這代表著函數級數 $\sum u_n$ 會均勻收斂。 □

註解 8.1.23 ： 讓我們假設 $(W,\|\cdot\|)$ 是個 Banach 空間，而且對於所有 $n\geqslant 1$，我們有 $u_n\in\mathcal{B}(A,W)$。函數級數 $\sum u_n$ 也可以被看作取值在 Banach 空間 $(\mathcal{B}(A,W),\|\cdot\|_\infty)$ 的級數，也就是說，函數級數 $\sum u_n$ 的正規收斂性與當我們把級數中的項看作 $u_n\in\mathcal{B}(A,W)$ 時，$\sum u_n$ 的絕對收斂性等價。這讓我們得到另一個方法來證明 (2)：我們可以注意到從定理 6.1.16 ，我們能推得級數 $\sum u_n$ 在 $\mathcal{B}(A,W)$ 中收斂，這意為著函數級數 $\sum u_n$ 會均勻收斂。

範例 8.1.24 ： 讓我們考慮定義在 $[0,1]$ 上的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$f_1 \equiv 1 \quad \text{以及} \quad \forall n \geqslant 1, \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

對於任意 $n \geqslant 1$ 以及 $x \in [0,1]$，我們有

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^x (f_{n+1}(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^x \|f_{n+1} - f_n\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|f_{n+1} - f_n\|_\infty, \end{aligned}$$

這蘊含 $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$。因此，透過數學歸納法，我們得到

$$\forall n \geqslant 1, \quad \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|f_2 - f_1\|_\infty.$$

因此這告訴我們級數 $\sum(f_{n+1} - f_n)$ 會正規收斂，所以也會均勻收斂，而且序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 也會均勻收斂。

範例 8.1.25 ： 讓我們考慮定義在 $[0,1]$ 上的函數級數 $\sum \frac{(-1)^n}{n}x^n$。我們有看過這個函數級數會在 $[0,1]$ 上均勻收斂（範例 8.1.18）。

- 然而，他不會在 $[0,1]$ 上正規收斂，因為對於 $n \geqslant 1$，我們有 $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$，而且級數 $\sum \frac{1}{n}$ 會發散。
- 對於任意 $a \in [0,1)$，他會在 $[0,a]$ 上正規收斂，因為對於 $n \geqslant 1$，我們有 $\left\|(u_n)_{|[0,a]}\right\|_\infty = \frac{a^n}{n}$，而且級數 $\sum \frac{a^n}{n}$ 會收斂。

第二節 均勻極限的性質

在這個章節中，我們會討論收斂函數序列極限的分析性質。我們會考慮賦距空間 (X, d_X) 和 (M, d_M)，以及在 $\mathcal{B}(X, M)$ 中的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$。

第一小節 連續性

命題 8.2.1 ： 假設 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個由 X 映射到 M 的函數序列，而且會均勻收斂到 f。如果對於所有 $n \geqslant 1$，f_n 在 a 連續，那麼 f 在 a 連續。

證明：令 $\varepsilon > 0$。由於 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f，我們能找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in X, \quad d_M(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon.$$

由於 f_N 在 a 連續，我們能找到 $\delta > 0$ 使得

$$\forall y \in X, \quad d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_M(f_N(x), f_N(y)) \leqslant \varepsilon.$$

因此，對於任意 $y \in X$ 滿足 $d_X(x, y) < \delta$，我們有

$$d_M(f(x), f(y)) \leqslant d_M(f(x), f_N(x)) + d_M(f_N(x), f_N(y)) + d_M(f_N(y), f(y)) \leqslant 3\varepsilon.$$

這證明了 f 在 a 連續。 □

系理 8.2.2 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 X 映射到 M 的連續函數所構成的序列。如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 X 上均勻收斂到 f，那麼 f 在 X 上連續。

證明：這是命題 8.2.1 的直接結果。 □

系理 8.2.3 ： 令 $\sum u_n$ 為由 $[a, b]$ 映射至 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 的連續函數所構成的級數。如果級數 $\sum u_n$ 會在 $[a, b]$ 上均勻收斂，那麼極限函數 $\sum u_n$ 會在 $[a, b]$ 上連續。

證明：我們可以取 $(X, d_X) = ([a,b], |\cdot|)$ 還有 $(M, d_M) = (W, \|\cdot\|)$，那麼這會是系理 8.2.2 的直接結果。 $\square$

範例 8.2.4 ： 讓我們考慮定義在 $\mathbb{R}_+$ 上的函數級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 如下：

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- 對於每個 $x \geqslant 0$，級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ 收斂，我們把他的極限記作 $u(x)$。
- 級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 不會均勻收斂到 u。事實上，對於每個 $N \geqslant 1$，我們有
$$\left| \sum_{n\geqslant 0} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x) \right| \geqslant \frac{x^N}{N!} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty.$$
- 對於任意 $M > 0$，級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 會在 $[0, M]$ 上均勻收斂到 u。要看出這個，對於任意 $x \in [0, M]$，我們記
$$\left| \sum_{n\geqslant 0} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x) \right| = \left| \sum_{n\geqslant N} u_n(x) \right| \leqslant \sum_{n\geqslant N} \frac{M^n}{n!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
這給我們餘項不取決於 x 的均勻上界。
- 因此，對於每個 $M > 0$，極限函數 u 在 $[0, M]$ 上會連續，所以也會在 $\mathbb{R}_+$ 上連續。

這個範例告訴我們如果要得到極限函數的連續性，我們不一定需要在整個定義域上面的均勻收斂。由於連續性是個局部的規律性，我們只需要證明，例如在所有線段上，會有均勻收斂即可。

第二小節 積分

令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間使得 $\mathring{I} \neq \varnothing$。考慮由 I 映射至 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$。

命題 8.2.5 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為連續函數構成的序列，而且會在每個 I 的線段上均勻收斂到 f。令 $a\in I$ 並定義下面的原函數：

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{以及} \quad \varphi_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall n\geqslant 1.$$

那麼，序列 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂到 φ。

註解 8.2.6 ： 命題 8.2.5 的結論告訴我們可以交換極限和積分的順序，也就是說：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

證明： 令 $[c,d]\subseteq I$ 為 I 的線段，而且包含 a。由於 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[c,d]$ 上均勻收斂到 f，從系理 8.2.2 我們得知 f 也會在 $[c,d]$ 上連續。因此，原函數 φ 還有對於 $n\geqslant 1$，原函數 φ_n 在 $[c,d]$ 上都是定義良好的。對於每個 $n\geqslant 1$ 還有 $x\in[c,d]$，我們有

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(x)-\varphi(x)\| &= \left\|\int_a^x (f_n(t)-f(t))\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant |x-a|\,\|f_n-f\|_{\infty,[c,d]}\leqslant |d-c|\,\|f_n-f\|_{\infty,[c,d]}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

上面會收斂到 0 的上界不取決於 $x\in[c,d]$，所以我們證明了 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[c,d]$ 上均勻收斂到 φ。 □

範例 8.2.7 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為定義在 $[0,1]$ 上的連續實函數所構成的序列，而且會均勻收斂到 f。這代表著 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ 中有界，所以我們能找到 $M>0$ 使得 $\|f_n\|_\infty\leqslant M$ 對於所有 $n\geqslant 1$。那麼我們會有

$$\forall x\in[0,1],\quad |f_n(x)^2-f(x)^2|\leqslant 2M|f_n(x)-f(x)|.$$

這代表 $(f_n^2)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f^2，所以我們有

$$\int_0^1 f_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f^2.$$

範例 8.2.8 ： 讓我們考慮函定義在 $[0,1]$ 上的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n.$$

這個函數序列會逐點收斂到指標函數 $f = \mathbb{1}_1$（範例 8.1.2），這個極限不是連續函數，所以這個收斂不是均勻的（命題 8.2.1）。然而，積分的序列會收斂：

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \int_0^1 \mathbb{1}_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

這證明了均勻收斂的概念是比積分的收斂還要來得強的。事實上，稍後在第 8.5 節中，我們會看到在更一般的框架下，如何在沒有均勻收斂的情況，得到積分的收斂。

系理 8.2.9 ： 令 $\sum u_n$ 為由 $[a,b]$ 映射至 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 的連續函數級數。如果級數 $\sum u_n$ 會在 $[a,b]$ 上正規收斂，那麼對於 $x \in [a,b]$，我們會有

$$\int_a^x \Big(\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\Big(\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_a^x u_k(t)\,\mathrm{d}t\Big),$$

其中右方的極限在 $[a,b]$ 上會是均勻的。

註解 8.2.10 ： 系理 8.2.9 告訴我們，在什麼樣的條件之下，我們可以交換積分和級數的順序。這樣的情況下，我們有時候也會說「我們可以對級數一項一項積分」。

下面這個更一般的敘述，是針對函數均勻收斂的情況下所對應到的 Riemann–Stieltjes 積分。下面定理告訴我們 (1) Riemann–Stieltjes 積分性會被均勻收斂所保存，以及 (2) 原函數的序列也會均勻收斂。

定理 8.2.11 ： 令 $\alpha \in \mathcal{BV}([a,b])$。令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 $[a,b]$ 映射至 $\mathbb{R}$ 的有界函數所構成的序列，而且對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $f_n \in R(\alpha; a, b)$。假設 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，並且定義

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\alpha(t) \quad \text{以及} \quad g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}\alpha(t), \quad \forall n \geqslant 1.$$

那麼下列性質會成立。

(1) $f \in R(\alpha; a, b)$。

(2) 序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[a,b]$ 上均勻收斂到 g。

證明： 藉由有界變差函數的分解定理，參考定理 5.1.17 和系理 5.3.16 ，我們只需要對嚴格遞增的函數 α 證明即可。在定理 5.3.21 的證明中，我們也是使用類似的方法。

(1) 讓我們來證明 f 在 $[a,b]$ 上會滿足對於 α 的黎曼條件（定義 5.3.8 ）。令 $\varepsilon > 0$。由於 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f，我們可以找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}, \quad \forall x \in [a,b], \forall n \geqslant N.$$

這代表著對於任意分割 $P \in \mathcal{P}([a,b])$，我們有

$$|U_P(f - f_N, \alpha)| \leqslant \varepsilon \quad \text{以及} \quad |L_P(f - f_N, \alpha)| \leqslant \varepsilon \tag{8.6}$$

由於 $f_N \in R(\alpha; a, b)$，我們能找到分割 $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得

$$\forall P \supseteq P_\varepsilon, \quad U_P(f_N, \alpha) - L_P(f_N, \alpha) \leqslant \varepsilon. \tag{8.7}$$

因此，對於任意 $P \supseteq P_\varepsilon$，我們有

$$\begin{aligned} U_P(f,\alpha) - L_P(f,\alpha) &\leqslant U_P(f - f_N, \alpha) - L_P(f - f_N, \alpha) + U_P(f_N, \alpha) - L_P(f_N, \alpha) \\ &\leqslant |U_P(f - f_N, \alpha)| + |L_P(f - f_N, \alpha)| + [U_P(f_N, \alpha) - L_P(f_N, \alpha)] \\ &\leqslant 3\varepsilon \end{aligned}$$

這是可以從式 (8.6) 和式 (8.7) 所得到的。這證明了 $f \in R(\alpha; a, b)$。

(2) 對於 $n \geqslant N$ 以及 $x \in [a, b]$，我們有

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, \mathrm{d}\alpha(t) \leqslant \|f_n - f\|_\infty [\alpha(x) - \alpha(a)] \leqslant \|f_n - f\|_\infty [\alpha(b) - \alpha(a)],$$

其中上界不取決於 x，而且當 $n \to \infty$ 時會收斂到 0。 □

系理 8.2.12 ： 令 $\alpha \in \mathcal{BV}([a, b])$。令 $\sum u_n$ 為由 $[a, b]$ 映射至 $\mathbb{R}$ 的有界函數所構成的級數，且對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $u_n \in R(\alpha; a, b)$。假設級數 $\sum_n u_n$ 會在 $[a, b]$ 上均勻收斂。那麼下列性質會成立。

(1) $\sum_n u_n \in R(\alpha; a, b)$。

(2) 對於 $x \in [a, b]$，我們有

$$\int_a^x \Big(\sum_{n \geqslant 1} u_n(t) \Big) \mathrm{d}\alpha(t) = \sum_{n \geqslant 1} \Big(\int_a^x u_n(t) \,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\alpha(t) \Big) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \Big(\int_a^x u_k(t) \,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\alpha(t) \Big),$$

其中右側的收斂對於 $x \in [a, b]$ 是均勻的。

第三小節 微分

令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，滿足 $\mathring{I} \neq \varnothing$。考慮由 I 映射至 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 的函數序列 $(f_n)_{n \geqslant 1}$。

定理 8.2.13 ： 讓我們做下列假設。

(i) 對於每個 $n \geqslant 1$，函數 $f_n : I \to W$ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。

(ii) 序列 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ 會逐點收斂至 $f \in \mathcal{F}(I, W)$。

(iii) 序列 $(f_n')_{n \geqslant 1}$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂至 $g \in \mathcal{F}(I, W)$。

那麼，下列性質會成立。

(1) 函數 f 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且 $f' = g$。

(2) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂。

證明： 令 $a \in I$。從 (ii)，我們知道 $f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$。

(1) 首先，我們注意到由於 $(f_n')_{n\geqslant 1}$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂至 g，從系理 8.2.2 我們得知 g 在 I 上是連續的。根據命題 8.2.5 ，對於 $x \in I$，我們有

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

這證明了

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

由於 g 是連續的，我們推得 f 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且 $f' = g$。

(2) 再來我們要證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂至 f，方法如下。對於每個 $n \geqslant 1$ 以及 $x \in I$，微積分基本定理給我們

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \left\| \int_a^x (f_n'(t) - f'(t))\,\mathrm{d}t \right\| + \|f_n(a) - f(a)\|.$$

根據命題 8.2.5 ，右手邊的第一項會均勻收斂至 0；根據假設 (ii)，第二項會收斂至 0。因此，上面收斂速度並不取決於 $x \in I$，所以 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂至 f。 □

註解 8.2.14 ： 從上面的證明我們可以看出來，假設 (ii) 可以弱化成

(ii') 存在 $a \in I$ 使得 $f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$。

系理 8.2.15 ： 令 $p \geqslant 1$ 為整數，且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 W 的 $\mathcal{C}^p$ 函數所構成的序列。假設

(i) 對於每個 $0 \leqslant k \leqslant p-1$，序列 $(f_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂；

(ii) 序列 $(f_n^{(p)})_{n\geqslant 1}$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂。

那麼，逐點收斂的極限 $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ 會是個 $\mathcal{C}^p$ 的函數，而且對於 $0 \leqslant k \leqslant p$，我們有

$$\forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x).$$

證明：我們可以使用定理 8.2.13 和數學歸納法來證明。 □

系理 8.2.16 ： 令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 W 的 $\mathcal{C}^1$ 函數所構成的序列。假設

(i) 級數 $\sum u_n$ 會逐點收斂；

(ii) 級數 $\sum u_n'$ 會在每個 I 的線段上均勻收斂。

那麼，函數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且

$$\Big(\sum_{n\geqslant 1} u_n\Big)' = \sum_{n\geqslant 1} u_n'. \tag{8.8}$$

範例 8.2.17 ： 我們想要證明黎曼 ζ 函數 $s \mapsto \zeta(s)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且

$$\forall s > 1, \quad \zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}. \tag{8.9}$$

對於每個 $n \geqslant 1$，令 $u_n : s \mapsto n^{-s}$，這是個 $\mathcal{C}^1$ 類的函數，而且他的微分寫做

$$\forall s > 1, \quad u_n'(s) = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

函數級數 $\sum u_n$ 會逐點收斂至 ζ。固定 $b > a > 1$，讓我們證明 $\sum u_n'$ 會在 $[a,b]$ 上正規收斂，所以也會均勻收斂。我們選 $c \in (1,a)$。我們有

$$\left\| (u_n')_{|[a,b]} \right\|_\infty = \frac{\ln n}{n^a} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^c}\Big).$$

由於 $\sum n^{-c}$ 會收斂（命題 6.2.6 ），我們推得 $\sum u_n$ 會在 $[a,b]$ 上正規收斂。因此，式 (8.8) 讓我們得到式 (8.9)。

系理 8.2.18 ： 令 $p \geqslant 1$ 為整數，而且 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 W 的 $\mathcal{C}^p$ 函數序列。假設

(i) 對於每個 $0 \leqslant k \leqslant p-1$，級數 $\sum u_n^{(k)}$ 會逐點收斂；

(ii) 級數 $\sum u_n^{(p)}$ 在每個 I 的線段上會均勻收斂。

那麼，函數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會是 $\mathcal{C}^p$ 類的，而且對於 $0 \leqslant k \leqslant p$，我們有

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}. \tag{8.10}$$

範例 8.2.19 ： 我們沿用範例 8.2.17 中的記號，對於每個 $n, p \geqslant 1$，我們會得到

$$\forall s > 1, \quad u_n^{(p)}(s) = (-1)^p \frac{(\ln n)^p}{n^s}.$$

讓我們固定 $b > a > 1$。我們使用相同方法來證明對於所有 $p \geqslant 0$，$\sum u_n^{(p)}$ 會在 $[a, b]$ 上正規收斂，所以也會均勻收斂且逐點收斂。我們使用系理 8.2.18 來總結 $s \mapsto \zeta(s)$ 是 $\mathcal{C}^p$ 類的，對於所有 $p \geqslant 0$，所以會是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。此外，式 (8.10) 給我們

$$\forall s > 1, \forall p \geqslant 1, \quad \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^p \frac{(\ln n)^p}{n^s}.$$

範例 8.2.20 ： 令 $(W, \|\cdot\|_W)$ 為 Banach 空間。在定理 3.2.18 中，我們看過 $\mathcal{L}_c(W) := \mathcal{L}_c(W, W)$ 賦予算子範數 $|||\cdot|||$ 後會是個 Banach 空間，而且也是個賦範代數（定義 6.6.1），也就是說算子範數滿足劣乘性。給定 $u \in \mathcal{L}_c(W)$，我們可以定義下列函數

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_u : \quad \mathbb{R} &\to \quad \mathcal{L}_c(W) \\ t &\mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} u^n. \end{aligned}$$

對於所有 $n \geqslant 0$ 和 $t \in \mathbb{R}$，我們可以記 $u_n(t) = \frac{t^n}{n!} u^n$。

- 我們可以直接檢查對於所有 $t \in \mathbb{R}$，$\mathcal{E}_u(t)$ 是定義良好的，因為

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{|t|^n}{n!} |||u^n||| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{|t|^n}{n!} |||u|||^n = \exp\left(|t||||u|||\right).$$

- 使用與在範例 8.2.4 相似的技巧，我們可以證明對於任意 $M > 0$，函數級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 會在 $[-M, M]$ 上均勻收斂至 $\mathcal{E}_u$。

- 對於所有 $t \in \mathbb{R}$，我們有 $u_0(t) = 1$。對於每個 $n \in \mathbb{N}$，我們有

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u^n = u \cdot u_{n-1}(t).$$

  這證明了函數級數 $\sum_{n\geqslant 0} u_n' = \sum_{n\geqslant 1} u_n' = \sum_{n\geqslant 0} u \cdot u_n$ 會逐點收斂到 $u \cdot \mathcal{E}_u(t)$。對於每個 $M > 0$，這個收斂在 $[-M, M]$ 上會是均勻的。

- 讓我們固定 $M > 0$ 並使用 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 和 $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ 在 $[-M, M]$ 上的均勻收斂性，我們可以得證 $\mathcal{E}_u$ 在 $[-M, M]$ 上是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且 $\mathcal{E}_u'(t) = u \cdot \mathcal{E}_u(t)$ 對於 $t \in (-M, M)$。這可以讓我們總結 $\mathcal{E}_u$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且 $\mathcal{E}_u'(t) = u \cdot \mathcal{E}_u(t)$ 對於所有 $t \in \mathbb{R}$。

- 從關係式 $\mathcal{E}_u' = u \cdot \mathcal{E}_u$，我們推得如果對於某個 $k \geqslant 1$，$\mathcal{E}_u$ 是 $\mathcal{C}^k$ 類的，那麼 $\mathcal{E}_u'$ 也會是，這代表著 $\mathcal{E}_u$ 會是 $\mathcal{C}^{k+1}$ 類的。所以我們就能推得 $\mathcal{E}_u$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。

第三節 冪級數

在這個章節中，我們會討論函數級數的特例，稱作冪級數。我們會侷限在取值為實數或複數的冪級數，但要記得的是，很多我們所討論的概念，在我們把 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 或 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 換成賦範代數時，也還是會成立的。

第一小節 定義與收斂半徑

我們定義在 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 中的一些拓撲概念。我們把中心為 c 半徑為 $r > 0$ 的開球稱作中心為 c 半徑為 r 的開圓盤，記作 $D(c,r) := B(c,r)$。我們也用相同方式來定義閉圓盤。

定義 8.3.1 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 為複數序列以及 $c \in \mathbb{C}$。

- 我們把寫成 $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-c)^n$ 形式的函數級數稱作中心在 c 的冪級數 (power series)，其中 $z \in \mathbb{C}$ 是函數的變數。
- 如果序列 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 是實數序列，而且 $c \in \mathbb{R}$，我們可以用 $x \in \mathbb{R}$ 來代表冪集數的變數，並且記 $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-c)^n$。這個時候，冪級數會取值在 $\mathbb{R}$ 中。

接著我們要討論中心在 $c = 0$ 的冪級數所構成的理論。對一般中心在 $c \in \mathbb{C}$ 的冪級數，所有對應到的概念和性質都可以透過平移 $z \mapsto z + c$ 來得到。下面的性質和定理會對複數冪級數來敘述，但你要知道的是，相同的證明對於實數冪級數也是對的。

命題 8.3.2 【Abel 引理】： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，而且 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得序列 $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ 有界。那麼下列性質成立。

(1) 對於每個 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| < |z_0|$，級數 $\sum a_n z^n$ 會絕對收斂。

(2) 對於每個 $r \in (0, |z_0|)$，函數級數 $\sum a_n z^n$ 在閉圓盤 $\overline{D}(0,r) := \overline{B}(0,r)$ 中會正規收斂。

證明： 令 $M > 0$ 使得 $|a_n||z_0|^n \leqslant M$ 對於所有 $n \geqslant 0$。對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| < |z_0|$，我們有

$$\forall n \geqslant 0, \quad |a_n z^n| = \Big|\frac{z}{z_0}\Big|^n |a_n||z_0|^n \leqslant M\Big|\frac{z}{z_0}\Big|^n,$$

其中右式是個收斂級數（公比嚴格小於 1 的幾何級數）。 □

定義 8.3.3 ： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數。我們定義

$$R = R\big(\sum a_n z^n\big) := \sup\{r \geqslant 0 : (|a_n| r^n)_{n\geqslant 0} \text{ 有界}\} \in [0, +\infty]$$

稱作 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑 (radius of convergence) 。

註解 8.3.4 ： 我們注意到，如果我們對序列 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 加上相位，這並不會改變冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑。

命題 8.3.5 ： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，且 R 為他的收斂半徑。那麼我們有下列性質。

(1) 對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| < R$，級數 $\sum a_n z^n$ 會絕對收斂。

(2) 對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| > R$，級數 $\sum a_n z^n$ 會發散。

(3) 對於 $r \in [0, R)$，級數 $\sum a_n z^n$ 會在閉圓盤 $\overline{D}(0, r)$ 上正規收斂。

我們把開圓盤 $D(0, R)$ 稱作是冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂圓盤 (disk of convergence) 。

註解 8.3.6 ：

(1) 當 $R = +\infty$ 時，冪級數 $\sum a_n z^n$ 對每個 $z \in \mathbb{C}$ 都收斂，所以他定義了從 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{C}$ 的函數。這樣的函數稱作整函數 (entire function)。

(2) 當 $R < +\infty$，在收斂圓盤的邊界上，也就是當 $z \in \partial D(0, R)$ 時，冪級數可以有各種可能的行為，見範例 8.3.9 。

證明：

(1) 這是命題 8.3.2 (1) 的直接結果。

(2) 對於 $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$，由於 $(|a_n||z|^n)_{n\geqslant 0}$ 不是有界的，我們不會有 $a_n z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，所以級數 $\sum a_n z^n$ 發散。

(3) 這是命題 8.3.2 (2) 的直接結果。

$\square$

命題 8.3.7 【D'Alembert 準則，商檢測法】： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，且 R 為他的收斂半徑。假設下列極限存在：

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty].$$

那麼 $R = \ell^{-1}$。

證明： 這是定理 6.3.1 的直接結果。 □

命題 8.3.8 【柯西準則，根檢測法】： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，且 R 為他的收斂半徑。令

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in [0, +\infty].$$

那麼 $R = \frac{1}{\lambda}$。

證明： 這是系理 6.3.8 的直接結果。 □

範例 8.3.9 ： 下面的三個級數有相同的收斂半徑 1，這可以透過商檢測法或是根檢測法來得到。然而，他們在收斂圓盤的邊界上，有完全不同的行為。

(1) 級數 $\sum z^n$ 的收斂半徑為 1。對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| = 1$，級數 $\sum z^n$ 永遠不會收斂。

(2) 級數 $\sum \frac{z^n}{n^2}$ 的收斂半徑為 1。對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| = 1$，級數 $\sum \frac{z^n}{n^2}$ 會正規收斂，所以收斂。

(3) 級數 $\sum \frac{z^n}{n}$ 的收斂半徑為 1。對於 $z = 1$，級數 $\sum \frac{z^n}{n}$ 會發散。對於 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| = 1$ 且 $z \neq 1$，根據範例 6.4.9 ，級數 $\sum \frac{z^n}{n}$ 會收斂。

第二小節　冪級數的運算

命題 8.3.10： 令 $f(z)=\sum a_n z^n$ 和 $g(z)=\sum b_n z^n$ 為收斂半徑為 R_f 和 R_g 的冪級數。令 R 為 $\sum (a_n+b_n)z^n$ 的收斂半徑。那麼

$$R \geqslant \min(R_f, R_g).$$

此外，如果 $R_f \neq R_g$，我們有 $R=\min(R_f,R_g)$。對於任意 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z|<\min(R_f,R_g)$，我們也有

$$\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n. \tag{8.11}$$

證明： 令 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z|<\min(R_f,R_g)$。從命題 8.3.5，我們知道 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 都會絕對收斂，所以級數 $\sum (a_n+b_n)z^n$ 也會絕對收斂。這代表著式 (8.11) 會成立。此外，這也蘊含 $R \geqslant \min(R_f,R_g)$。

假設 $R_f \neq R_g$，例如 $R_f < R_g$。令 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $R_f < |z| < R_g$。由於 $(b_n z^n)_{n\geqslant 1}$ 有界且 $(a_n z^n)_{n\geqslant 1}$ 沒有界，我們推得 $((a_n+b_n)z^n)_{n\geqslant 1}$ 沒有界，所以 $|z| \geqslant R$。藉由對 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $R_f < |z| < R_g$ 取最大下界，我們得到 $R_f \geqslant R$。 □

定義 8.3.11： 令 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 為冪級數。他們的<u>柯西積</u>是由冪級數 $\sum c_n z^n$ 所給定的，其中係數 $(c_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n \geqslant 0, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

命題 8.3.12： 令 $f(z)=\sum a_n z^n$ 和 $g(z)=\sum b_n z^n$ 為收斂半徑為 R_f 和 R_g 的冪級數。令 $\sum c_n z^n$ 為他們的柯西積。對於每個 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z|<\min(R_f,R_g)$，我們有

$$f(z)g(z) = \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n. \tag{8.12}$$

如果我們把 $\sum c_n z^n$ 的收斂半徑記作 R，那麼我們有

$$R \geqslant \min(R_f, R_g).$$

證明： 令 $z \in \mathbb{C}$ 滿足 $|z| < \min(R_f, R_g)$。從命題 8.3.5，我們知道 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 兩者皆會絕對收斂，接著從定理 6.6.3，我們知道他們的柯西積 $\sum c_n z^n$ 會絕對收斂，而且滿足式 (8.12)。此外，這也蘊含了 $R \geqslant \min(R_f, R_g)$。 □

第三小節 規律性

這裡，令 $f := \sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R > 0$ 的冪級數。從命題 8.3.5，我們已知 f 在 $D(0, R)$ 上是定義良好的。

> **定理 8.3.13：** 函數 $f : z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 在收斂圓盤 $D(0, R)$ 上是連續的。

證明： 固定 $z \in D(0, R)$。讓我們考慮中心在 z，半徑為 $r < R - |z|$ 的閉圓盤 $\overline{D}(z, r)$。那麼對於任意 $w \in \overline{D}(z, r)$，我們有 $|w| \leqslant |w - z| + |z| \leqslant |z| + r < R$，這代表著 $\overline{D}(z, r) \subseteq D(0, R)$。從命題 8.3.5 (3) 我們得知冪級數 $\sum a_n z^n$ 會在 $\overline{D}(z, r)$ 上正規收斂。由於定義 f 的部份和都是連續的（多項式函數），我們可以使用命題 8.2.1 來總結極限 f 在 z 會是連續的。 □

> **定理 8.3.14【Abel 定理】：** 令 $\sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R > 0$ 的冪級數。假設級數 $\sum a_n R^n$ 收斂。那麼，定義在 $[0, R]$ 上的函數 $x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ 是連續的。換句話說，我們有
>
> $$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \xrightarrow[x\to R-]{} \sum_{n\geqslant 0} a_n R^n.$$

證明： 對於每個 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $u_n : [0, R] \to \mathbb{C}$ 定義做

$$\forall x \in [0, R], \quad u_n(x) = a_n x^n, \quad \text{以及} \quad R_n = \sum_{k\geqslant n+1} a_k R^k.$$

根據假設，函數級數 $\sum u_n$ 會在 $[0, R]$ 上逐點收斂。如果我們可以證明這個收斂是均勻的，那麼我們就可以使用命題 8.2.1 來總結。我們還可以把每一項 u_n 寫成 $u_n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$，這樣一來，

我們可以假設 $R=1$。

令 $\varepsilon>0$。由於 $\sum a_n$ 會收斂，我們能找到 $N\geqslant 1$ 使得 $|R_n|\leqslant\varepsilon$ 對於所有 $n\geqslant N$。對於 $m,n\in\mathbb{N}$ 滿足 $m>n\geqslant N$ 以及 $x\in[0,1]$，我們用收斂級數 $\sum a_k$ 的餘項來寫下 Abel 變換：

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^{m}(R_{k-1}-R_k)x^k = \sum_{k=n}^{m-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{m} R_k x^k \\ &= R_n x^{n+1} - R_m x^m + \sum_{k=n+1}^{m-1} R_k(x^{k+1}-x^k).\end{aligned}$$

由於 $R_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ 且 $(x_m)_{m\geqslant 0}$ 有界，我們有 $R_m x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$。此外，我們有 $|R_k(x^{k+1}-x^k)|\leqslant\varepsilon(x^k-x^{k+1})$，而且級數 $\sum_k(x^k-x^{k+1})$ 會收斂，所以 $\sum R_k(x^{k+1}-x^k)$ 會絕對收斂。因此，對於 $n\in\mathbb{N}$ 以及 $x\in[0,1]$，冪級數的餘項寫做

$$r_n(x) = R_n x^{n+1} + \sum_{k\geqslant n+1} R_k(x^{k+1}-x^k).$$

對於 $n\geqslant N$ 以及 $x\in[0,1]$，我們有

$$\begin{aligned}|R_n x^{n+1}| &\leqslant |R_n| \leqslant \varepsilon, \\ \sum_{k\geqslant n+1}|R_k(x^{k+1}-x_k)| &\leqslant \sum_{k\geqslant n+1}\varepsilon(x^k-x^{k+1}) = \varepsilon x^{n+1} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $|r_n(x)|\leqslant 2\varepsilon$ 對於所有 $n\geqslant N$ 和 $x\in[0,1]$。這代表著收斂 $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 是均勻的。根據命題 8.1.17 ，我們可以總結 $\sum u_n$ 會在 $[0,R]$ 上均勻收斂。 □

下面的 Tauber 定理給我們 Abel 定理的一個逆命題。

定理 8.3.15 【Tauber 定理】：令 $f(z)=\sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R>0$ 的冪級數。假設 $f(x)\xrightarrow[x\to R-]{}\ell$ 且 $na_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$。那麼，級數 $\sum a_n R^n$ 會收斂至 ℓ。

證明：不失一般性，我們可以假設 $R=1$。讓我們把級數 $\sum a_n$ 的部份和記作 $(S_n)_{n\geqslant 0}$。對於任

意 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $x \in (-1,1)$，我們有

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k \geqslant n+1} a_k x^k.$$

對於 $x \in (0,1)$，我們有

$$1 - x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \leqslant k(1-x).$$

因此，對於任意 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $x \in (0,1)$，我們有

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k \geqslant n+1} |a_k| x^k.$$

給定 $\varepsilon > 0$ 並選擇 $N \geqslant 1$ 使得 $n|a_n| \leqslant \varepsilon$ 對於所有 $n \geqslant N$。對於任意 $n \geqslant N$，我們有

$$\sum_{k \geqslant n+1} |a_k| x^k \leqslant \varepsilon \sum_{k \geqslant n+1} \frac{x^k}{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k \geqslant n+1} x^k \leqslant \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

對於 $n \geqslant N$，我們取 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$。這樣一來，我們得到

$$|S_n - f(x_n)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \varepsilon.$$

由於 $n|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，從習題 6.1 我們知道右式中的第一項[1]會收斂到 0。因此

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n - f(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得到

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - f(x_n)| = 0.$$

也就是說 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \ell$。 □

[1]我們把 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k$ 稱作 $(na_n)_{n\geqslant 1}$ 的 Cesarò 和。

下面是定理 6.6.3 和習題 6.24 的推廣。

系理 8.3.16 ： 令 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 為收斂級數。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$。假設 $\sum c_n$ 會收斂。那麼，我們有

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n\Big).$$

證明： 令 $\sum a_n z^n$、$\sum b_n z^n$ 和 $\sum c_n z^n$ 為冪級數。他們的收斂半徑至少為 1，因為 $(a_n|z|^n)_{n\geqslant 0}$ 和 $(b_n|z|^n)_{n\geqslant 0}$ 對於 $z \in D(0,1)$ 有界。從命題 8.3.12 我們得知，冪級數 $\sum c_n z^n$ 的收斂半徑大於等於 1。根據定理 8.3.14 ，我們得到

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1-]{} \sum_{n\geqslant 0} a_n, \quad \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n \xrightarrow[x\to 1-]{} \sum_{n\geqslant 0} b_n, \quad \text{以及} \quad \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n \xrightarrow[x\to 1-]{} \sum_{n\geqslant 0} c_n.$$

此外，命題 8.3.12 會給我們下列關係式：

$$\forall x \in (-1,1), \quad \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\Big)$$

藉由對上式中 $x \to 1-$ 取極限，我們得到所要證明的關係式。 □

我們再來也引入對複數變數可微分性的概念。

定義 8.3.17 ： 令 $A \subseteq \mathbb{C}$ 以及 $f : A \to \mathbb{C}$。給定 $z_0 \in \mathring{A}$。如果下面極限存在：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0) = f'(z_0) := \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\mathbb{C}}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in \mathbb{C},$$

則我們稱他為 f 在 z_0 點的複數微分，也說 f 在 $\mathbb{C}$ 中可微分（或簡稱可微）。

註解 8.3.18 ： 我們可以把 $\mathbb{C}$ 看作是二維的實數向量空間。如果我們把定義 4.1.1 當中微分的概念拿來比較，我們注意到這裡引進的複數微分概念是比較強的。實際上，如果函數 $f : A \to \mathbb{C}$ 在定義 4.1.1 的意義下，在 z_0 點可微，那麼他的微分會是個連續線性映射。然而，如果相同的函數在 z_0 點是

複數可微的，那麼他的複數微分會被一個複數所給出，也就代表說他的微分（在 $\mathbb{R}^2$ 中），會由旋轉和縮放所合成。我們不難看出來，旋轉和縮放的合成函數是個連續線性映射，但這個逆命題一般來說是不對的。在複分析的課程中，你會看到如果函數在開子集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ 中是複數可微的，那麼他在 A 中可以被微分任何多次，這樣的函數稱作全純函數。

冪級數當中只有多項式函數，我們不難檢查多項式的複數微分與實數微分是相同的。換句話說，我們會有：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \frac{\mathrm{d}(z^n)}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}.$$

定理 8.3.19：函數 $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。冪級數 $\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$ 和 $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 有相同的收斂半徑，也就是說

$$R\Big(\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}\Big) = R\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big).$$

我們也會有

$$\forall z \in D(0,R), \quad f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}. \tag{8.13}$$

註解 8.3.20：這個定理非常有趣。這代表著我們永遠可以對冪級數一項一項微分，而這個對一般的函數級數來說，沒有額外假設的話會是錯的（系理 8.2.16）。

證明： 令 R' 為 $\sum na_n z^{n-1}$ 的收斂半徑。對於任意 $r \in [0,R')$，我們從定義 8.3.3 知道 $(na_n r^{n-1})_{n\geqslant 1}$ 會是有界的，所以 $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ 也會是有界的，這蘊含 $r < R$。我們取極限 $r \to R'-$，會得到 $R' \leqslant R$。要證明另一個不等式，我們考慮 $r \in (0,R)$ 以及 $r_0 \in (r,R)$。再次使用定義 8.3.3，我們知道 $(a_n r_0^n)_{n\geqslant 0}$ 是有界的。我們有

$$na_n r^{n-1} = n(a_n r_0^{n-1})\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

所以我們知道 $(na_n r^{n-1})_{n\geqslant 1}$ 也是有界的，也就是說 $r < R'$。當我們取 $r \to R-$ 時，會得到 $R \leqslant R'$。現在，我們可以把式 (8.13) 看作是系理 8.2.16 和命題 8.3.5 的直接結果。 □

系理 8.3.21 ： 冪級數 $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 在 $D(0,R)$ 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。對於每個 $p \in \mathbb{N}_0$，冪級數的第 p 階微分會有相同的收斂半徑，而且寫做

$$\forall z \in D(0,R), \quad f^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = \sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} p! a_n z^{n-p}.$$

這讓我們得到

$$\forall p \in \mathbb{N}_0, \quad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!},$$

和

$$\forall z \in D(0,R), \quad f(z) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p.$$

證明： 搭配上數學歸納法後，這是定理 8.3.19 的直接結果。 □

範例 8.3.22 ： 我們有下列關係式：

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

定理 8.3.19 讓我們可以對這個關係式微分，得到

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geqslant 1} n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) z^n. \tag{8.14}$$

透過系理 8.3.21 ，我們也可以算更高階的微分。對於每個 $p \in \mathbb{N}$，我們有

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{p!}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\dots(n+p) z^n \quad \text{或} \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{n+p}{p} z^n$$

如果我們把式 (8.14) 乘上 z 再微分一次，我們得到

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1+z}{(1-z)^3} = \sum_{n\geqslant 1} n^2 z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)^2 z^n.$$

當我們取特別的值 $z = \frac{1}{2}$，我們得到下面這個關係式：

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

系理 8.3.21 給我們下面這個直接結果，這對冪級數來說也是非常有用的。

系理 8.3.23 ： 冪級數

$$\begin{array}{rccc} F: & D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \end{array}$$

和 $\sum a_n z^n$ 有相同的收斂半徑。此外，在 $D(0,R)$ 上，我們有 $F' = f$。

第四小節　冪級數的係數

系理 8.3.24 【冪級數的唯一性】： 令 $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 與 $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ 為冪級數，他們的收斂半徑記作：

$$R_f := R\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big) > 0, \quad \text{以及} \quad R_g := R\Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\Big) > 0.$$

假設存在 $r > 0$ 以及 $r \leqslant \min(R_f, R_g)$ 使得在 $(-r,r) \subseteq \mathbb{R}$ 上我們有 $f \equiv g$。那麼對於所有 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有 $a_n = b_n$。

證明： 令 $R = \min(R_f, R_g)$ 並考慮下列定義在 $(-R,R)$ 上的函數：

$$\forall z \in (-R,R), \quad f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \quad \text{以及} \quad g(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n.$$

從系理 8.3.21 我們知道，f 和 g 都是 $\mathcal{C}^\infty$ 函數，而且他們的係數由下列關係式給定：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \text{以及} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

由於存在 $r \in (0, R]$ 使得 $f \equiv g$ 在 $(-r, r)$ 上相等的假設，我們推得 $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ 對於所有 $n \geqslant 0$，所以我們也有 $a_n = b_n$ 對於所有 $n \geqslant 0$。 □

範例 8.3.25 ： 令 $f : D(0, R) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 為冪級數，且 $R > 0$。假設 f 是個偶函數，也就是說 $f(z) = f(-z)$ 對於 $z \in (-R, R)$。換句話說，我們有

$$\forall z \in (-R, R), \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n(-z)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

這蘊含

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (-1)^n a_n = a_n.$$

換句話說，如果 n 是奇數，則我們有 $a_n = 0$。

定理 8.3.26 【柯西公式】 ： 令 $f(z) = \sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R > 0$ 的冪級數。那麼，對於任意 $r \in (0, R)$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$r^n a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta.$$

證明： 讓我們固定 $r \in (0, R)$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$。我們有

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{p\geqslant 0} a_p r^p e^{\mathrm{i}(p-n)\theta} \Big) \,\mathrm{d}\theta.$$

由於 $\sum |a_p| r^p$ 收斂，函數級數 $\theta \mapsto \sum a_p r^p e^{\mathrm{i}(p-n)\theta}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上會正規收斂。從系理 8.2.9 我們推得可以交換積分和取和的順序，所以會有

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta}) e^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta = \sum_{p\geqslant 0} a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(p-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta = \sum_{p\geqslant 0} a_p r^p (2\pi) \mathbb{1}_{p=n} = 2\pi r^n a_n.$$ □

註解 8.3.27 ： 使用系理 8.3.24 的記號，如果存在 $r \in (0, R)$ 使得 $f \equiv g$ 在 $D(0, r)$ 上，那麼這個定理給我們另一個證明 f 與 g 兩個冪級數中的係數相同的方式。

第五小節 冪級數展開

在前面的小節中，我們給定冪級數，並且討論他們的性質。在這個小節中，我們會看到什麼時候還有哪種函數可以被寫成（或展開）為冪級數。

定義 8.3.28 ： 令 $A \subseteq \mathbb{C}$ 為開集，且 $f : A \to \mathbb{C}$ 為函數。

- 令 $R > 0$。如果 $0 \in A$ 而且存在冪級數 $\sum a_n z^n$ 使得

$$\forall z \in D(0, R), \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n, \tag{8.15}$$

那麼我們說 f 可以在 0 附近，或在 $D(0, R)$ 上寫成（或展開成）冪級數。特別來說，這樣的函數一定要在 0 點為 $\mathcal{C}^\infty$ 的，這會是系理 8.3.21 的直接結果。

- 令 $z_0 \in A$。如果 $z \mapsto f(z + z_0)$ 可以在 0 點附近寫成冪級數，則我們說 f 可以在 z_0 附近寫成（或展開成）冪級數。

命題 8.3.29 ： 令 $A \subseteq \mathbb{C}$ 為包含 0 點的開集，以及函數 $f : A \to \mathbb{C}$。那麼下列性質是等價的。

(1) f 可以在 0 點附近寫成冪級數。

(2) 存在 $r > 0$ 使得餘項級數 $(R_n)_{n \geqslant 0}$ 會在 $D(0, r)$ 上逐點收斂至 0，其中

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall z \in D(0, r), \quad R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k. \tag{8.16}$$

當 (2) 成立，這代表著冪級數 $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ 的收斂半徑 R 滿足 $R \geqslant r$，且 f 在 $D(0, r)$ 上與級數相等。

註解 8.3.30 ：

(1) 我們可以使用 Taylor–Lagrange 或 Taylor 積分公式（第 4.3.1 小節）來檢查命題 8.3.29 (2)，這可以讓我們把餘項寫做：

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta z), \quad \theta \in (0,1), \quad \text{或} \quad R_n(z) = z^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tz)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 我們注意到，只檢查 $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 的收斂半徑是嚴格為正的，與檢查命題 8.3.29 (2) 是不同的。事實上，存在函數使得他所對應到的冪級數有嚴格為正的收斂半徑，但式 (8.15) 卻不會成立，在範例 8.3.32 中我們可以看到一個這樣的例子。然而，如果這個冪級數收斂半徑為 0，這告訴我們 f 在 0 點附近無法寫成冪級數。

> **證明：**(1) ⇒ (2) 並不需要證明。假設 (2) 成立，讓我們來證明 (1)。令 $r > 0$ 滿足式 (8.16)。令 $z \in D(0,r)$。條件 $R_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 會蘊含 $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$。因此，序列 $(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n)_{n\geqslant 0}$ 會收斂到 0，所以有界，所以相對應冪級數的收斂半徑 R 會滿足 $R \geqslant |z|$（定義 8.3.3）。藉由對 $z \in D(0,r)$ 取最小上界，我們得到 $R \geqslant r$。 □

範例 8.3.31 ： 下面的函數可以在 0 點附近寫成冪級數。

(1) 指數函數 $z \mapsto \exp(z)$：

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

我們可以檢查，對於任意 $z \in \mathbb{C}$ 還有 $n \geqslant 0$，第 n 個餘項寫做：

$$|R_n(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\theta z)| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta \operatorname{Re}(z)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(2) 函數 $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ 是定義在 $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ 上的，我們有：

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

我們可以檢查，對於任意 $z \in D(0,1)$ 還有 $n \geqslant 0$，第 n 個餘項寫做：

$$|R_n(z)| = \Big|\frac{z^n}{1-z}\Big| \leqslant \frac{|z|^n}{|1-z|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) 任意多項式函數 $P \in \mathbb{C}[X]$ 滿足：

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

我們可以檢查，上面的冪級數中只會有有限多個項。

範例 8.3.32 ： 讓我們考慮定義如下的函數 f：

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{若 } x > 0, \\ 0 & \text{若 } x \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

對於 $k \in \mathbb{N}_0$，我們可以計算 f 在 $(0,+\infty)$ 上的第 k 階微分：

$$\forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = P_k\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-1/x}, \tag{8.17}$$

其中 P_k 是個多項式，滿足 $\deg(P_k) \leqslant 2k$。因此，對於每個 $k \geqslant 0$，我們可以把 $f^{(k)}$ 以 0 的值連續延拓到 0，所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上是個 $\mathcal{C}^\infty$ 函數。所以，冪級數 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ 是個零函數。他的收斂半徑是 $+\infty$，但對於任意 $r > 0$，在 $(0,r)$ 上不會與 f 相等。

命題 8.3.33 ： 如果對於某個 $R > 0$，函數 f 在 $D(0,R)$ 上可以寫成冪級數，則對於任意 $z_0 \in D(0,R)$，函數 f 在 z_0 附近也可以寫成冪級數。

證明： 令 f 為函數，$R > 0$ 以及冪級數 $\sum a_n z^n$ 滿足

$$\forall z \in D(0,R), \quad f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

令 $z_0 \in D(0,R)$ 以及 $r = R - |z_0|$。我們不難看出來 $D(0,r) \subseteq D(0,R)$。令 $z \in D(z_0, r)$，我們寫

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \big(z_0 + (z - z_0)\big)^n &= \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} a_n \mathbb{1}_{n\geqslant k} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k\end{aligned}$$

我們可以檢查對於每個 $n \geqslant 0$，級數 $\sum_{k\geqslant 0} a_n \mathbb{1}_{n\geqslant k} \binom{n}{k} z_0^{n-k}(z-z_0)^k$ 會絕對收斂（有限級數）。此外，我們有

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} |a_n| \mathbb{1}_{n\geqslant k} \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \big(|z_0| + |z - z_0|\big)^n$$

這會收斂，因為 $|z_0| + |z - z_0| < |z_0| + r = R$。因此，定理 6.7.4 允許我們交換取和的順序。我們會得到

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathbb{1}_{n\geqslant k} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k = \sum_{k\geqslant 0} \left(\sum_{n\geqslant k} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k,$$

這就會是中心在 z_0 的冪級數。 □

第六小節　在 ODE 上的應用

我們可以拿冪級數來解係數為多項式的線性常微分方程。我們有兩種情況：

- 我們知道解可以寫成冪級數，因此我們可以尋找冪級數係數之間的遞迴關係。接著，係數的唯一性（系理 8.3.24 ）讓我們可以找到這個唯一解。見範例 8.3.34 。
- 我們並不知道解是否可以寫成冪級數，不過想要證明存在一個這樣的解。如同前項，我們使用相同的方式，並證明所對應到的冪級數的收斂半徑嚴格為正。這給我們能夠寫成冪級數時的唯一解，見範例 8.3.35 。注意到，這並沒有給我們任何關於解唯一性的結果。

範例 8.3.34 ： 我們想要對下列函數，在 0 附近做冪級數的展開：

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

函數 f 可以寫成中心在 0 的冪級數，收斂半徑為 $+\infty$，因為他是這種類型函數的乘積還有積分。此外，根據微積分基本定理，我們有：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xf(x) + 1, \quad \text{以及} \quad f(0) = 0.$$

假設 $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$。那麼我們有

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}, \quad \text{以及} \quad xf(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 2} a_{n-2} x^{n-1}.$$

因此

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2xf(x) = a_1 + \sum_{n\geqslant 2} (n a_n - 2a_{n-2}) x^{n-1}.$$

初始條件 $f(0) = 0$ 給我們 $a_0 = 0$。根據系理 8.3.24 ，我們知道

$$a_1 = 1, \quad \text{以及} \quad \forall n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}.$$

因此，透過歸納法，我們得到

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_{2n} = 0, \quad \text{以及} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}.$$

我們可以再次檢查（即使在這個範例中，這不是必須的），透過序列 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 定義出來的冪級數的收斂半徑會等於 $+\infty$，因此

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

注意到這個解也可以在任何 $a \in \mathbb{R}$ 附近展開成冪級數。

範例 8.3.35 ： 令 $\alpha \in \mathbb{C}$。我們想要找出下列函數在 0 附近的冪級數展開：

$$\begin{aligned} f: \quad (-1,1) &\to \quad \mathbb{C} \\ x \quad &\mapsto \quad (1+x)^{\alpha}. \end{aligned}$$

這個函數 f 滿足下面這個一階線性長微分方程：

$$\forall x \in (-1,1), \quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad \text{以及} \quad f(0) = 1.$$

這樣的微分方程有唯一的解（定理 8.4.17 ）。假設 $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ 的收斂半徑為 $R > 0$。那麼我們有

$$\forall x \in (-R,R), \quad f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad \text{以及} \quad x f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^n.$$

因此，

$$\forall x \in (-R,R), \quad (1+x)f'(x) - \alpha f(x) = \sum_{n \geqslant 0} ((n+1)a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n) x^n.$$

根據初始條件 $f(0) = 1$，我們得到 $a_0 = 1$。根據係數的唯一性（系理 8.3.24 ），我們得到

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

使用數學歸納法，我們推得

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}. \tag{8.18}$$

根據 d'Alembert 檢測法，我們得到

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

因此，透過式 (8.18) 當中係數所定義的冪級數 $\sum a_n x^n$ 收斂半徑為 1，所以我們得到結論：

$$\forall x \in (-1,1), \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

這個式子把二項式展開推廣到指數為複數的情形。

第四節 均勻收斂的進階定理

第一小節 Arzelà-Ascoli 定理

Arzelà-Ascoli 定理是個泛函分析中的重要定理，他讓我們可以刻劃什麼時候連續函數的子集合會是緊緻的。這個是可以拿來證明某些微分方程的解有存在性，見定理 8.4.14 。首先，讓我們引入等度連續的概念。

定義 8.4.1 ： 令 (K, d) 為賦距空間。此外，如果 K 是個緊緻空間，連續函數所構成的空間 $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ 是個 $\mathcal{B}(K, \mathbb{R})$ 的子集合。在定義 8.1.9 中，我們賦予 $\mathcal{B}(K, \mathbb{R})$ 最小上界範數，這也可以被引導在子空間 $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ 上。給定子集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$。如果下列成立：

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in M, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \quad y \in B(x, \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \tag{8.19}$$

則我們說 $\mathcal{F}$ 是等度連續 (equicontinuous) 的。

註解 8.4.2 ： 我們注意到，式 (8.19) 中的定義比要求所有 $f \in \mathcal{F}$ 都要連續來得強。只要固定了 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in M$，這個條件要求的是選擇 $\delta > 0$ 使得他對 $f \in \mathcal{F}$ 來說是均勻的。

範例 8.4.3 ：

(1) 由有限多個連續函數構成的子集合是等度連續的。

(2) 對於每個 $L > 0$，由所有 L-Lipschitz 連續函數構成的集合是等度連續的。

定理 8.4.4 【Arzelà–Ascoli 定理】：令 (K,d) 為緊緻賦距空間，以及 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 為子集合。那麼我們有下列性質。

(1) 若且唯若 $\mathcal{F}$ 是有界、閉集，且等度連續的，則 $\mathcal{F}$ 是緊緻的。

(2) 若且唯若 $\mathcal{F}$ 是有界且等度連續的，則 $\mathcal{F}$ 是預緊緻的。

註解 8.4.5：

(1) 我們不要忘記，緊緻空間一定會是個有界閉集（命題 3.1.6），但給定一個有界閉集，他不一定是緊緻的（註解 3.1.34），除非說我們在一個有限維度的賦範向量空間中（系理 3.2.24）。如果緊緻賦距空間 K 中只有有限多個點，我們記 $n=\mathrm{Card}(K)$，那麼 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 顯然會和 $\mathbb{R}^n$ 同構，所以是個有限維度賦範向量空間，這個定理就變得顯然。然而，對於一般的賦距空間 K 來說，連續函數構成的空間 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 不是有限維度的。

(2) 從習題 3.21，我們知道給定一個賦距空間，若且唯若他是預緊緻且是完備的，則他是緊緻的。此外，在習題 8.30 中，我們可以檢查如果 $\mathcal{F}$ 是等度連續的，那麼 $\overline{\mathcal{F}}$ 也是。還有，由於 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 是個 Banach 空間，我們可以看出來 (2) 是可以從 (1) 所得到的直接結果。

(3) 我們也注意到，可以把 $\mathbb{R}$ 替換成任意的 Banach 空間，而證明也可以在這個情況下被推廣。

證明：

- 假設 $\mathcal{F}$ 是緊緻的。由於我們已經知道他是個有界閉集，我們只需要證明他是等度連續的。緊緻集合也是相對緊緻（預緊緻）的，見引理 3.1.22。令 $\varepsilon>0$。我們能找到 $N\geqslant 1$ 以及 $f_1,\dots,f_N\in\mathcal{F}$ 使得 $\mathcal{F}\subseteq\bigcup_{i=1}^N B(f_i,\varepsilon)$。此外，由有限多個函數構成的集合 $\{f_1,\dots,f_N\}$ 是等度連續的。

  令 $x\in M$。我們能找到 $\delta>0$ 使得

$$\forall i=1,\dots,N,\quad y\in B(x,\delta)\quad\Rightarrow\quad |f_i(x)-f_i(y)|\leqslant\varepsilon.$$

  對於任意給定的 $f\in\mathcal{F}$，我們能找到 $1\leqslant i\leqslant N$ 滿足 $f\in B(f_i,\varepsilon)$。那麼，對於任意

$y \in B(x,\delta)$，我們有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(y)|+|f_i(y)-f(y)| \leqslant 3\varepsilon.$$

這讓我們可以總結 $\mathcal{F}$ 是等度連續的。

- 假設 $\mathcal{F}$ 是有界閉集，且是等度連續的。如果要證明 $\mathcal{F}$ 是緊緻的，我們只需要證明他會滿足 Bolzano–Weierstraß 性質（定義 3.1.19）即可，見定理 3.1.20 。

  令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $\mathcal{F}$ 裡面的序列。由於 K 是緊緻的，我們能找到在 K 中稠密的序列，我們把他記作 $(x_n)_{n\geqslant 1}$[2]。我們會使用對角論證法來萃取 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 的子序列，使得他對於每個 $k \geqslant 1$ 都會在 x_k 收斂。

  - 序列 $(f_n(x_1))_{n\geqslant 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界，所以根據 Bolzano–Weierstraß 定理（定理 2.2.5），我們能夠找到收斂子序列，記作 $(f_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n\geqslant 1}$，其中 $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是個萃取函數。
  - 令 $m \geqslant 1$。假設我們已經構造好了萃取函數 $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant m$，以及 $\psi_m := \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_m$，序列 $(f_{\psi_m(n)}(x_k))_{n\geqslant 1}$ 皆會收斂。那麼，序列 $(f_{\psi_m(n)}(x_{m+1}))_{n\geqslant 1}$ 是有界的，所以我們能找到萃取函數 $\varphi_{m+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得 $(f_{\psi_m \circ \varphi_{m+1}(n)}(x_{m+1}))_{n\geqslant 1}$ 會收斂。我們可以顯然得到，對於 $1 \leqslant k \leqslant m$，序列 $(f_{\psi_m \circ \varphi_{m+1}(n)}(x_k))_{n\geqslant 1}$ 還是會收斂，因為他是收斂序列的一個子序列。
  - 對於 $n \geqslant 1$，令 $\psi(n) := \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ 以及 $g_n = f_{\psi(n)}$。那麼，$(g_n)_{n\geqslant 1}$ 是個 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 的子序列。從上面我們得到，對於每個 $k \geqslant 1$，序列 $(g_n(x_k) = f_{\psi(n)}(x_k))_{n\geqslant k}$ 是收斂序列 $(f_{\psi_k(n)}(x_k))_{n\geqslant 1}$ 的子序列，所以序列 $(g_n(x_k))_{n\geqslant 1}$ 會收斂。對於每個 $k \geqslant 1$，我們可以把上面極限記作 $f(x_k)$。

  現在，我們需要證明這個收斂可以推廣到所有的 $x \in K$，而且這個收斂會是均勻的，所以極限還會是在 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 當中。

  讓我們固定 $\varepsilon > 0$。

[2]我們使用 K 的預緊緻性。對於每個 $n \geqslant 1$，我們能找到有限多顆半徑為 $\frac{1}{n}$ 的球把 K 覆蓋住。我們把這些球的球心構成的集合，對於所有整數 $n \geqslant 1$ 聯集起來，我們得到的是 K 中可數稠密的集合。

- 對於每個 $k \geqslant 1$，從序列 $(g_n(x_k))_{n\geqslant 1}$ 的收斂，我們能找到 $N(\varepsilon, x_k) \geqslant 1$ 使得

$$\forall m, n \geqslant N(\varepsilon, x_k), \quad |g_m(x_k) - g_n(x_k)| \leqslant \varepsilon. \tag{8.20}$$

- 使用 $\mathcal{F}$ 的等度連續性，對於每個 $z \in K$，我們能找到 $\delta_z > 0$ 使得對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$y \in B(z, \delta_z) \quad \Rightarrow \quad |g_n(z) - g_n(y)| \leqslant \varepsilon. \tag{8.21}$$

開球 $B(z, \delta_z)$ 構成 K 的開覆蓋，再使用 K 的緊緻性，我們能找到 $L \geqslant 1$ 還有 $z_1, \ldots, z_L \in K$ 滿足

$$K = \bigcup_{i=1}^{L} B(z_i, \delta_{z_i}).$$

對於每個 $1 \leqslant i \leqslant L$，我們也能找到 $n_i \geqslant 1$ 使得 $x_{n_i} \in B(z_i, \delta_{z_i})$。

- 我們取 $N := \max\{N(\varepsilon, x_{n_1}), \ldots, N(\varepsilon, x_{n_L})\}$。這告訴我們均勻柯西條件（命題 8.1.8）對於 $x_{n_1}, \ldots, x_{n_L}$ 會成立：

$$\forall i = 1, \ldots, L, \forall m, n \geqslant N, \quad |g_m(x_{n_i}) - g_n(x_{n_i})| \leqslant \varepsilon.$$

- 令 $x \in K$ 以及 $1 \leqslant i \leqslant L$ 使得 $x \in B(z_i, \delta_{z_i})$。對於 $m, n \geqslant N$，我們有

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leqslant |g_m(x) - g_m(z_i)| + |g_m(z_i) - g_m(x_{n_i})| + |g_m(x_{n_i}) - g_n(x_{n_i})| \\ &\quad + |g_n(x_{n_i}) - g_n(z_i)| + |g_n(z_i) - g_n(x)| \\ &\leqslant 5\varepsilon, \end{aligned}$$

其中我們對中間的項（第三項）使用了式 (8.20)；對於其他的項，我們使用了式 (8.21) 還有 $x, x_{n_i} \in B(z_i, \delta_{z_i})$。

因此，對於每個 $x \in K$，序列 $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ 是柯西的，且我們從前面看到，N 的選擇與 $x \in K$ 的選擇無關。所以我們可以總結，對於每個 $x \in K$，$(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ 會收斂，而且這個收斂是均勻的，所以極限函數還是會在 $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ 當中。 □

第二小節 Stone–Weierstraß 定理

接下來的 Stone–Weierstraß 定理讓我們知道什麼樣的函數集合，能夠近似定義在緊緻集合上面的連續函數。

定理 8.4.6 【Stone–Weierstraß 定理】：令 X 為緊緻賦距空間以及 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。連續函數所構成的空間 $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ 賦予最小上界範數 $\|\cdot\|_\infty$ 後，會是個賦範向量空間，也會是個賦範代數。令 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ 為 $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ 的子代數。假設

- $1\in\mathcal{A}$；
- $\mathcal{A}$ 會分離點，也就是說對於任意 $x\neq y\in X$，存在 $f\in\mathcal{A}$ 滿足 $f(x)\neq f(y)$；
- 【當 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 時】$f\in\mathcal{A}$ 若且唯若 $\overline{f}\in\mathcal{A}$。

那麼，$\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ 裡面會是稠密的。

範例 8.4.7：下面我們給一些可以使用 Stone–Weierstraß 定理的例子。

(1) 令 $I=[a,b]$ 為線段且 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$。當我們把多項式集合 $\mathbb{K}[X]$ 看作定義在 I 上的函數時，他在 $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ 中會是稠密的。

(2) 令 $I=[a,b]$ 為線段且 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。由所有 Lipschitz 連續函數所構成的集合在 $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ 中會是稠密的。

(3) 令 $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 為由 $\mathbb{R}$ 上週期為 2π 的連續函數所構成的空間。由 $\{x\mapsto e^{\mathrm{i}nx}:n\in\mathbb{Z}\}$ 線性展開所得到的集合，或是稱作三角函數集合，在 $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中會是稠密的。

Stone–Weierstraß 定理的證明不簡單。我們會先敘述這個定理的特例，稱作 *Weierstraß* 近似定理，並用比較基礎的方法來證明他。在這個之後，我們會需要幾個引理（引理 8.4.11 和引理 8.4.12），然後我們就可以證明 Stone–Weierstraß 定理了。

定理 8.4.8 【Weierstraß 近似定理】：令 $I = [a,b]$ 為線段，以及 $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ 賦予最小上界範數 $\|\cdot\|_\infty$。令 $\mathcal{P}$ 為由所有多項式函數所構成的集合。那麼，$\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ 裡面是稠密的。換句話說，對於任意 $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$，我們可以找到多項式序列 $(P_n)_{n\geqslant 1}$ 使得

$$\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

註解 8.4.9 ：

(1) 我們不難看出來，由所有多項式所構成的集合 $\mathcal{P}$ 是個 $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ 的子代數，而且他滿足定理 8.4.6 中的條件。所以，Weierstraß 近似定理可以視為是 Stone–Weierstraß 定理的特例。

(2) 取 $I = [a,b]$ 為線段是很重要的。例如，在習題 8.6 中，我們有看到這個定理對 $I = \mathbb{R}$ 不會成立。

Weierstraß 原始的證明會使用捲積，但我們這堂課不會討論這樣的概念。下面我們要給的定理證明來自 Bernstein，這也可以用機率的語言來描述，並看作是對應到 Bernoulli 隨機變數的大數法則。

證明：不失一般性，我們可以假設 $I = [0,1]$。對於每個整數 $0 \leqslant k \leqslant n$，讓我們定義

$$\begin{array}{rccc} b_{n,k}: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \end{array}$$

還有對於 $n \in \mathbb{N}_0$，定義

$$\begin{array}{rccc} B_n: & \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}[x] \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) b_{n,k}(x). \end{array}$$

我們再來要證明 $B_n(f)$ 會均勻收斂到 f。

給定 $\varepsilon > 0$。由於 f 在線段 I 上連續，他會有界。讓我們取 $M > 0$ 滿足 $|f(x)| \leqslant M$ 對於所有

$x \in I$。根據 Heine–Cantor 定理（定理 3.1.17），我們能找到 $\eta > 0$ 使得

$$\forall x, y \in I, \quad |x-y| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

那麼，對於任意 $n \in \mathbb{N}_0$ 還有 $x \in I$，我們有

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| = |B_n(f)(x) - f(x)B_n(1)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x) \\ &\leqslant \sum_{k \in K_1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x) + \sum_{k \in K_2} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x), \end{aligned}$$

其中

$$K_1 = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n : \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \eta \right\}, \quad \text{以及} \quad K_2 = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \eta \right\}.$$

使用均勻連續性，第二個和當中的項是下標在 K_2 中的情況，我們可以得到上界：

$$\sum_{k \in K_2} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k \in K_2} \varepsilon b_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \varepsilon b_{n,k}(x) = \varepsilon.$$

對於下標在 K_1 中的項，我們使用下面的平方技巧：

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x) \leqslant 2M \sum_{k \in K_1} b_{n,k}(x) &\leqslant \frac{2M}{\eta^2} \sum_{k \in K_1} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_{n,k}(x) \\ &\leqslant \frac{2M}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_{n,k}(x) \\ &= \frac{2M}{\eta^2} \left[B_n(x^2) - 2x B_n(x) + x^2 B_n(1) \right]. \end{aligned}$$

考慮下面這個關係式：

$$F(a,b) = [a + (1-b)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-b)^{n-k}.$$

我們可以用下列方法來計算 $B_n(1)$、$B_n(x)$ 和 $B_n(x^2)$：

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = F(x,x) = 1,$$

$$
\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_{n,k}(x) = \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \frac{\partial}{\partial a} F(x,x) = \frac{x}{n} n[x + (1-x)]^{n-1} = x, \\
B_n(x^2) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{k}{n^2}\right) b_{n,k}(x) \\
&= \frac{x^2}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} F(x,x) + \frac{x}{n^2} \frac{\partial}{\partial a} F(x,x) \\
&= \frac{x^2}{n^2} [n(n-1)(x + (1-x))^{n-2}] + \frac{x}{n^2} n[x + (1-x)]^{n-1} \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}
$$

因此，我們得到

$$
\sum_{k \in K_1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_{n,k}(x) \leqslant \frac{2M}{\eta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{M}{2n\eta^2}.
$$

把所有不等式放在一起，我們得到

$$
|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\eta^2}.
$$

我們先取最小上界範數，再對 n 取 $\limsup$，可以得到

$$
\limsup_{n \to \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon.
$$

由於上面對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆成立，我們推得 $\limsup_{n\to\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$。 □

再來我們要引入網格的概念，並且給出網格版本的 Stone–Weierstraß 定理。這可以讓我們推得定理 8.4.6 中原始版本的定理。

定義 8.4.10 ： 令 X 為緊緻賦距空間以及 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 為子集合。如果

$$
\forall f, g \in \mathcal{L}, \quad \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L},
$$

則我們說 $\mathcal{L}$ 是個網格。

引理 8.4.11 ： 對於任意 $a>0$，存在定義在 $[-a,a]$ 上的多項式序列，使得他會均勻收斂到函數 $x\mapsto |x|$。

證明： 我們有兩種方式來證明這個引理。我們可以把他看作是 Weierstraß 近似定理（定理 8.4.8）的直接結果，或是使用構造法來證明。

我們可以把問題做縮放，因此可以假設 $a=1$。我們注意到，對於 $x\in[-1,1]$ 以及 $u=1-x^2\in[0,1]$，我們有

$$|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{1-u}$$

如果 $|u|<1$，我們會有

$$\sqrt{1-u}=\sum_{n\geqslant 0}a_n(-u)^n,\quad \text{其中 } a_n=\binom{1/2}{n}, \tag{8.22}$$

其中冪級數可以從範例 8.3.35 得到，而且他的收斂半徑等於 1。我們想要證明這個冪級數對於 $u\in[0,1]$ 會均勻收斂。我們可以檢查他會正規收斂，那麼就能直接得到均勻收斂，見命題 8.1.22 。因此，我們只需要檢查 $\sum a_n$ 會絕對收斂。對於 $n\in\mathbb{N}_0$，我們有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-3)!!}{n!}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{(2n-3)!!(2n-2)!!}{n!(2n-2)!!}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!},\end{aligned}$$

再使用 Stirling 公式，我們會得到 $|a_n|\sim \mathrm{cst}\cdot n^{-3/2}$。這代表著 $\sum a_n$ 會絕對收斂。 □

引理 8.4.12 ： 任何閉子代數 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 都是個網格。

證明： 令 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 為子代數。給定 $f,g\in\mathcal{A}$，我們有

$$\max\{f,g\}=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2},\quad \text{以及}\quad \min\{f,g\}=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}.$$

因此，我們只需要證明對於 $h\in\mathcal{A}$，我們也會有 $|h|\in\mathcal{A}$，就可以總結了。令 $h\in\mathcal{A}$。使用 h

的連續性還有 X 的緊緻性，我們可以定義 $a := \max_{x\in X} |h(x)| < \infty$，見命題 3.1.12 。使用引理 8.4.11 ，我們可以找到多項式序列 $(P_n)_{n\geqslant 1}$，使得他在 $[-a,a]$ 上會均勻收斂到絕對值函數。對於每個 $n \geqslant 1$，定義 $h_n = P_n(h) \in \mathcal{A}$。因此，$(h_n)_{n\geqslant 1}$ 是個函數序列，而且會在 X 上均勻收斂到 $|h|$。由於 $\mathcal{A}$ 是個閉集，我們總結 $|h| \in \mathcal{A}$。 □

定理 8.4.13 ： 令 X 為包含至少兩個點的緊緻賦距空間，且 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 為網格。假設對於任意 $x \neq y \in X$ 以及 $a, b \in \mathbb{R}$，存在 $f \in \mathcal{L}$ 滿足 $f(x) = a$ 和 $f(y) = b$。那麼，$\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 中是稠密的。

證明： 令 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 為網格。令 $g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 還有 $\varepsilon > 0$。我們想要構造函數 $f \in \mathcal{L}$ 使得 $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$。

對於任意 $a, b \in X$，我們能找到 $f_{a,b} \in \mathcal{L}$ 使得 $f_{a,b}(a) = g(a)$ 還有 $f_{a,b}(b) = g(b)$。使用 $f_{a,b}$ 和 g 的連續性，我們知道存在包含 b 的開集 $U_{a,b}$ 使得 $f_{a,b} \geqslant g - \varepsilon$ 在 $U_{a,b}$ 上。由於 $(U_{a,b})_{b\in X}$ 是個緊緻空間 X 的開覆蓋，根據 Borel–Lebesgue 性質（定義 3.1.3 ），我們能找到 $b_1, \ldots, b_m \in X$ 使得 $(U_{a,b_i})_{1\leqslant i\leqslant m}$ 覆蓋 X。令 $f_a := \sup_{1\leqslant i\leqslant m} f_{a,b_i} \in \mathcal{L}$。那麼，我們有 $f_a(a) = a$ 還有 $f_a \geqslant g - \varepsilon$ 在 X 上。同理，使用 f_a 和 g 的連續性，存在包含 a 的開集 V_a 使得 $f_a \leqslant g + \varepsilon$ 在 V_a 上。由於 $(V_a)_{a\in X}$ 是個緊緻空間 X 的開覆蓋，再次使用 Borel–Lebesgue 性質（定義 3.1.3 ），我們能找到 $a_1, \ldots, a_n \in X$ 使得 $(V_{a_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ 覆蓋 X。令 $f := \inf_{1\leqslant j\leqslant n} f_{a_j}$。那麼，我們可以輕易檢查在 X 上，我們有 $g - \varepsilon \leqslant f \leqslant g + \varepsilon$，所以 $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$。這讓我們可以總結 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 中是稠密的。 □

定理 8.4.6 的證明的證明： 令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 為滿足定理 8.4.6 當中假設的子代數。我們記 $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{A}}$，這也還會是個子代數，因為加法、乘法和向量乘法都是連那麼續的。從引理 8.4.12 我們得知 $\mathcal{L}$ 是個網格。現在，讓我們來檢查定理 8.4.13 中的假設會成立。

令 $x \neq y \in X$ 還有 $a, b \in \mathbb{R}$。根據定理 8.4.6 中的假設，我們能找到 $p \in \mathcal{A}$ 使得 $p(x) \neq p(y)$。由於 $1 \in \mathcal{A}$，我們可以把 $c \times 1 \in \mathcal{A}$ 加到 p，讓我們能得到 $p(x) + c \neq 0$ 還有 $p(y) + c \neq 0$。不失一般性，讓我們假設有 $p \in \mathcal{A}$，滿足 $p(x) \neq p(y)$、$p(x) \neq 0$ 還有 $p(y) \neq 0$。再來，我們找可以

寫成 $f = \alpha p + \beta p^2$ 形式的 $f \in \mathcal{A}$，然後選擇 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = a$ 還有 $f(y) = b$。因此，定理 8.4.13 告訴我們 $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$，也就是 $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$。

再來我們討論怎麼證明複數版本的定理。令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ 為滿足定理 8.4.6 當中假設的子代數。令 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ 為 $\mathcal{A}$ 中的實函數所構成的集合，這會是個 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$ 子代數。我們想要檢查 $\overline{\mathcal{A}_0} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$。首先，我們不難檢查 $1 \in \mathcal{A}_0$。再來，對於任意 $f \in \mathcal{A}$，由於 $\overline{f} \in \mathcal{A}$，我們推得 $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{A}_0$。對於任意 $x \neq y \in X$，存在 $f \in \mathcal{A}$ 滿足 $f(x) \neq f(y)$，所以我們一定會有 $\mathrm{Re}(f)(x) \neq \mathrm{Re}(f)(y)$ 或 $\mathrm{Im}(f)(x) \neq \mathrm{Im}(f)(y)$。所以，我們知道 $\mathcal{A}_0$ 會分離點。藉由實數版本的定理，我們總結 $\overline{\mathcal{A}_0} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$。對於任意函數 $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ 還有 $\varepsilon > 0$，我們可以找到 $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_0$ 使得

$$\|\mathrm{Re}(f) - g_1\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad \text{以及} \quad \|\mathrm{Im}(f) - g_2\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

由於 $\mathcal{A}$ 是個 $\mathbb{C}$ 代數，我們有 $g_1 + \mathrm{i}\, g_2 \in \mathcal{A}$。此外，我們還有

$$\|f - (g_1 + \mathrm{i}\, g_2)\|_\infty \leqslant \|\mathrm{Re}(f) - g_1\|_\infty + \|\mathrm{Im}(f) - g_2\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

這證明了 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ 當中會是稠密的。 □

第三小節　Peano 存在性定理

再來我們會討論下面的 Peano 存在性定理，這是 Arzelà–Ascoli 定理和 Stone–Weierstraß 定理的應用，他會給我們微分方程式解的存在性。

定理 8.4.14 【Peano 存在性定理】：固定整數 $n \geqslant 1$。令 $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 為非空開集，以及 $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 為連續函數。令 $t_0 \in \mathbb{R}$ 以及 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(t_0, y_0) \in \Omega$。令 $a, b > 0$ 滿足

$$\mathcal{R} := \{(t, y) : |t - t_0| \leqslant a, \|y - y_0\| \leqslant b\} \subseteq \Omega.$$

令 $M > 0$ 並假設對於 $(t,y) \in \mathcal{R}$，我們有 $\|F(t,y)\| \leqslant M$。那麼，下面這個微分方程式

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \quad \forall t \in \mathring{I}, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

會有個定義在 $I := [t_0 - a', t_0 + a']$ 上的解 $t \mapsto y(t)$，其中 $a' = \min\{a, \frac{b}{M}\}$。

註解 8.4.15： 很重要的是，我們要注意到 Peano 存在性定理並沒有保證解的唯一性，見範例 8.4.16。如果要有解的唯一性，函數 F 需要滿足更強的性質，見定理 8.4.17 當中的 Picard–Lindelöf 定理，也稱作 Cauchy–Lipschitz 定理。

證明：我們把證明分成三部份：(1) 我們把微分方程的解重新描述為固定點問題；(2) 我們在 F 是個 Lipschitz 連續函數的情況下，證明解的存在性；(3) 在一般的設定下，我們證明解的存在性。

不失一般性，我們可以對時間和空間做平移，並假設 $t = 0$ 還有 $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$。

(1) 首先，讓我們把所要證明的重新敘述為固定點問題。我們記 $\mathcal{X} = \mathcal{C}(I, \overline{B}(0,b))$。考慮下面這個運算子：

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ & f & \mapsto & \int_0^t F(s, f(s))\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

讓我們來檢查，對於 $f \in \mathcal{X}$，$T(f)$ 的像是定義良好的。我們先注意到，對於任意 $s \in I$ 來說，我們有 $(s, f(s)) \in \mathcal{R}$，所以對於任意 $t \in I$，我們有

$$\|T(f)(t)\| = \left\| \int_0^t F(s, f(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant |t| M \leqslant b.$$

換句話說，$T(f)$ 是個由 I 映射至 $\overline{B}(0,b)$ 的函數。此外，從微積分基本定理，我們知道 $T(f)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，所以我們有 $T(f) \in \mathcal{X}$。因此，如果 y 是個 T 的固定點，也就是說會滿足 $T(y) = y$，我們推得 y 會是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。此外，如果 y 是個固定點，藉由對 $t \in I$ 微分，

我們有

$$y'(t) = (T(y))'(t) = F(t, y(t)).$$

我們也可以檢查 $y(0) = T(y)(0) = 0$。因此，定理 8.4.14 的結論與證明 T 至少有一個固定點是等價的。

(2) 讓我們假設 F 是個在 $\mathcal{R}$ 上的 L-Lipschitz 連續函數。在這個情況下，我們可以輕易檢查 T 是個 (La')-Lipschitz 連續函數，所以也會連續。

我們再來要定義由 $\mathcal{X}$ 中的元素所構成的函數序列 $(y_n)_{n\geqslant 1}$。手線，令 y_1 為常數零函數，這的確是在 $\mathcal{X}$ 中的。對於 $n \geqslant 1$，我們定義 $y_{n+1} = T(y_n)$，從 (1) 的討論，我們知道他會在 $\mathcal{X}$ 當中。藉由數學歸納法，我們可以定義在 $\mathcal{X}$ 中的序列 $(y_n)_{n\geqslant 1}$。此外，對於任意 $t, t' \in I$ 還有 $n \geqslant 1$，我們有

$$\|y_n(t) - y_n(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t} F(s, y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant M|t - t'|. \tag{8.23}$$

這代表著 $(y_n)_{n\geqslant 1}$ 是個等度連續函數所構成的序列。Arzelà–Ascoli 定理[3]讓我們可以找到收斂子序列 $(y_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$，極限記作 $y \in \mathcal{X}$。我們想要檢查 $T(y) = y$。

讓我們記 $I_+ = I \cap \mathbb{R}_+ = [0, a']$。對於每個 $n \geqslant 1$ 還有 $t \in I_+$，讓我們定義

$$M_n(t) := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|T(y_n)(s) - y_n(s)\| = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|y_{n+1}(s) - y_n(s)\|.$$

對於 $n \geqslant 2$ 還有 $s \in I_+$，我們有

$$\begin{aligned}
\|T(y_n)(s) - y_n(s)\| &= \|T(y_n)(s) - T(y_{n-1})(s)\| \\
&= \left\| \int_0^s \left(F(u, y_n(u)) - F(u, y_{n-1}(u))\right)\mathrm{d}u \right\| \\
&\leqslant \int_0^s L M_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

這蘊含

$$\forall t \in I_+, \quad M_n(t) \leqslant L \int_0^t M_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u. \tag{8.24}$$

我們可以依下列方式來計算 M_1：

$$\forall t \in I_+, \quad M_1(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|y_2(s)\| = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left\| \int_0^s F(u,0)\,\mathrm{d}u \right\| \leqslant tM.$$

再來，對於 M_2，我們使用式 (8.24)，然後得到：

$$\forall t \in I_+, \quad M_2(t) \leqslant L \int_0^t M_1(u)\,\mathrm{d}u = \frac{t^2}{2} LM.$$

透過歸納法，對於 $n \geqslant 1$，我們會有

$$\forall t \in I_+, \quad M_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!} L^{n-1} M \leqslant \frac{(a')^n}{n!} L^{n-1} M \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

因此，我們得知 $(T(y_{\varphi(n)}) - y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ 會在 I_+ 上均勻收斂至 0。接著，使用相似的方法，我們可以得到這個收斂到 0 在 $I_- := I \cap \mathbb{R}_-$ 上也是均勻的，所以在整個 I 上會是均勻的。由於 $y_{\varphi(n)}$ 會均勻收斂到 y，而且 T 是連續的，我們推得 $T(y_{\varphi(n)})$ 會均勻收斂到 $T(y)$，這給我們 $T(y) = y$。

(3) 如果 F 只是連續的，根據 Stone–Weierstraß 定理（定理 8.4.6），我們能找到由 Lipschitz 連續函數所構成的序列 $(F_n)_{n \geqslant 1}$ 會在 $\mathcal{R}$ 上均勻收斂至 F。對於每個 $n \geqslant 1$，令 y_n 為在微分方程中，把 F 換成 F_n 所得到對應的解。這樣一來，$(y_n)_{n \geqslant 1}$ 會是個在 $\mathcal{X}$ 當中的序列。由於 $(F_n)_{n \geqslant 1}$ 會在 $\mathcal{R}$ 上均勻收斂到 F，我們知道 $(F_n)_{n \geqslant 1}$ 可以被一個常數 $M' > 0$ 均勻控制住。透過把式 (8.23) 中的 M 換成 M'，我們知道相同的論述可以告訴我們，函數序列 $(y_n)_{n \geqslant 1}$ 會是等度連續的。因此，Arzelà–Ascoli 定理給我們子序列 $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$，會均勻收斂到 $y \in \mathcal{X}$，再來我們要檢查 $T(y) = y$。首先我們先檢查函數序列 $(s \mapsto F_{\varphi(n)}(s, y_{\varphi(n)}(s)))_{n \geqslant 1}$ 是等度連續的。

[3]定理 8.4.4 (2) 告訴我們集合 $\{y_n : n \geqslant 1\}$ 是個預緊緻的子集合。我們可以證明序列 $(y_n)_{n \geqslant 1}$ 會有個柯西子序列，見習題 8.31 。那麼，透過 $\mathcal{X}$ 的完備性，這個子序列就會收斂。

固定 $\varepsilon > 0$. 對於 $n \geqslant 1$ 還有 $s, t \in I$，我們記

$$\begin{aligned}
&\|F_n(s, y_n(s)) - F_n(t, y_n(t))\| \\
&\leqslant \|F_n(s, y_n(s)) - F(s, y_n(s))\| + \|F(s, y_n(s)) - F(s, y(s))\| + \|F(s, y(s)) - F(t, y(t))\| \\
&\quad + \|F(t, y(t)) - F(t, y_n(t))\| + \|F(t, y_n(t)) - F_n(t, y_n(t))\|
\end{aligned}$$

由於 $s \mapsto F(s, y(s))$ 在線段 I 上是連續的，所以也會均勻連續。同理，映射 $(t, y) \mapsto F(t, y)$ 在 $\mathcal{R}$ 上也是均勻連續的。我們可以取 $\eta > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
|t - s| \leqslant \eta \quad &\Rightarrow \quad \|F(s, y(s)) - F(t, y(t))\| \leqslant \varepsilon, \\
\|(t, y) - (s, x)\| \leqslant \eta \quad &\Rightarrow \quad \|F(t, y) - F(s, x)\| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

由於 $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ 是均勻的，且 $F_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} F$ 是均勻的，存在 $N \geqslant 1$ 使得

$$\forall n \geqslant N, \quad \left\|y_{\varphi(n)} - y\right\|_\infty \leqslant \eta, \quad \text{以及} \quad \left\|F_{\varphi(n)} - F\right\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

因此，對於 $n \geqslant N$ 還有 $s, t \in I$ 滿足 $|s - t| \leqslant \eta$，我們得到

$$\left\|F_{\varphi(n)}(s, y_{\varphi(n)}(s)) - F_{\varphi(n)}(t, y_{\varphi(n)}(t))\right\| \leqslant 5\varepsilon$$

這代表著 $(s \mapsto F_{\varphi(n)}(s, y_{\varphi(n)}(s)))_{n\geqslant 1}$ 是等度連續的，所以會有收斂子序列，我們把他所對應到的萃取函數記作 ψ。因此，對於 $t \in I$，我們有

$$T(y_{\varphi\circ\psi(n)})(t) = \int_0^t F_{\varphi\circ\psi(n)}(s, y_{\varphi\circ\psi(n)}(s))\,\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t F(s, y(s))\,\mathrm{d}s = T(y)(t),$$

這個收斂根據命題 8.2.5 ，對於 $t \in I$ 中是均勻的。我們總結 $T(y) = y$。 □

範例 8.4.16 ： 我們取 $n = 1$ 以及 $F(t, y) = \sqrt{|y|}$ 和初始條件 $(t_0, y_0) = (0, 0)$。換句話說，我們想要考慮的微分方程如下：

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \quad \text{以及} \quad y(0) = 0. \tag{8.25}$$

式 (8.25) 有很多不同的解：

- $y(t) = 0$ 對於 $t \in \mathbb{R}$；
- $y(t) = \frac{t|t|}{4}$ 對於 $t \in \mathbb{R}$；
- 對於任意 $a > 0$，$y(t) = \frac{(t-a)^2}{4}$ 對於 $t \geqslant a$，然後 $y(t) = 0$ 對於 $t \leqslant a$。

事實上，函數 $x \mapsto \sqrt{|x|}$ 在 0 點附近不是局部 Lipschitz 連續的，所以不會滿足 Picard–Lindelöf 定理（定理 8.4.17）當中的假設。

下面這個 Picard–Lindelöf 定理，也稱作 Cauchy–Lipschitz 定理，給了充分條件使得常微分方程式的解會是唯一的。

定理 8.4.17 【Picard–Lindelöf 定理，Cauchy–Lipschitz 定理】**：** 讓我們使用與在定理 8.4.14 的敘述中相同的記號。此外，假設 F 在 $\mathcal{R}$ 中，對於第二個變數是 L-Lipschitz 連續的。那麼，除了定理 8.4.14 所給我們的存在性結果之外，我們還有唯一性的結果。這個唯一性的意義如下：如果 J 是個包含 t_0 的區間，且 $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ 是個解，那麼 y 和 φ 在 $I \cap J$ 上會是完全相等的。

證明： 我們使用與定理 8.4.14 證明當中相同的記號。我們想要證明的是，那裡所定義的映射 T，會有唯一的固定點。更確切來說，我們想要證明存在整數 $m \in \mathbb{N}$ 使得 T^m 會是個壓縮映射，然後使用習題 3.24 來總結。

令 $f, g \in \mathcal{X}$。我們使用與定理 8.4.14 (2) 當中類似的方法來證明。對於 $n \geqslant 1$ 以及 $t \in I_+$，讓我們定義

$$K_n(t) := \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|(T^n f)(s) - (T^n g)(s)\| .$$

對於 $n \geqslant 2$ 還有 $s \in I_+$，我們有

$$\begin{aligned}\|T^n(f)(s) - T^n(g)(s)\| &= \left\| \int_0^s F(u, T^{n-1}(f)(u)) - F(u, T^{n-1}(g)(u)) \,\mathrm{d}u \right\| \\ &\leqslant \int_0^s L \left\| T^{n-1}(f)(u) - T^{n-1}(g)(u) \right\| \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^s L K_{n-1}(u) \,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

這讓我們得到

$$\forall t \in I_+, \quad K_n(t) \leqslant L \int_0^t K_{n-1}(u) \,\mathrm{d}u.$$

我們可以計算 K_1 如下：

$$\forall t \in I_+, \quad K_1(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left\| \int_0^t F(u, f(u)) - F(u, g(u)) \,\mathrm{d}u \right\| \leqslant Lt \|f - g\|_\infty .$$

透過數學歸納法，我們得到對於每個 $n \geqslant 1$，我們有

$$\forall t \in I, \quad K_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!} L^n \|f - g\|_\infty \leqslant \frac{(a')^n}{n!} L^n \|f - g\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

這告訴我們對於夠大的 n 來說，T^n 會是個壓縮映射。 □

第五節 積分收斂的定理

在命題 8.2.5 中，我們看到函數序列的均勻收斂，會蘊含他們原函數的均勻收斂。這樣的結果會告訴我們，他所對應到的積分也會收斂。然而，在實際應用上，我們會對積分的收斂比較有興趣。在範例 8.2.8 中，我們有看過一個例子，積分序列會收斂，但是被積分函數卻不會均勻收斂。接下來，我們會證明單調收斂定理（定理 8.5.3 ）還有控制收斂定理（定理 8.5.5 ），他們可以看作是式 (8.26) 的結果。

第一小節 單調收斂定理

我們先從下面這個關鍵引理開始。

引理 8.5.1：令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間。令 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射到 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 的片段連續函數序列。假設

(i) 對於每個 $n \geqslant 1$，函數 u_n 在 I 上是可積的；

(ii) 函數級數 $\sum u_n$ 會逐點收斂到片段連續函數 $f : I \to W$；

(iii) 級數 $\sum_n \int_I \|u_n\|$ 會收斂。

那麼，f 在 I 上可積，而且我們有

$$\int_I \|f\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_I \|u_n\|, \quad \text{以及} \quad \int_I f = \sum_{n\geqslant 1} \int_I u_n. \tag{8.26}$$

證明：我們會分三個步驟來證明這個引理：(1) I 是個線段，而且所有函數都是連續的情況；(2) I 是個線段，而且所有函數都是片段連續的情況；(3) I 是個區間，而且所有函數都是片段連續的情況。

(1) 如果 $I = [a, b]$ 是個線段，而且所有 u_n 和 f 都是連續的，證明與 Dini 定理（定理 8.1.14）是非常類似的。

令 $\varepsilon > 0$ 並定義

$$\forall n \geqslant 1, \quad E_n = \{x \in [a, b] : \|f(x)\| - \sum_{k=1}^{n} \|u_k(x)\| < \varepsilon\}. \tag{8.27}$$

函數的連續性告訴我們對於每個 $n \geqslant 1$，E_n 是個開集。$\sum u_n$ 會逐點收斂到 f，所以 $\bigcup_{n\geqslant 1} E_n = [a, b]$。由於 $[a, b]$ 是個緊緻集合，根據 Borel–Lebesgue 性質，我們能找到 $N \geqslant 1$ 使得 $\bigcup_{n=1}^{N} E_n = [a, b]$。因此，我們有

$$\int_{[a,b]} \|f\| \leqslant \int_{[a,b]} \Big(\sum_{k=1}^{N} \|u_k\| + \varepsilon\Big) = \sum_{k=1}^{N} \int_{[a,b]} \|u_k\| + \varepsilon(b-a) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_{[a,b]} \|u_n\| + \varepsilon(b-a).$$

由於上面這個不等式對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆會是對的，我們推得

$$\int_{[a,b]} \|f\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_{[a,b]} \|u_n\| \,.$$

(2) 再來，我們假設 $I = [a, b]$ 是個線段，然後所有的 u_n 和 f 都是片段連續的。令 $\varepsilon > 0$。從引理 8.5.2 ，我們能找到連續函數 g 和 $(v_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足

$$\begin{aligned} g \leqslant \|f\| \quad &\text{使得} \quad \int_I \|f\| \leqslant \varepsilon + \int_I g, \\ \forall n \geqslant 1, \|u_n\| \leqslant v_n \quad &\text{使得} \quad \int_I v_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} + \int_I \|u_n\| \,. \end{aligned}$$

如同在式 (8.27) 中，我們對連續函數 g 和 $(v_n)_{n\geqslant 1}$ 定義下面這些子集合：

$$\forall n \geqslant 1, \quad G_n = \{x \in [a,b] : g(x) - \sum_{k=1}^{n} v_k(x) < \varepsilon\}.$$

同理，我們知道存在 $N \geqslant 1$ 使得 $\bigcup_{n=1}^{N} G_n = [a, b]$。因此，我們有

$$\begin{aligned} \int_I \|f\| \leqslant \varepsilon + \int_I g \leqslant \varepsilon + \int_I \Big(\sum_{k=1}^{N} v_k + \varepsilon \Big) &= (b-a+1)\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \int_I v_k \\ \leqslant (b-a+1)\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{\varepsilon}{2^k} + \int_I \|u_k\| \Big) &\leqslant (b-a+2)\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \int_I \|u_k\| \\ \leqslant (b-a+2)\varepsilon + \sum_{n\geqslant 1} \int_I \|u_n\| \,. \end{aligned}$$

最後我們可以使用和上面相同的方法來總結。

(3) 對於任意子線段 $J \subseteq I$，從上面的討論，我們得到

$$\int_J \|f\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_J \|u_n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_I \|u_n\| < \infty.$$

因此，f 在 I 上是可積的，而且滿足

$$\int_I \|f\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \int_I \|u_n\| < \infty,$$

這會是式 (8.26) 的第一部份。

再來，我們要證明式 (8.26) 的第二部份。我們把第一部份的結果用在餘項 $\sum_{k\geqslant n+1} u_k = f - \sum_{k=1}^{n} u_k$ 上，進而得到

$$\int_I \left\| f - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\| \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} \int_I \|u_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

因為上式右方會是收斂級數 $\sum \int_I \|u_n\|$ 的餘項。那麼，我們會有

$$\left\| \int_I f - \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k \right\| = \left\| \int_I \Big(f - \sum_{k=1}^{n} u_k \Big) \right\| \leqslant \int_I \left\| f - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

這給我們關係式：

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k = \sum_{n\geqslant 1} \int_I u_n. \qquad \square$$

引理 8.5.2 ： 令 $J = [a,b]$ 為 $\mathbb{R}$ 的線段，以及 $f \in \mathcal{PC}(J,\mathbb{R})$。對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 J 上的連續函數 f_- 和 f_+ 滿足

$$f_- \leqslant f \leqslant f_+ \quad \text{以及} \quad \Big(\int_J f_+ \Big) - \varepsilon \leqslant \int_J f \leqslant \Big(\int_J f_- \Big) + \varepsilon.$$

證明：如果 f 是連續的，則沒有什麼需要證明的。假設 f 有不連續點。令 $P = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ 為 $[a,b]$ 的分割，使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant n$ 來說，當 f 限制在 (x_{k-1}, x_k) 上時，可以被拓延為在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的連續函數。從命題 7.1.3 我們得知 f 在 $[a,b]$ 上是有界的，所以我們可以取

$$M > \sup_{x\in J} f(x) \quad \text{以及} \quad m < \inf_{x\in J} f(x).$$

令 $\delta > 0$ 滿足 $\delta < \frac{1}{2}\|P\|$，所以我們可以定義互斥區間 $J_i := B(x_i,\delta) \cap J$，其中 $0 \leqslant i \leqslant n$。我們定義在 J 上的連續函數 φ_- 如下：

$$\varphi_-(x) = \begin{cases} m + (M-m)\frac{|x-x_i|}{\delta} & \text{若 } x \in J_i, \\ M & \text{其他情況.} \end{cases}$$

那麼，函數 $f_- := \min(f, \varphi_-)$ 在 J 上滿足 $f_- \leqslant f$，也會是連續的。實際上，我們可以看到

- 如果 $x \neq x_i$ 對於所有 i，那麼 f 在 x 連續，而且 $f_- = \frac{1}{2}(f + \varphi_- - |f - \varphi_-|)$ 也會在 x 點連續；
- 如果 $x = x_i$ 對於某個 i，那麼 $\varphi_-(x) = m < \inf_{x \in J} f(x)$，所以我們能找到 $\varepsilon > 0$ 使得 φ_- 在 $B(x,\varepsilon)$ 上會嚴格保持在 f 之下。這代表著在 $B(x,\varepsilon)$ 上我們有 $f_- = \varphi_-$，所以我們得到 f_- 在 x 點的連續性。

再來，讓我們計算下列積分：

$$\int_J (f - f_-) = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} (f - f_-) \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{J_i} (M - m) \leqslant 2\delta n (M - m),$$

其中的等式是因為當 $x \notin J_i$ 對於所有 i，我們會有 $\varphi_-(x) = M > f(x)$，所以 $f_-(x) = f(x)$。接著我們來總結：對於 $\varepsilon > 0$，我們可以選擇 $\delta \leqslant \min\{\frac{\varepsilon}{2(M-m)n}, \frac{1}{4}\|P\|\}$，這會給我們

$$\int_J (f - f_-) \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \int_J f \leqslant \Big(\int_J f_-\Big) + \varepsilon.$$

再來我們可以使用類似的方法來構造 f_+。我們考慮在 J 上的連續函數 φ_+：

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} M - (M - m)\frac{|x - x_i|}{\delta} & \text{若 } x \in J_i, \\ m & \text{其他情況.} \end{cases}$$

然後定義 $f_+ := \max(f, \varphi_+)$。 $\square$

定理 8.5.3 【單調收斂定理】： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間。令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}_+$ 的非負、片段連續且可積函數所構成的序列。假設

(i) 對於每個 $x \in I$ 還有 $n \geqslant 1$，我們有 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$；

(ii) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到片段連續函數 f；

(iii) 當 $n \to \infty$ 時，$\int_I f_n$ 會收斂。

那麼，我們有

$$\int_I |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{以及} \quad \int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f.$$

註解 8.5.4 ： 我們注意到，這個定理與 Dini 定理（定理 8.1.14 ）非常類似，差別如下。

(1) 定理 8.5.3 中的假設比較弱，只需要片段連續性。

(2) 我們不會使用函數序列 $(f_n)_{n\geqslant}$ 的均勻收斂性來推得積分的收斂。事實上，一般來講，均勻收斂不會成立，但積分還是會收斂。

證明：這是個式 (8.26) 的特例。對於每個 $n \geqslant 1$，令 $u_n = f_{n+1} - f_n \geqslant 0$。我們可以檢查下列性質。

(i) 對於每個 $n \geqslant 1$，函數 u_n 是可積的，因為 f_{n+1} 和 f_n 皆是可積的。

(ii) $\sum u_n = \sum(f_{n+1} - f_n)$ 會逐點收斂到片段連續函數，因為 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到片段連續函數。

(iii) 我們有

$$\sum_{n=1}^{N} \int_I |u_n| = \sum_{n=1}^{N} \int_I (f_{n+1} - f_n) = \int_I f_{N+1} - \int_I f_1,$$

其中因為 $\int_I f_n$ 會收斂，右式可以被均勻的上界控制住。這證明了 $\sum \int_I |u_n|$ 會收斂。

因此，我們可以使用式 (8.26) 來總結 f 在 I 上是可積的，以及

$$\int_I |f_n - f| = \int_I \Big| \sum_{k\geqslant n} u_k \Big| \leqslant \sum_{k\geqslant n} \int_I |u_k|.$$

上面不等式的右式，會是個收斂級數的餘項，所以當 n 趨近於 ∞ 時，會收斂到 0。 □

第二小節 控制收斂定理

定理 8.5.5【控制收斂定理】： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，且 W 為 Banach 空間。令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 W 的片段連續函數序列。假設

(i) 存在非負片段連續可積函數 $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ 使得對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $\|f_n\| \leqslant \varphi$。

(ii) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到片段連續函數 $f : I \to W$。

那麼，所有的 f_n 和 f 在 I 上都是可積的，且我們有

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad 以及 \quad \lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

證明： 假設在 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$、$(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是非負函數，且 $f \equiv 0$ 是個零函數的情況下會成立。對於所有 $n \geqslant 1$，令 $h_n = \|f_n - f\|$，這還會是個在 I 上的片段連續函數。那麼 $h_n \leqslant 2\varphi$ 而且 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂至零函數。所以我們得到

$$\left\|\int_I f_n - \int_I f\right\| \leqslant \int_I \|f_n - f\| = \int_I h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I 0 = 0.$$

現在，讓我們證明在 $(W, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$、$(f_n)_{n\geqslant 1}$ 都是非負函數，而且 f 是零函數的假設之下，來證明定理。對於每個 $n \geqslant 1$ 以及 $p \geqslant n$，我們令

$$f_{n,p} := \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_p\},$$

這還是個片段連續函數，而且滿足 $f_{n,p} \leqslant \varphi$。

- 固定 $n \geqslant 1$。由於 $(f_{n,p})_{p\geqslant n}$ 是個遞增序列，序列 $(I_{n,p})_{p\geqslant n}$ 定義做 $I_{n,p} = \int_I f_{n,p}$ 是遞增的。由於對於所有 $p \geqslant n$，我們有 $I_{n,p} \leqslant \int_I \varphi$，序列 $(I_{n,p})_{p\geqslant n}$ 會收斂，所以他滿足柯西性質。我們能找到 $p_n \geqslant 1$ 使得

$$|I_{n,p} - I_{n,q}| \leqslant 2^{-n}, \quad \forall p, q \geqslant p_n.$$

  我們可以選擇 $(p_n)_{n\geqslant 1}$ 使得他是個萃取函數（嚴格遞增序列）。

- 對於 $n \geqslant 1$，令 $g_n = f_{n,p_n}$。我們注意到 g_n 會逐點收斂到 0（在 I 上的每個點，柯西準則

都會成立）。對於任意 $n \geqslant 1$，我們有

$$|g_{n+1} - g_n| + (g_{n+1} - g_n) = \begin{cases} 0 & \text{若 } g_{n+1} - g_n \leqslant 0, \\ 2(g_{n+1} - g_n) & \text{其他情況.} \end{cases}$$

此外，對於任意 $n \geqslant 1$，我們也有 $g_{n+1} - g_n = f_{n+1,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \leqslant f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}$ 以及 $0 \leqslant f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}$。因此，我們得到

$$\forall n \geqslant 1, \quad |g_{n+1} - g_n| \leqslant 2(f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}) - (g_{n+1} - g_n).$$

- 對於 $n \geqslant 1$，令 $u_n = g_n - g_{n+1}$。那麼我們有

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_I |u_n| \leqslant 2|I_{n,p_{n+1}} - I_{n,p_n}| + \int_I g_n - \int_I g_{n+1} \leqslant 2^{1-n} + \int_I g_n - \int_I g_{n+1}.$$

  對上式取和，我們會得到

$$\forall p \geqslant n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n}^{p} \int_I |u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{p} 2^{1-k} + \int_I g_n - \int_I g_{p+1} \leqslant 2 + \int_I g_n.$$

  在上面的式子中，我們看到上界並不取決於 p。由於左方級數中只有正的項，我們推得級數 $\sum_{k \geqslant n} \int_I |u_k|$ 會收斂。

從我們上面所證明的，以及 g_n 會逐點收斂到 0 的性質，我們有 $\sum_{k \geqslant n} u_k = g_n$。這讓我們可以使用式 (8.26)：

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \int_I f_n \leqslant \int_I g_n = \int_I \Big(\sum_{k \geqslant n} u_k \Big) = \sum_{k \geqslant n} \int_I u_k.$$

上式中最右邊的項會是絕對收斂級數的餘項，所以當 n 趨近於 ∞ 時，他的極限會是零。這證明了 $\int_I f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$。 □

範例 8.5.6 ： 對於每個 $n \in \mathbb{N}$，考慮函數

$$f_n : \begin{array}{ccc} (1,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \end{array} \quad \text{以及} \quad I_n = \int_1^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

我們可以檢查下列性質。

- 對於每個 $n \in \mathbb{N}$，函數 f_n 是片段連續的。
- 對於每個 $t > 1$，我們有

$$f_n(t) = \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \sim \frac{1}{t^2}, \quad \text{當 } n \to \infty.$$

  所以序列 f_n 會逐點收斂到函數 $t \mapsto \frac{1}{t^2}$，這是個在 $(1,+\infty)$ 上片段連續的函數。

- 【控制假設】對於每個 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t > 1$，我們有

$$|f_n(t)| = \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \leqslant \frac{t^n+t^n}{t^{n+2}} = \frac{2}{t^2}.$$

  函數 $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是可積的，所以控制假設會滿足。因此，我們可以使用定理 8.5.5 中的控制收斂定理，得到

$$I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1.$$

範例 8.5.7 ： 對於每個 $n \in \mathbb{N}$，考慮函數

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & n^2 t^{n-1} \end{array} \quad \text{以及} \quad I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

對於每個 $n \in \mathbb{N}$，函數 f_n 會在 $[0,1)$ 上連續且可積。對於每個 $t \in [0,1)$，我們有 $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，這蘊含序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[0,1)$ 上逐點收斂到零函數。然而，我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \left[nt^n\right]_0^1 = n.$$

這證明了極限和積分的順序是無法交換的。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

原因是因為控制假設沒有成立。

更確切來說，如果 φ 是個會比所有 f_n 都來得大的函數，那麼對於 $t \in [0,1)$，我們會有 $\varphi(t) \geqslant f_n(t)$ 對於所有 $n \geqslant 1$。特別來說，對於 $t \in [0,1)$，我們可以取 $n = \lfloor \frac{2}{|\ln t|} \rfloor$，那麼，當 $t \to 1-$ 時，我們會有下面這個關係式：

$$\begin{aligned}\ln f_n(t) &= 2\ln n + (n-1)\ln t\\ &\geqslant 2\ln\Big(\frac{2}{|\ln t|} - 1\Big) + \Big(\frac{2}{|\ln t|} - 1\Big)\ln t\\ &= -\ln t - 2\ln|\ln t| + \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

這代表著當 $t \to 1-$ 時，我們有

$$f_n(t) \geqslant \frac{\text{cst}}{t|\ln t|^2},$$

這蘊含 φ 在 $1-$ 附近不可積。

第三小節 應用：有額外參數的積分

下面是一些控制收斂定理的重要應用。讓我們考慮一般的區間 $I \subseteq \mathbb{R}$，他的端點記作 a 和 b 而且滿足 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$，以及 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$。

定理 8.5.8 【積分下的連續性】： 令 (M,d) 為賦距空間，且 $f : M \times I \to W$ 為滿足下列條件的映射。

(i) 對於每個 $x \in M$，映射 $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ 在 I 上會片段連續。

(ii) 對於每個 $t \in I$，映射 $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ 在 M 上連續。

(iii) 【控制假設】存在非負、片段連續且可積函數 $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ 使得對於所有 $x \in M$ 還有

$t \in I$，我們有 $\|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t)$。

那麼，映射

$$\begin{aligned} F: \quad M &\to \quad W \\ x &\mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

是定義良好的，且在 M 上連續。

證明：假設 (iii) 也就是控制假設，告訴我們對於每個 $x \in M$，函數 $f(x,\cdot)$ 是可積的，所以 F 是定義良好的。對給定的 $x \in M$ 來說，如果要檢查 F 在 x 連續，我們需要檢查對於任意取值在 M 中的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，我們有

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Rightarrow \quad F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x).$$

令 $x \in M$ 以及 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 為 M 中的序列滿足 $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$。對於每個 $n \geqslant 1$，我們可以定義函數

$$\begin{aligned} f_n: \quad I &\to \quad V \\ t &\mapsto f(x_n,t). \end{aligned}$$

從假設 (ii)，我們知道對於每個 $t \in I$，我們有 $f_n(t) = f(x_n,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,t)$，其中根據假設 (i)，$t \mapsto f(x,t)$ 是個片段連續函數。這代表定理 8.5.5 中的假設 (ii) 會滿足。再來，這裡的假設 (iii) 對應到的是定理 8.5.5 的假設 (i)，所以我們可以對函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 來使用定理 8.5.5 。這讓我們得到

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = F(x),$$

因此我們能總結。 □

定理 8.5.9 【積分下的可微分性】： 令 $M \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，且 $f: M \times I \to W$ 為滿足下列條件的映射。

(i) 對於每個 $x \in M$，映射 $f(x,\cdot): t \mapsto f(x,t)$ 在 I 上會片段連續且可積。

(ii) 對於每個 $t \in I$，映射 $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ 在 M 上是 $\mathcal{C}^1$ 類的。

(iii) 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 定義良好，且滿足定理 8.5.8 中的假設。

那麼，映射

$$\begin{array}{rccc} F: & M & \to & W \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

在 M 上會是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且我們有

$$\forall x \in M, \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.28}$$

證明：這個證明與定理 8.5.8 的證明相似。令 $x \in M$ 以及 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $M\backslash\{x\}$ 中的序列，且會收斂到 x。對於每個 $n \geqslant 1$，定義

$$\begin{array}{rccc} g_n: & I & \to & W, \\ & t & \mapsto & \dfrac{f(x_n,t)-f(x,t)}{x_n - x}, \end{array}$$

這會是個片段連續函數。對於每個 $n \geqslant 1$，g_n 在 I 上也會是可積的，因為他是可積函數的線性組合。

函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂至 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$。此外，中間值定理（式 (4.3)）告訴我們，對於每個 $n \geqslant 1$ 還有 $t \in I$，存在 $y_n = y_n(t)$ 介於 x 與 x_n 之間，滿足

$$g_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(x,t)}{x_n - x} = \frac{\partial f}{\partial x}(y_n,t) \quad \text{以及} \quad \|g_n(t)\| = \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(y_n,t)\right\| \leqslant \varphi(t),$$

其中 φ 是由 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 滿足定理 8.5.8 當中的假設 (iii) 所給定的。這樣一來，我們可以使用定理 8.5.5 來總結

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

然後上式左方可以重新寫成：

$$\lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)-F(x)}{x_n - x}.$$

這證明了 F 在 x 可微，且為分會滿足式 (8.28)。在最後的結論中，我們注意到假設 (iii) 保證式 (8.28) 的右方是連續的，所以 F 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。 □

範例 8.5.10 【Gamma 函數】：我們回顧範例 7.1.21 中定義的 Γ 函數：

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

透過定理 8.5.8 和定理 8.5.9 ，我們可以檢查 Γ 是個 $\mathcal{C}^\infty$ 類的函數，而且他的微分寫做：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

更確切來說，我們考慮函數

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}, (x,t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}.$$

我們能檢查下面的性質。

- 對於任意固定的 $t > 0$，函數 $x \mapsto f(x,t)$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，而且我們有

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \forall x, t > 0, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

- 對於任意固定的 $x > 0$ 還有 $k \in \mathbb{N}_0$，函數 $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ 是片段連續的。

- 【控制假設】令 $k \in \mathbb{N}_0$ 以及 $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$ 為線段。對於所有的 $x \in [a,b]$，我們有

$$\forall t \in (0,1], \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t},$$
$$\forall t \in (1,+\infty), \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t}.$$

令 φ 定義在 $\mathbb{R}_+^*$ 上，如下：

$$\varphi(t) = |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t},$$

這在 $\mathbb{R}_+^*$ 上是個可積函數。而且我們顯然會有：

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t > 0, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$