9 Fourier series

傅立葉級數

第九章

9.1 Definitions

The goal of this section is to introduce the notion of *Fourier series*, whose partial sums correspond to *trigonometric polynomials.*

9.1.1 Trigonometric polynomials

Definition 9.1.1 : Let $N \in \mathbb{N}_0$. A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is said to be a *trigonometric polynomial* (三角多項式) if it satisfies one of the following equivalent identities.

- There exists a finite sequence $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ of complex numbers such that

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}.$$

- There exists finite sequences $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ and $(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ of complex numbers such that

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Remark 9.1.2 :

(1) In Definition 9.1.1, the coefficients $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, $(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$, and $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ are related by the following relations,

$$\forall m = 0, \dots, N, \quad a_m = c_m + c_{-m}, \quad \text{and} \quad \forall m = 1, \dots, N, \quad b_m = \mathrm{i}(c_m - c_{-m}). \tag{9.1}$$

This is due to the relation $e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ for $\theta \in \mathbb{R}$.

(2) It is not hard to see that a trigonometric polynomial $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}$ is continuous and 2π-periodic. Moreover, its coefficients can be recovered by

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) e^{-\mathrm{i}\, nx}\, \mathrm{d}x.$$

Definition 9.1.3 :

- A *trigonometric series* (三角級數) is a series of functions in the variable $x \in \mathbb{R}$ of one of the

第一節 定義

這個章節的目的是介紹傅立葉級數的概念，他是由三角多項式給出的部份和所定義的。

第一小節 三角多項式

定義 9.1.1 ： 令 $N \in \mathbb{N}_0$。給定函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$。如果下面其中一個等價關係成立，則我們說 f 是個三角多項式 (trigonometric polynomial) ：

- 存在有限複數序列 $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ 滿足

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}.$$

- 存在有限複數序列 $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 以及 $(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 滿足

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

註解 9.1.2 ：

(1) 在定義 9.1.1 中，係數 $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$、$(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 與 $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ 之間滿足下列關係：

$$\forall m = 0, \dots, N, \quad a_m = c_m + c_{-m}, \quad \text{以及} \quad \forall m = 1, \dots, N, \quad b_m = \mathrm{i}(c_m - c_{-m}). \tag{9.1}$$

這可以透過關係式 $e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 對於 $\theta \in \mathbb{R}$ 來得到。

(2) 我們不難看出來，三角多項式 $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}$ 是連續且週期為 2π 的。此外，他的係數可以透過下列方式求出：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) e^{-\mathrm{i}\, nx}\, \mathrm{d}x.$$

定義 9.1.3 ：

following forms,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}, \quad \text{or} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

- A trigonometric series is said to be convergent at $x \in \mathbb{R}$ if one of the following partial sums (so both) converges,

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}nx}\right)_{N\geqslant 0}, \quad \text{or} \quad \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right)_{N\geqslant 0}. \tag{9.2}$$

Remark 9.1.4 :

(1) From the relations in Eq. (9.1), it is not hard to see that if one of the partial sums in Eq. (9.2) converges, then the other one converges.

(2) For a fixed $x \in \mathbb{R}$, the way the convergence of trigonometric series at x is defined is weaker than the existence of the double limit

$$\lim_{\substack{q\to+\infty \\ p\to-\infty}} \sum_{n=p}^{q} c_n e^{\mathrm{i}nx}.$$

Proposition 9.1.5 : *The following properties holds.*

- *If $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ and $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}$ converge absolutely, then the trigonometric series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$ converges normally on $\mathbb{R}$.*
- *If $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ and $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge absolutely, then the trigonometric series $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converges normally on $\mathbb{R}$.*

The corresponding trigonometric series defines a continuous and 2π-periodic function.

Proof : For any $x \in \mathbb{R}$, we have

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n e^{\mathrm{i}nx}| = |c_n|, \ |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|.$$

Therefore, the normal convergence follows directly. Since each of the function in the series is continuous and 2π-periodic, the same properties also hold for the series of functions. $\square$

Proposition 9.1.6 : *If the sequences $(c_n)_{n\geqslant 1}$ and $(c_{-n})_{n\geqslant 1}$ are real and decrease to 0, then*

- *the trigonometric series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$ converges pointwise on $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$; and*
- *uniformly on all the intervals $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $\alpha \in (0, \pi)$.*

- 如果一個變數為 $x \in \mathbb{R}$ 的函數級數可以寫成下列其中一個形式：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}, \quad 或 \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

則我們稱他為三角級數 (trigonometric series) 。

- 如果下面其中一個（或兩個）部份和會收斂：

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}nx}\right)_{N\geqslant 0}, \quad 或 \quad \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right)_{N\geqslant 0}, \tag{9.2}$$

則我們說三角級數在 $x \in \mathbb{R}$ 會收斂。

註解 9.1.4 ：

(1) 從式 (9.1) 當中的關係式，我們不難看出，若式 (9.2) 中其中一個部份和收斂，那另一個也收斂。

(2) 固定 $x \in \mathbb{R}$ 時，我們定義三角級數在 x 的收斂會比下面這個雙下標極限的存在性來得弱：

$$\lim_{\substack{q\to+\infty \\ p\to-\infty}} \sum_{n=p}^{q} c_n e^{\mathrm{i}nx}.$$

命題 9.1.5 ： 下面性質成立。

- 如果 $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ 和 $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}$ 絕對收斂，那麼三角級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂。
- 如果 $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ 和 $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ 絕對收斂，那麼三角級數 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ 會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂。

所對應到的三角級數會定義連續且週期為 2π 的函數。

證明：對於任意 $x \in \mathbb{R}$，我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n e^{\mathrm{i}nx}| = |c_n|, \ |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|.$$

因此，我們得到正規收斂。由於級數中的每個函數都是連續且週期為 2π 的，相同性質也會對函數級數成立。 $\square$

命題 9.1.6 ： 如果級數 $(c_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(c_{-n})_{n\geqslant 1}$ 是實數，且遞減至 0，那麼三角級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$ 會

- 在 $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ 上逐點收斂；且
- 對於所有 $k \in \mathbb{Z}$ 以及 $\alpha \in (0, \pi)$，在區間 $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ 上均勻收斂。

Proof : This is a direct consequence of the Abel's transform and the Dirichlet's test, see Proposition 6.4.5 and Theorem 6.4.7. □

9.1.2 Fourier series

In what follows, we are interested in 2π-periodic functions. In particular, let us introduce the following two vector spaces,

- $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ the space of 2π-periodic continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$; and
- $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ the space of 2π-periodic piecewise continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$.

Definition 9.1.7 : Let $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ be a 2π-periodic and piecewise continuous function on $\mathbb{R}$. Its *Fourier coefficients* are defined as below,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t,\\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\quad a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,\\ \forall n \in \mathbb{N},\quad b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The *Fourier series* corresponding to f is the trigonometric series given by

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx},\quad \text{or}\quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big).$$

In particular, we denote the n-th partial sum of the Fourier series of f by

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}kx},\quad \text{or}\quad S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$

Remark 9.1.8 :

(1) We note that the Fourier series of f and f do not necessarily define the same function. Indeed, we have not yet discussed the convergence of the Fourier series.

(2) The coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, $(a_n(f))_{n\geqslant 0}$, and $(b_n(f))_{n\geqslant 1}$ are related in the same way as in Eq. (9.1).

(3) Since f is 2π-periodic, we may change the domain of integration to any interval of length 2π.

(4) If f is an even function, then the coefficients $b_n(f)$ are zero; if f is an odd function, then the coefficients $a_n(f)$ are zero.

In what follows, we will write the trigonometric series and Fourier series using the exponential functions instead of trigonometric functions. The two writings are equivalent, but the former one is more compact and easier to write.

證明：這是 Abel 變換和 Dirichlet 檢測法的直接結果，見命題 6.4.5 以及定理 6.4.7 。 □

第二小節 傅立葉級數

接下來，我們有興趣的是週期為 2π 的函數。特別來說，我們會引進下面兩個向量空間：

- $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 是週期為 2π，由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$ 的連續函數所構成的空間；以及
- $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 是週期為 2π，由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$ 的片段連續函數所構成的空間。

定義 9.1.7 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。我們定義他的傅立葉係數如下：

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t,\\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\quad a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,\\ \forall n \in \mathbb{N},\quad b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

f 所對應到的傅立葉級數會是下面的三角級數：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx},\quad \text{或}\quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big).$$

我們可以把 f 所對應到的傅立葉級數的第 n 個部份和記作：

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}kx},\quad \text{或}\quad S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big).$$

註解 9.1.8 ：

(1) 我們注意到，f 的傅立葉級數和 f 未必定義出相同的函數。實際上，我們還沒有討論傅立葉級數的收歛性。

(2) 係數 $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$、$(a_n(f))_{n\geqslant 0}$ 以及 $(b_n(f))_{n\geqslant 1}$ 滿足與式 (9.1) 當中相同的關係式。

(3) 由於 f 的週期為 2π，我們可以積分區間改成任意長度為 2π 的區間。

(4) 如果 f 是個偶函數，那麼係數 $b_n(f)$ 為零；如果 f 為奇函數，那麼係數 $a_n(f)$ 為零。

接下來，我們會使用指數函數而不是三角函數來記三角級數以及傅立葉級數。兩種寫法是等價的，但是前者寫起來比較精簡且容易。

Proposition 9.1.9 : *If $f(x) = \sum c_n e^{\mathrm{i}\,nx}$ is a trigonometric series that converges uniformly on $\mathbb{R}$, then $c_n = c_n(f)$ for all $n \in \mathbb{Z}$.*

Proof : If a series of functions converges uniformly, then its integral on any segment also converges, and can be computed term by term, see Proposition 8.2.5. Additionally, we know that

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \mathbb{1}_{k=0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

This allows us to conclude that

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n.$$

□

9.1.3 Kernels and convolution

The partial sums of a Fourier series can be rewritten using a *convolution* between the function itself and the Dirichlet's kernel.

Definition 9.1.10 (Dirichlet's kernel) **:** For $n \in \mathbb{N}_0$, we define

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{9.3}$$

The sequence of functions $(D_n)_{n\geqslant 0}$ is called *Dirichlet's kernel.*

Remark 9.1.11 : The last equality in Eq. (9.3) can be obtained by a geometric summation,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = e^{-\mathrm{i}\,nt}\frac{e^{\mathrm{i}(2n+1)t}-1}{e^{\mathrm{i}\,t}-1} = \frac{e^{\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t}}{e^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Below are some properties of the Dirichlet's kernel. They can be checked by direct computations.

Proposition 9.1.12 : *The Dirichlet's kernel $(D_n)_{n\geqslant 0}$ satisfies the following properties.*

(1) *For each $n \geqslant 0$, the function D_n is even.*

(2) *For each $n \geqslant 0$, the function D_n is 2π-periodic.*

(3) *For each $n \geqslant 0$, we have $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.*

命題 9.1.9 ： 如果 $f(x) = \sum c_n e^{\mathrm{i}\,nx}$ 是個三角級數且在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂，那麼對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，我們有 $c_n = c_n(f)$。

證明：如果一個函數級數均勻收斂，那麼他在任何線段上的積分也會收斂，而且可以一項一項做計算，見命題 8.2.5 。此外，我們知道

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \mathbb{1}_{k=0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

這讓我們可以總結

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n.$$

□

第三小節 核與捲積

傅立葉級數的部份和可以寫成函數自己與 Dirichlet 核的捲積。

定義 9.1.10 【Dirichlet 核】**：** 對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們定義

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{9.3}$$

函數序列 $(D_n)_{n\geqslant 0}$ 稱作*Dirichlet 核*。

註解 9.1.11 ： 式 (9.3) 中的最後一個等式，可以透過幾何級數求和得到：

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = e^{-\mathrm{i}\,nt}\frac{e^{\mathrm{i}(2n+1)t}-1}{e^{\mathrm{i}\,t}-1} = \frac{e^{\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t}}{e^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

下面是幾個 Dirichlet 核的性質，他們可以藉由直接運算來檢查。

命題 9.1.12 ： Dirichlet 核 $(D_n)_{n\geqslant 0}$ 滿足下列性質。

(1) 對於每個 $n \geqslant 0$，函數 D_n 是個偶函數。

(2) 對於每個 $n \geqslant 0$，函數 D_n 是週期為 2π 的。

(3) 對於每個 $n \geqslant 0$，我們有 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$。

Definition 9.1.13 : For two 2π-periodic and piecewise continuous functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, we define their *convolution* (捲積) , denoted $f \star g$, as below,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.4}$$

Below are some properties of the convolution that can be checked easily.

Proposition 9.1.14 : *For 2π-periodic and piecewise continuous functions $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, the following properties hold.*

(1) *(Linearity) For $\lambda \in \mathbb{C}$, we have $f \star (g + \lambda h) = f \star g + \lambda(f \star h)$.*

(2) *(Commutativity) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.*

(3) *(Symmetry) $f \star g = g \star f$.*

We may rewrite the partial sums of a Fourier series using convolution.

Proposition 9.1.15 : *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a 2π-periodic and piecewise continuous function on $\mathbb{R}$. Then, $S_n(f) = D_n \star f$ for every $n \in \mathbb{N}_0$.*

Proof : Let $n \in \mathbb{N}_0$. We write the n-th partial sum of the Fourier series $\sum c_n(f)e^{\mathrm{i}\,nx}$ as below,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t\right)e^{\mathrm{i}\,kx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,k(x-t)}\right)\mathrm{d}t = (D_n \star f)(x). \end{aligned}$$

□

9.2 Quadratic properties

The most important result of this section is the Parseval's identity (Theorem 9.2.7). Before discussing this result, we are going to see the quadratic structure that arises naturally from the way the Fourier series is defined, which is a *pre-Hilbert space*.

9.2.1 Pre-Hilbert spaces

Pre-Hilbert spaces generalize the notion of Euclidean spaces from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$, and from finite-dimensional spaces to infinite-dimensional spaces.

定義 9.1.13 ： 對於兩個週期為 2π 且片段連續的函數 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，我們定義他們的捲積 (convolution) ，記作 $f \star g$，如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.4}$$

下面是幾個關於捲積的性質，不難檢查。

命題 9.1.14 ： 對於週期為 2π 且片段連續函數 $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，下列性質成立。

(1) 【線性】對於 $\lambda \in \mathbb{C}$，我們有 $f \star (g + \lambda h) = f \star g + \lambda(f \star h)$。

(2) 【可交換性】$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$。

(3) 【對稱性】$f \star g = g \star f$。

我們可以把傅立葉級數的部份和使用捲積來改寫。

命題 9.1.15 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。那麼，對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有 $S_n(f) = D_n \star f$。

證明： 令 $n \in \mathbb{N}_0$。我們把傅立葉級數 $\sum c_n(f)e^{\mathrm{i}\,nx}$ 的第 n 個部份和寫做：

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t\right)e^{\mathrm{i}\,kx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,k(x-t)}\right)\mathrm{d}t = (D_n \star f)(x). \end{aligned}$$

□

第二節 二次性質

這個章節最重要的結果是 Parseval 恆等式（定理 9.2.7 ）。討論這個結果之前，我們會先討論在定義傅立葉級數時，會自然出現的二次結構，也就是準 *Hilbert* 空間。

第一小節 準 Hilbert 空間

準 Hilbert 空間推廣了歐式空間的概念，從 $\mathbb{R}$ 推廣到 $\mathbb{C}$，把有限維度空間推廣到無窮維度空間。

Definition 9.2.1 : Let V be a $\mathbb{K}$-vector space where $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. A bilinear form $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{K}$ is an *inner product* (內積) if it satisfies

(i) (Positive definiteness) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ with equality if and only if $x=0$.

(ii) (Conjugate symmetry) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ for all $x,y\in V$.

(iii) (Linearity) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ for all $a,b\in\mathbb{R}$ and $x,y,z\in V$.

If $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is an inner product, then it induces a norm (so a distance) given by

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle},\quad \forall x\in V.$$

Then, the normed space $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ is called a *pre-Hilbert space*. Additionally, if this normed space is complete, it is called a *Hilbert space*. This generalizes the notion of inner product and Euclidean spaces defined in Definition 2.1.10.

Definition 9.2.2 : Let us denote by $\mathcal{D}$ the vector space consisting of functions in $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ satisfying

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}\big[f(x-)+f(x+)\big]. \tag{9.5}$$

We define the following inner product on $\mathcal{D}$,

$$(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{9.6}$$

Then, $\mathcal{D}$ is a pre-Hilbert space equipped with the norm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ for $f\in\mathcal{D}$. We note that $(e_n : x\mapsto e^{\mathrm{i}nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ is a family of orthonormal functions in $\mathcal{D}$ with respect to the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ defined above.

Remark 9.2.3 :

(1) We note that $\mathcal{D}$ contains 2π-periodic continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$, that is $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})\subseteq\mathcal{D}$.

(2) The main reason why we require the condition Eq. (9.5) for the functions in the space $\mathcal{D}$ is to ensure that Eq. (9.6) satisfies the definiteness. Actually, it is not hard to see that a function $f\in\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ that only has finitely many non-zero points satisfies $\langle f,f\rangle=0$. In order to talk about a normed vector space, we refer to the space $\mathcal{D}$; but in Section 9.2.2, we will see that the Parseval's identity holds for more general functions.

Proposition 9.2.4 : *For $n\in\mathbb{N}_0$, let $\mathcal{P}_n=\operatorname{Span}(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ be the linear span of $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$, and write p_n for the orthogonal projection on $\mathcal{P}_n$. For any fixed $n\in\mathbb{N}_0$, the following properties are satisfied.*

(1) We have $\mathcal{P}_n\oplus\mathcal{P}_n^{\perp}=\mathcal{D}$, and the orthogonal projection p_n gives the n-th partial sum of the Fourier

定義 9.2.1 ： 令 V 為在 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量空間。給定雙線性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{K}$，如果他滿足下列性質，則我們說他是個內積 (inner product) ：

(i) 【正定性】$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，且等號成立若且唯若 $x=0$。

(ii) 【共軛對稱性】$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ 對於所有 $x,y\in V$。

(iii) 【線性】$\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ 對於所有 $a,b\in\mathbb{R}$ 及 $x,y,z\in V$。

如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是個內積，則他會誘導出範數（所以也是距離），定義做：

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle},\quad \forall x\in V.$$

我們把賦範空間 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 稱作準 *Hilbert* 空間。此外，如果這個賦範空間是完備的，我們把他稱作 *Hilbert* 空間。這推廣了在定義 2.1.10 當中所定義的內積以及歐式空間的概念。

定義 9.2.2 ： 我們把 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 當中，且滿足

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}\big[f(x-)+f(x+)\big] \tag{9.5}$$

的函數所構成的向量空間記做 $\mathcal{D}$。我們在 $\mathcal{D}$ 上面定義下面這個內積：

$$(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{9.6}$$

那麼，$\mathcal{D}$ 在配上範數 $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ 對於 $f\in\mathcal{D}$ 時，是個準 Hilbert 空間。我們注意到 $(e_n : x\mapsto e^{\mathrm{i}nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是個在 $\mathcal{D}$ 中，對於內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的正交函數族。

註解 9.2.3 ：

(1) 我們注意到，$\mathcal{D}$ 包含了由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$，週期為 2π 的連續函數，換句話說 $\mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})\subseteq\mathcal{D}$。

(2) 對於 $\mathcal{D}$ 中的函數，我們需要要求條件式 (9.5) 的主要原因是，我們需要確保式 (9.6) 會滿足定性。其實，我們不難看出來，對於只有有限個非零點的函數 $f\in\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$，他會滿足 $\langle f,f\rangle=0$。如果想要討論賦範向量空間，我們會考慮空間 $\mathcal{D}$；但在第 9.2.2 小節中，我們會看到 Parseval 恆等式對於更一般的函數也是成立的。

命題 9.2.4 ： 對於 $n\in\mathbb{N}_0$，令 $\mathcal{P}_n=\operatorname{Span}(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 為 $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 的線性生成空間，並把在 $\mathcal{P}_n$ 上的正交投影記做 p_n。對於任意固定的 $n\in\mathbb{N}_0$，下面性質成立。

series,

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = S_n(f).$$

(2) We have

$$\inf_{g \in \mathcal{P}_n} \|f-g\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2. \tag{9.7}$$

Proof :

(1) Let us fix $f \in \mathcal{D}$ and $n \in \mathbb{N}_0$. We note that for any $-n \leqslant k \leqslant n$, we have $c_k(f) = \langle e_k, f\rangle = \langle e_k, S_n(f)\rangle$, so $\langle e_k, f - S_n(f)\rangle = 0$. Since $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ spans $\mathcal{P}_n$, it means that $f - S_n(f) \in \mathcal{P}_n^\perp$. We may write $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$ with $S_n(f) \in \mathcal{P}_n$, so we conclude that $f \in \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^\perp$. Therefore, we have $\mathcal{D} = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^\perp$. It remains to check that $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_n^\perp = \{0\}$. Let $g = \sum_{k=-n}^{n} g_k e_k \in \mathcal{P}_n^\perp$, then we find $g_k = \langle e_k, g\rangle = 0$ for all $-n \leqslant k \leqslant n$. This means that $g_k = 0$ for $-n \leqslant k \leqslant n$, that is $g = 0$.

(2) From above, we know that $S_n(f) = p_n(f)$. Since $S_n(f) \perp (f - S_n(f))$, we have $\|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$, which shows the second equality in Eq. (9.7). Moreover, for any $g \in \mathcal{P}_n$, we have

$$\|f-g\|_2^2 = \|(f - S_n(f)) + (S_n(f) - g)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - g\|_2^2 \geqslant \|f - S_n(f)\|_2^2,$$

which shows the first equality in Eq. (9.7). □

Remark 9.2.5 :

(1) The first equality in Eq. (9.7) shows that the partial sum $S_n(f)$ is the best approximation of f in terms of quadratic variation among the trigonometric polynomials of degree less than or equal to n.

(2) Eq. (9.7) shows that for $f \in \mathcal{D}$, we have

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

This implies the convergence of the series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ and the following relation, called *Bessel's inequality*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

(1) 我們有 $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp = \mathcal{D}$，而且正交投影 p_n 給我們傅立葉級數第 n 項部份和：

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = S_n(f).$$

(2) 我們有

$$\inf_{g \in \mathcal{P}_n} \|f-g\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2. \tag{9.7}$$

證明：

(1) 讓我們固定 $f \in \mathcal{D}$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$。我們注意到，對於任意 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們有 $c_k(f) = \langle e_k, f\rangle = \langle e_k, S_n(f)\rangle$，所以 $\langle e_k, f - S_n(f)\rangle = 0$。由於 $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 線性生成 $\mathcal{P}_n$，這代表著 $f - S_n(f) \in \mathcal{P}_n^\perp$。我們可以寫 $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$，其中 $S_n(f) \in \mathcal{P}_n$，因此我們總結 $f \in \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^\perp$。所以我們有 $\mathcal{D} = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^\perp$。再來我們只需要檢查 $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_n^\perp = \{0\}$。令 $g = \sum_{k=-n}^{n} g_k e_k \in \mathcal{P}_n^\perp$，那麼對於所有 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們可以得到 $g_k = \langle e_k, g\rangle = 0$。這代表著對於 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們有 $g_k = 0$，也就是說 $g = 0$。

(2) 從上面的證明，我們知道 $S_n(f) = p_n(f)$。由於 $S_n(f) \perp (f - S_n(f))$，我們得到 $\|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$，這剛好就是式 (9.7) 中的第二個等式。此外，對於任意 $g \in \mathcal{P}_n$，我們有

$$\|f-g\|_2^2 = \|(f - S_n(f)) + (S_n(f) - g)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - g\|_2^2 \geqslant \|f - S_n(f)\|_2^2,$$

這證明了式 (9.7) 中的第一個等式。□

註解 9.2.5 ：

(1) 式 (9.7) 中的第一個等式告訴我們，在所有次數小於或等於 n 的三角多項式裡面，從二次變差的角度來看，部份和 $S_n(f)$ 是對 f 最好的近似。

(2) 式 (9.7) 證明了，對於 $f \in \mathcal{D}$，我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

這蘊含級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ 的收斂，以及下列關係式，稱作*Bessel 不等式*：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Corollary 9.2.6 : *Let $\mathcal{P} = \mathrm{Span}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be the vector space of trigonometric polynomials. For $f \in \mathcal{D}$, we have*

$$\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

9.2.2 Parseval's identity

Parseval's identity is a result about L^2-isometry, see Remark 9.2.8 for a more detailed discussion.

Theorem 9.2.7 (Parseval's identity) **:** *Let $f \in \mathcal{PC}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ be a 2π-periodic and piecewise continuous function. Then, the series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$, and $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n(f)|^2$ converge and we have*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t. \quad (9.8)$$

Proof : Let $f \in \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. We may modify the value of f at finitely many points to make it become a function in $\mathcal{D}$, without changing its Fourier coefficients $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ and the integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$. Let us denote this modification by f.

From Corollary 9.2.6, it is sufficient to show that $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = 0$. Let $\varepsilon > 0$. A similar construction as in the proof of Lemma 8.5.2 gives us a 2π-periodic continuous function g such that $\|f-g\|_2 \leqslant \varepsilon$. Then, the Stone–Weierstraß theorem (Example 8.4.7 (3)) gives us a trigonometric polynomial $h \in \mathcal{P}$ such that $\|g-h\|_2 \leqslant \varepsilon$. As a consequence, we find $\|f-g\|_2 \leqslant 2\varepsilon$, so $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 \leqslant 4\varepsilon^2$. Since $\varepsilon > 0$ can be taken to be arbitrarily small, we can conclude. □

Remark 9.2.8 :

(1) Let us define the space $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ as below,

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \Big\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} < +\infty\Big\},$$

equipped with the inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$\forall a,b \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \quad \langle a,b\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\overline{b_n}.$$

It is not hard to check that $(\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is a pre-Hilbert space. A similar approach as in Exercise 3.30 shows that this space is complete, so is a Hilbert space.

(2) The above Parseval's identity states that the Fourier mapping

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

系理 9.2.6 ： 令 $\mathcal{P} = \mathrm{Span}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 為三角多項式構成的向量空間。對於 $f \in \mathcal{D}$，我們有

$$\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

第二小節 Parseval 恆等式

Parseval 恆等式是個 L^2 等距性質的結果，我們在註解 9.2.8 中會做更細部的討論。

定理 9.2.7 【Parseval 恆等式】 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 為週期為 2π 且片段連續的函數。那麼，級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$、$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n(f)|^2$ 收斂，且我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t. \quad (9.8)$$

證明： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$。我們可以改變 f 在有限多個點的值，把他變成 $\mathcal{D}$ 中的函數，這並不會改變傅立葉係數 $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ 以及積分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ 的值。我們把修改過得函數一樣記作 f。

從系理 9.2.6 ，我們只需要證明 $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = 0$。令 $\varepsilon > 0$。我們可以使用與引理 8.5.2 證明中類似的手法，來構造週期為 2π 的連續函數 g，且滿足 $\|f-g\|_2 \leqslant \varepsilon$。再來，透過 Stone–Weierstraß 定理（範例 8.4.7 (3)），我們能找到三角多項式 $h \in \mathcal{P}$ 使得 $\|g-h\|_2 \leqslant \varepsilon$。我們的結論是，我們有 $\|f-g\|_2 \leqslant 2\varepsilon$，所以 $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 \leqslant 4\varepsilon^2$。由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得證。 □

註解 9.2.8 ：

(1) 我們定義空間 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 如下：

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \Big\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} < +\infty\Big\},$$

並賦予他內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：

$$\forall a,b \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \quad \langle a,b\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\overline{b_n}.$$

我們不難檢查 $(\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是個預 Hilbert 空間。使用與習題 3.30 類似的方式，我們能證明這個空間是完備的，所以是個 Hilbert 空間。

(2) 上面的 Parseval 恆等式告訴我們，傅立葉映射

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

is an isometry (Definition 2.5.16) when restricted on the image. More precisely, the space $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ is isometric to a subspace of $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, which is given by the image of $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ under $\mathcal{F}$. This is the reason why we sometimes refer to this result as "L^2-isometry" property for the Fourier series.

(3) If we look at Eq. (9.8), its right side is well defined for any square-integrable functions, that is functions $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ such that the following integral exists in the sense of Lebesgue (not discussed in our lecture),
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$
The collection of such functions is denoted by $L^2([0,2\pi])$. In fact, the Parseval's identity holds for all such functions.

(4) Additionally, the Riesz–Fischer theorem shows that $L^2([0,2\pi])$ is complete, so is a Hilbert space. As a direct consequence, the Fourier mapping $\mathcal{F}$ defined on $L^2([0,2\pi])$ is a bijection, which implies that $\mathcal{F}$ is an isometry betwteen $L^2([0,2\pi])$ and $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Corollary 9.2.9 : *Let $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ be a 2π-periodic and piecewise continuous function. The Parseval's identity (Theorem 9.2.7) gives readily following consequences.*

(1) We have $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$.

(2) If $c_n(f) = 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$, then $f \equiv 0$.

Remark 9.2.10 : The Riemann–Lebesgue lemma states that,
$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0,$$
where the variable n is a real number. However, the result in Corollary 9.2.9 (1) needs n to be restricted on integers.

9.3 Convergence results

We remind that for a given function $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, its Fourier series is just a formal definition, and is not necessarily equal to the function f itself, see Remark 9.1.8. In this section, we are going to discuss two convergence results, the Jordan–Dirichlet theorem in Section 9.3.1 and the Fejér's theorem in Section 9.3.2.

9.3.1 Jordan–Dirichlet theorem

The Jordan–Dirichlet theorem gives a sufficient condition for the Fourier series to converge pointwise. In particular, it leads to a result for periodic piecewise $\mathcal{C}^1$ functions, see Corollary 9.3.2; and a stronger result for periodic, continuous, and piecewise $\mathcal{C}^1$ functions, see Theorem 9.3.4.

在被限制在他的像上面時，是個等距變換（定義 2.5.16 ）。更確切來說，空間 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 會和 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 的一個子空間是等距同構的，這個子空間是由 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{F}$ 之下的像所給出的。這就是我們有時候會把這個結果稱作是傳立葉級數「L^2 等距」性質的原因。

(3) 如果我們看式 (9.8)，他的右式對於任意平方可積函數都是有定義的，換句話說，對於 $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ 使得下列積分在 Lebesgue 的意義下（這門課不討論）存在：
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$
由這些函數所構成的集合記作 $L^2([0,2\pi])$。事實上，Parseval 恆等式對於這些函數都會是對的。

(4) 此外，Riesz–Fischer 定理可以證明 $L^2([0,2\pi])$ 是完備的，所以是個 Hilbert 空間。這可以給我們一個直接結果，也就是傳立葉映射 $\mathcal{F}$ 定義在 $L^2([0,2\pi])$ 上時，是個雙射函數，這蘊含 $\mathcal{F}$ 是個介於 $L^2([0,2\pi])$ 與 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 之間的等距變換。

系理 9.2.9 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 為週期為 2π 且片段連續的函數。Parseval 恆等式（定理 9.2.7 ）可以直接給我們下列結果。

(1) 我們有 $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$。

(2) 如果對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，我們有 $c_n(f) = 0$，那麼 $f \equiv 0$。

註解 9.2.10 ： Riemann–Lebesgue 引理的敘述如下：
$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0,$$
其中變數 n 是個實數。然而，系理 9.2.9 (1) 中的結果需要 n 被限制在整數上。

第三節 收斂結果

我們不要忘記，在給定函數 $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 時，他的傳立葉級數只是個形式上的定義而已，並不一定會等於函數 f 自己，見註解 9.1.8 。在這個小節中，我們會討論兩個收斂結果，第 9.3.1 小節中的 Jordan–Dirichlet 定理以及 第 9.3.2 小節 中的 Fejér 定理。

第一小節 Jordan–Dirichlet 定理

Jordan–Dirichlet 定理給我們傳立葉級數逐點收斂的充分條件。特別來說，這給我們一個關於有週期性且片段 $\mathcal{C}^1$ 函數的結果，見系理 9.3.2 ；以及強一點的，關於有週期性、連續，且片段 $\mathcal{C}^1$ 函數的結果，見定理 9.3.4 。

Theorem 9.3.1 (Jordan–Dirichlet theorem) **:** *Let $f \in \mathcal{PC}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ be a 2π-periodic and piecewise continuous function on $\mathbb{R}$. Let $t_0 \in \mathbb{R}$ be such that*

$$h \mapsto \frac{1}{h}\big[f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0+) - f(t_0+)\big] \tag{9.9}$$

is bounded around 0. Then the following series converges and satisfies

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}\,nt_0} = \frac{1}{2}\big[f(t_0+) + f(t_0-)\big].$$

Proof : Up to the translation $t \mapsto t+t_0$, we may assume that $t_0 = 0$. For $n \in \mathbb{N}_0$, let $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$ and $u_n = s_n - \frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)]$. We need to show that $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

For $n \in \mathbb{N}$, we have

$$2\pi s_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

where D_n is the Dirichlet's kernel defined in Definition 9.1.10. Use the parity of D_n from Proposition 9.1.12 (1), we deduce that

$$2\pi s_n = \int_0^{\pi} \big[f(t) + f(-t)\big]D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

Moreover, Proposition 9.1.12 (3) allows us to write

$$\pi\big[f(0+) + f(0-)\big] = \int_0^{\pi} \big[f(0+) + f(0-)\big]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

By defining

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad g(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\big[f(t) + f(-t) - f(0+) - f(0-)\big],$$

we find

$$2\pi u_n = \int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{9.10}$$

We note that g is piecewise continuous on $(0, 2\pi)$ and bounded around 0 by the assumption in Eq. (9.9), so g is integrable on $(0, 2\pi)$. Then, it is not hard to see[1] from Corollary 9.2.9 (1) that the right side of Eq. (9.10) goes to 0 when $n \to \infty$. □

Corollary 9.3.2 : *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a 2π-periodic and piecewise C^1 function on $\mathbb{R}$[2]. Then for every $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}\,nx} = \frac{1}{2}\big[f(x+) + f(x-)\big].$$

[1] We need the Riemann–Lebesgue lemma for half-integers. We can either apply a more general result from Remark 9.2.10 that we did not prove, or adapt the result from Corollary 9.2.9 (1) by writing $\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) = \sin t\cos(\frac{t}{2}) + \cos t\sin(\frac{t}{2})$.

定理 9.3.1 【Jordan–Dirichlet 定理】**：** 令 $f \in \mathcal{PC}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 為在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。令 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$h \mapsto \frac{1}{h}\big[f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0+) - f(t_0+)\big] \tag{9.9}$$

在 0 附近有界。那麼下列級數會收斂且滿足

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}\,nt_0} = \frac{1}{2}\big[f(t_0+) + f(t_0-)\big].$$

證明：藉由平移變換 $t \mapsto t+t_0$，我們可以假設 $t_0 = 0$。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$ 以及 $u_n = s_n - \frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)]$。我們需要證明 $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

對於 $n \in \mathbb{N}$，我們有

$$2\pi s_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\mathrm{i}\,kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 D_n 是定義 9.1.10 中所定義的 Dirichlet 核。使用命題 9.1.12 (1) 中提到的關於 D_n 的奇偶性，我們推得

$$2\pi s_n = \int_0^{\pi} \big[f(t) + f(-t)\big]D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

此外，命題 9.1.12 (3) 讓我們可以寫

$$\pi\big[f(0+) + f(0-)\big] = \int_0^{\pi} \big[f(0+) + f(0-)\big]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

藉由定義

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad g(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\big[f(t) + f(-t) - f(0+) - f(0-)\big],$$

我們得到

$$2\pi u_n = \int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{9.10}$$

我們注意到，g 是個在 $(0, 2\pi)$ 上片段連續的函數；再根據式 (9.9) 中的假設，他在 0 附近是有界的，所以 g 在 $(0, 2\pi)$ 上可積。再來，我們不難看出[1]，系理 9.2.9 (1) 告訴我們式 (9.10) 的右式會在 $n \to \infty$ 時趨近於 0。□

系理 9.3.2 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段 C^1 的函數[2]。那麼對於每個

[1] 我們需要半整數版本的 Riemann–Lebesgue 引理。我們有兩種方法：可以直接使用註解 9.2.10 中我們沒證明，而且更一般的結果；或是把系理 9.2.9 (1) 的結果拿來使用，這個情況下，我們需要改寫 $\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) = \sin t\cos(\frac{t}{2}) + \cos t\sin(\frac{t}{2})$。

In particular, if f is continuous at x, then

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx} = f(x).$$

Proof : Let $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ such that for every $1 \leqslant k \leqslant m$, f can be extended by continuity into a $\mathcal{C}^1$ function on $[x_{k-1}, x_k]$, this means that f' is continuous on $[x_{k-1}, x_k]$. Therefore, the function defined in Eq. (9.9) is bounded for every $t_0 \in \mathbb{R}$. So the result follows directly from Theorem 9.3.1. ☐

Lemma 9.3.3 : *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a 2π-periodic, continuous, and piecewise $\mathcal{C}^1$ function on $\mathbb{R}$. Define $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ by*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{if } f \text{ is differentiable at } t, \\ \frac{1}{2}(f'(t+) + f'(t-)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, the Fourier coefficients satisfy $c_n(\varphi) = \mathrm{i}nc_n(f)$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

Proof : Let $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ such that for every $1 \leqslant k \leqslant m$, f can be extended by continuity into a $\mathcal{C}^1$ function on $[x_{k-1}, x_k]$. Let us fix $n \in \mathbb{Z}$. For $1 \leqslant k \leqslant m$, an integration by parts gives

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\Big]_{t=x_{k-1}}^{x_k} + \mathrm{i}n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

By taking a summation over $1 \leqslant k \leqslant m$, we find

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\Big]_{t=0}^{2\pi} + \mathrm{i}n\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

In other words,

$$c_n(\varphi) = \mathrm{i}nc_n(f).$$

☐

Theorem 9.3.4 : *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a 2π-periodic, continuous, and piecewise $\mathcal{C}^1$ function on $\mathbb{R}$. Then the Fourier series of f converges normally to f on $\mathbb{R}$.*

[2] The definition is similar to that of piecewise continuous functions in Definition 7.1.1. We say that $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is a piecewise $\mathcal{C}^1$ function if there exist $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ such that for every $1 \leqslant k \leqslant m$, f is $\mathcal{C}^1$ on (x_{k-1}, x_k), and can be extended by continuity to $[x_{k-1}, x_k]$ into a $\mathcal{C}^1$ function.

$x \in \mathbb{R}$，我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

特別來說，如果 f 在 x 點連續，那麼我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx} = f(x).$$

證明： 令 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant m$，函數 f 可以藉由連續性拓延成在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數，這代表著 f' 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上連續。因此，式 (9.9) 中所定義的函數對於每個 $t_0 \in \mathbb{R}$ 來說都是有界的。因此這是定理 9.3.1 的直接結果。 ☐

引理 9.3.3 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π、連續且片段 $\mathcal{C}^1$ 的函數。定義 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 如下：

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{若 } f \text{ 在 } t \text{ 點是可微的,} \\ \frac{1}{2}(f'(t+) + f'(t-)) & \text{其他情況.} \end{cases}$$

那麼，對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，傅立葉級數會滿足 $c_n(\varphi) = \mathrm{i}nc_n(f)$。

證明： 令 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ 使得對於所有 $1 \leqslant k \leqslant m$，$f$ 可以藉由連續性來延拓成 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數。讓我們固定 $n \in \mathbb{Z}$。對於 $1 \leqslant k \leqslant m$，分部積分會給我們

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\Big]_{t=x_{k-1}}^{x_k} + \mathrm{i}n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

藉由對於 $1 \leqslant k \leqslant m$ 取和，我們得到

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\Big]_{t=0}^{2\pi} + \mathrm{i}n\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

換句話說

$$c_n(\varphi) = \mathrm{i}nc_n(f).$$

☐

定理 9.3.4 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π、連續且片段 $\mathcal{C}^1$ 的函數。那麼，f 的傅立葉級數會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂到 f。

[2] 這與在定義 7.1.1 中片段連續函數的定義相似。給定函數 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，如果存在 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant m$，$f$ 在 (x_{k-1}, x_k) 上是 $\mathcal{C}^1$ 的，且可以藉由連續性拓延到 $[x_{k-1}, x_k]$ 上變成 $\mathcal{C}^1$ 函數，則我們說他是個片段 $\mathcal{C}^1$ 函數。

Proof : Let us define φ as in Lemma 9.3.3, then it follows that $c_n(\varphi) = \mathrm{i}\,nc_n(f)$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Then, we may apply the AM–GM inequality to find

$$\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad |c_n(f)| = \left|\frac{c_n(\varphi)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(|c_n(\varphi)|^2 + \frac{1}{n^2}\Big).$$

The Parseval's identity (Theorem 9.2.7) implies the convergence of $\sum |c_n(\varphi)|^2$, from which we deduce that $\sum |c_n(f)|$ converges. Then, Proposition 9.1.5 implies that the Fourier series of f converges normally, and Corollary 9.3.2 shows that the Fourier series is equal to f. □

9.3.2 Fejér's theorem

Fejér's theorem states that a periodic continuous function can be approximate uniformly by the Cesàro means of the partial sums of its corresponding Fourier series.

Definition 9.3.5 (Fejér's kernel) **:** We define the Fejér's kernel via the Dirichlet's kernel introduced in Definition 9.1.10. For $n \in \mathbb{N}_0$, we define

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{9.11}$$

The sequence $(F_n)_{n\geqslant 0}$ is called *Fejér's kernel.*

Proposition 9.3.6 : *The Fejér's kernel satisfies the following properties.*

(1) *For $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in \mathbb{R}$, we have $F_n(x) \geqslant 0$.*

(2) *For $n \in \mathbb{N}_0$, we have $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.*

(3) *For any fixed $\delta > 0$, we have*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proof : The first two properties are easy to check. Indeed, they follow directly from the properties of the Dirichlet's kernel, see Proposition 9.1.12. Let us check (3). For a fixed $\delta > 0$, we observe that

$$\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

證明： 讓我們以引理 9.3.3 中的方式來定義 φ，那麼對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，我們有 $c_n(\varphi) = \mathrm{i}\,nc_n(f)$。接著，我們可以使用算幾不等式來得到

$$\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad |c_n(f)| = \left|\frac{c_n(\varphi)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(|c_n(\varphi)|^2 + \frac{1}{n^2}\Big).$$

Parseval 恆等式（定理 9.2.7）蘊含 $\sum |c_n(\varphi)|^2$ 的收斂性，從這個我們可以推得 $\sum |c_n(f)|$ 會收斂。再來，命題 9.1.5 蘊含 f 的傅立葉級數會正規收斂，然後系理 9.3.2 告訴我們這個傅立葉級數與 f 相等。□

第二小節 Fejér 定理

Fejér 定理說的是，有週期性的連續函數可以被他傅立葉級數部份和的 Cesàro 平均來均勻逼近。

定義 9.3.5 【Fejér 核】**：** 我們透過定義 9.1.10 中引進的 Dirichlet 核來定義 Fejér 核。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們定義

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{9.11}$$

序列 $(F_n)_{n\geqslant 0}$ 稱作*Fejér 核*。

命題 9.3.6 ： Fejér 核會滿足下列性質。

(1) 對於 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $x \in \mathbb{R}$，我們有 $F_n(x) \geqslant 0$。

(2) 對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$。

(3) 對於任意固定的 $\delta > 0$，我們有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

證明： 前面兩個性質是容易檢查的。他們可以直接從 Dirichlet 核的性質直接得到，見命題 9.1.12。讓我們來檢查 (3)。對於固定的 $\delta > 0$，我們觀察到：

$$\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Theorem 9.3.7 (Fejér's theorem) **:** *Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ be a 2π-periodic and continuous function on $\mathbb{R}$. For $n\in\mathbb{N}_0$, let*

$$S_n(f): x\mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}\,kx},\qquad \sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

Then, the sequence of functions $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 0}$ converges uniformly to f on $\mathbb{R}$.

Remark 9.3.8 :

(1) We note that the sequence $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ consists of Cesàro means of the sequence $(S_n(f))_{n\geqslant 0}$.

(2) This is a constructive proof of the Stone–Weierstraß theorem in the case of trigonometric polynomials, see Example 8.4.7 (3).

Proof : We are going to rewrite $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 0}$ using the Fejér's kernel, and the properties in Proposition 9.3.6. Given $n\geqslant 0$ and $x\in\mathbb{R}$. We may write

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(D_n\star f)(x)=(F_n\star f)(x).$$

Then,

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,\mathrm{d}t-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Let us fix $\varepsilon>0$. Using the continuity of f on $[-\pi,\pi]$, we know that it is uniformly continuous and bounded. We choose $\delta>0$ such that for $x,y\in[-\pi,\pi]$, the condition $|x-y|\leqslant\delta$ implies $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$; and $M>0$ such that $\|f\|_\infty\leqslant M$. Then, we find

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x)-f(x)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}|f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}F_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\varepsilon+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The above inequality does not depend on $x\in\mathbb{R}$, so we have

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant\varepsilon+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

By taking $\limsup$ for $n\to\infty$, we find

$$\limsup_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$

Since this inequality holds for any arbitrary $\varepsilon>0$, we deduce that $\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_\infty=0$. □

定理 9.3.7 【Fejér 定理】**：** 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 的連續函數。對於 $n\in\mathbb{N}_0$，令

$$S_n(f): x\mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}\,kx},\qquad \sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

那麼，函數序列 $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 0}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂至 f。

註解 9.3.8 ：

(1) 我們注意到，序列 $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ 是由序列 $(S_n(f))_{n\geqslant 0}$ 的 Cesàro 平均所構成的。

(2) 這是個在三角多項式情況下，以構造法證明 Stone–Weierstraß 定理的方法，見範例 8.4.7 (3)。

證明：我們會把 $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 0}$ 透過 Fejér 核來改寫，並且使用命題 9.3.6 中的性質。給定 $n\geqslant 0$ 以及 $x\in\mathbb{R}$。我們可以寫

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(D_n\star f)(x)=(F_n\star f)(x).$$

那麼

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,\mathrm{d}t-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

讓我們固定 $\varepsilon>0$。使用 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的連續性，我們知道他是均勻連續且有界的。讓我們選 $\delta>0$ 使得對於 $x,y\in[-\pi,\pi]$，條件 $|x-y|\leqslant\delta$ 蘊含 $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$；以及 $M>0$ 使得 $\|f\|_\infty\leqslant M$。我們有

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x)-f(x)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}|f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}F_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\varepsilon+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上面不等式並不取決於 $x\in\mathbb{R}$，因此我們有

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant\varepsilon+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

對於 $n\to\infty$ 取 $\limsup$，我們得到

$$\limsup_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$

由於不等式對於任意 $\varepsilon>0$ 都成立，我們推得 $\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_\infty=0$。 □

Remark 9.3.9 : We note that in the proof of Féjer's theorem, we used the properties of the Fejér's kernel stated in Proposition 9.3.6, and did not rely on the exact form of $(F_n)_{n\geqslant 0}$. In particular, a kernel $(F_n)_{n\geqslant 0}$ satisfying the properties in Proposition 9.3.6 is called an *approximate identity*, and for such a kernel, we can apply the same proof to show that $F_n \star f$ converges uniformly to f on $\mathbb{R}$.

註解 9.3.9 ： 我們注意到在 Féjer 定理的證明中，我們使用了命題 9.3.6 當中所提到，關於 Fejér 核的性質，並沒有使用到 $(F_n)_{n\geqslant 0}$ 的確切形式。實際上，任何滿足命題 9.3.6 中性質的核 $(F_n)_{n\geqslant 0}$，我們會把他稱作逼近單位元，而且對於這樣的核，我們可以使用相同的證明，來得到 $F_n \star f$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂到 f 的結果。