第九章 傅立葉級數

第一節 定義

這個章節的目的是介紹傅立葉級數的概念，他是由三角多項式給出的部份和所定義的。

第一小節 三角多項式

定義 9.1.1 ： 令 $N \in \mathbb{N}_0$。給定函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$。如果下面其中一個等價關係成立，則我們說 f 是個三角多項式 (trigonometric polynomial) ：

- 存在有限複數序列 $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ 滿足
$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}.$$
- 存在有限複數序列 $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ 以及 $(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 滿足
$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

註解 9.1.2 ：

(1) 在定義 9.1.1 中，係數 $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$、$(b_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 與 $(c_n)_{-N \leqslant n \leqslant N}$ 之間滿足下列關係：
$$\forall m = 0, \ldots, N, \quad a_m = c_m + c_{-m}, \quad \text{以及} \quad \forall m = 1, \ldots, N, \quad b_m = \mathrm{i}(c_m - c_{-m}). \tag{9.1}$$
這可以透過關係式 $e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 對於 $\theta \in \mathbb{R}$ 來得到。

(2) 我們不難看出來，三角多項式 $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\, nx}$ 是連續且週期為 2π 的。此外，他的係數

可以透過下列方式求出：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)e^{-\mathrm{i}\,nx}\,\mathrm{d}x.$$

定義 9.1.3 ：

- 如果一個變數為 $x \in \mathbb{R}$ 的函數級數可以寫成下列其中一個形式：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}\,nx}, \quad \text{或} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)),$$

  則我們稱他為<u>三角級數</u> (trigonometric series) 。

- 如果下面其中一個（或兩個）部份和會收斂：

$$\Big(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathrm{i}\,nx}\Big)_{N\geqslant 0}, \quad \text{或} \quad \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\Big)_{N\geqslant 0}, \tag{9.2}$$

  則我們說三角級數在 $x \in \mathbb{R}$ 會收斂。

註解 9.1.4 ：

(1) 從式 (9.1) 當中的關係式，我們不難看出，若式 (9.2) 中其中一個部份和收斂，那另一個也收斂。

(2) 固定 $x \in \mathbb{R}$ 時，我們定義三角級數在 x 的收斂會比下面這個雙下標極限的存在性來得弱：

$$\lim_{\substack{q\to+\infty \\ p\to-\infty}} \sum_{n=p}^{q} c_n e^{\mathrm{i}\,nx}.$$

命題 9.1.5 ： 下面性質成立。

- 如果 $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ 和 $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}$ 絕對收斂，那麼三角級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}\,nx}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂。

- 如果 $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ 和 $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ 絕對收斂，那麼三角級數 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ 會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂。

所對應到的三角級數會定義連續且週期為 2π 的函數。

證明：對於任意 $x \in \mathbb{R}$，我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n e^{\mathrm{i}nx}| = |c_n|, \ |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|.$$

因此，我們得到正規收斂。由於級數中的每個函數都是連續且週期為 2π 的，相同性質也會對函數級數成立。 □

命題 9.1.6 ： 如果級數 $(c_n)_{n\geqslant 1}$ 和 $(c_{-n})_{n\geqslant 1}$ 是實數，且遞減至 0，那麼三角級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$ 會

- 在 $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ 上逐點收斂；且
- 對於所有 $k \in \mathbb{Z}$ 以及 $\alpha \in (0, \pi)$，在區間 $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ 上均勻收斂。

證明：這是 Abel 變換和 Dirichlet 檢測法的直接結果，見命題 6.4.5 以及定理 6.4.7 。 □

第二小節 傅立葉級數

接下來，我們有興趣的是週期為 2π 的函數。特別來說，我們會引進下面兩個向量空間：

- $\mathcal{C}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 是週期為 2π，由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$ 的連續函數所構成的空間；以及
- $\mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 是週期為 2π，由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$ 的片段連續函數所構成的空間。

定義 9.1.7 ： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。我們定義他的

傅立葉係數如下：

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{Z},\quad c_n(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t,\\ \forall n\in\mathbb{N}_0,\quad a_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad b_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

f 所對應到的傅立葉級數會是下面的三角級數：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{\mathrm{i}nx},\quad\text{或}\quad\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\big).$$

我們可以把 f 所對應到的傅立葉級數的第 n 個部份和記作：

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e^{\mathrm{i}kx},\quad\text{或}\quad S_n(f)(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\big).$$

註解 9.1.8 ：

(1) 我們注意到，f 的傅立葉級數和 f 未必定義出相同的函數。實際上，我們還沒有討論傅立葉級數的收斂性。

(2) 係數 $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$、$(a_n(f))_{n\geqslant 0}$ 以及 $(b_n(f))_{n\geqslant 1}$ 滿足與式 (9.1) 當中相同的關係式。

(3) 由於 f 的週期為 2π，我們可以積分區間改成任意長度為 2π 的區間。

(4) 如果 f 是個偶函數，那麼係數 $b_n(f)$ 為零；如果 f 為奇函數，那麼係數 $a_n(f)$ 為零。

接下來，我們會使用指數函數而不是三角函數來記三角級數以及傅立葉級數。兩種寫法是等價的，但是前者寫起來比較精簡且容易。

命題 9.1.9 ： 如果 $f(x)=\sum c_ne^{\mathrm{i}nx}$ 是個三角級數且在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂，那麼對於所有 $n\in\mathbb{Z}$，我們有 $c_n=c_n(f)$。

證明： 如果一個函數級數均勻收斂，那麼他在任何線段上的積分也會收斂，而且可以一項一項做計算，見命題 8.2.5 。此外，我們知道

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \mathbb{1}_{k=0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

這讓我們可以總結

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n.$$ □

第三小節　核與捲積

傅立葉級數的部份和可以寫成函數自己與 Dirichlet 核的捲積。

定義 9.1.10 【Dirichlet 核】： 對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們定義

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{9.3}$$

函數序列 $(D_n)_{n\geqslant 0}$ 稱作*Dirichlet 核*。

註解 9.1.11 ： 式 (9.3) 中的最後一個等式，可以透過幾何級數求和得到：

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}\,kt} = e^{-\mathrm{i}\,nt}\frac{e^{\mathrm{i}(2n+1)t}-1}{e^{\mathrm{i}\,t}-1} = \frac{e^{\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{2n+1}{2}t}}{e^{\mathrm{i}\,\frac{t}{2}} - e^{-\mathrm{i}\,\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

下面是幾個 Dirichlet 核的性質，他們可以藉由直接運算來檢查。

命題 9.1.12 ： Dirichlet 核 $(D_n)_{n\geqslant 0}$ 滿足下列性質。

(1) 對於每個 $n \geqslant 0$，函數 D_n 是個偶函數。

(2) 對於每個 $n \geqslant 0$，函數 D_n 是週期為 2π 的。

(3) 對於每個 $n \geqslant 0$，我們有 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$。

定義 9.1.13 ： 對於兩個週期為 2π 且片段連續的函數 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，我們定義他們的<u>捲積</u> (convolution) ，記作 $f \star g$，如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.4}$$

下面是幾個關於捲積的性質，不難檢查。

命題 9.1.14 ： 對於週期為 2π 且片段連續函數 $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，下列性質成立。

(1) 【線性】對於 $\lambda \in \mathbb{C}$，我們有 $f \star (g + \lambda h) = f \star g + \lambda(f \star h)$。

(2) 【可交換性】$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$。

(3) 【對稱性】$f \star g = g \star f$。

我們可以把傅立葉級數的部份和使用捲積來改寫。

命題 9.1.15 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。那麼，對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有 $S_n(f) = D_n \star f$。

證明：令 $n \in \mathbb{N}_0$。我們把傅立葉級數 $\sum c_n(f)e^{\mathrm{i}nx}$ 的第 n 個部份和寫做：

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right)e^{\mathrm{i}kx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}k(x-t)}\right)\mathrm{d}t = (D_n \star f)(x). \end{aligned}$$

□

第二節 二次性質

這個章節最重要的結果是 Parseval 恆等式（定理 9.2.7）。討論這個結果之前，我們會先討論在定義傅立葉級數時，會自然出現的二次結構，也就是準 *Hilbert* 空間。

第一小節 準 Hilbert 空間

準 Hilbert 空間推廣了歐式空間的概念，從 $\mathbb{R}$ 推廣到 $\mathbb{C}$，把有限維度空間推廣到無窮維度空間。

定義 9.2.1： 令 V 為在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量空間。給定雙線性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$，如果他滿足下列性質，則我們說他是個內積 (inner product)：

(i) 【正定性】$\langle x, x \rangle \geqslant 0$，且等號成立若且唯若 $x = 0$。

(ii) 【共軛對稱性】$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ 對於所有 $x, y \in V$。

(iii) 【線性】$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ 對於所有 $a, b \in \mathbb{R}$ 及 $x, y, z \in V$。

如果 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是個內積，則他會誘導出範數（所以也是距離），定義做：

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in V.$$

我們把賦範空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 稱作準 *Hilbert* 空間。此外，如果這個賦範空間是完備的，我們把他稱作 *Hilbert* 空間。這推廣了在定義 2.1.10 當中所定義的內積以及歐式空間的概念。

定義 9.2.2： 我們把 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 當中，且滿足

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] \tag{9.5}$$

的函數所構成的向量空間記做 $\mathcal{D}$。我們在 $\mathcal{D}$ 上面定義下面這個內積：

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t. \tag{9.6}$$

那麼，$\mathcal{D}$ 在配上範數 $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ 對於 $f \in \mathcal{D}$ 時，是個準 Hilbert 空間。我們注意到 $(e_n : x \mapsto e^{\mathrm{i}nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是個在 $\mathcal{D}$ 中，對於內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的正交函數族。

註解 9.2.3 ：

(1) 我們注意到，$\mathcal{D}$ 包含了由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{C}$，週期為 2π 的連續函數，換句話說 $\mathcal{C}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{D}$。

(2) 對於 $\mathcal{D}$ 中的函數，我們需要要求條件式 (9.5) 的主要原因是，我們需要確保式 (9.6) 會滿足定性。其實，我們不難看出來，對於只有有限個非零點的函數 $f \in \mathcal{PC}_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$，他會滿足 $\langle f, f\rangle = 0$。如果想要討論賦範向量空間，我們會考慮空間 $\mathcal{D}$；但在第 9.2.2 小節中，我們會看到 Parseval 恆等式對於更一般的函數也是成立的。

命題 9.2.4 ： 對於 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $\mathcal{P}_n = \mathrm{Span}(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 為 $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 的線性生成空間，並把在 $\mathcal{P}_n$ 上的正交投影記做 p_n。對於任意固定的 $n \in \mathbb{N}_0$，下面性質成立。

(1) 我們有 $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^{\perp} = \mathcal{D}$，而且正交投影 p_n 給我們傅立葉級數第 n 項部份和：

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = S_n(f).$$

(2) 我們有

$$\inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f-g\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2. \tag{9.7}$$

證明：

(1) 讓我們固定 $f \in \mathcal{D}$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$。我們注意到，對於任意 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們有 $c_k(f) = \langle e_k, f\rangle = \langle e_k, S_n(f)\rangle$，所以 $\langle e_k, f - S_n(f)\rangle = 0$。由於 $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ 線性生成 $\mathcal{P}_n$，這代表著 $f - S_n(f) \in \mathcal{P}_n^{\perp}$。我們可以寫 $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$，其中 $S_n(f) \in \mathcal{P}_n$，因此我們總結 $f \in \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^{\perp}$。所以我們有 $\mathcal{D} = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n^{\perp}$。再來我們只需要檢查 $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_n^{\perp} = \{0\}$。令 $g = \sum_{k=-n}^{n} g_k e_k \in \mathcal{P}_n^{\perp}$，那麼對於所有 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們可以得到 $g_k = \langle e_k, g\rangle = 0$。

這代表著對於 $-n \leqslant k \leqslant n$，我們有 $g_k = 0$，也就是說 $g = 0$。

(2) 從上面的證明，我們知道 $S_n(f) = p_n(f)$。由於 $S_n(f) \perp (f - S_n(f))$，我們得到 $\|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$，這剛好就是式 (9.7) 中的第二個等式。此外，對於任意 $g \in \mathcal{P}_n$，我們有

$$\|f-g\|_2^2 = \|(f - S_n(f)) + (S_n(f) - g)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f) - g\|_2^2 \geqslant \|f - S_n(f)\|_2^2,$$

這證明了式 (9.7) 中的第一個等式。 □

註解 9.2.5 ：

(1) 式 (9.7) 中的第一個等式告訴我們，在所有次數小於或等於 n 的三角多項式裡面，從二次變差的角度來看，部份和 $S_n(f)$ 是對 f 最好的近似。

(2) 式 (9.7) 證明了，對於 $f \in \mathcal{D}$，我們有

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

這蘊含級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ 的收斂，以及下列關係式，稱作*Bessel 不等式*：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

系理 9.2.6 ： 令 $\mathcal{P} = \mathrm{Span}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 為三角多項式構成的向量空間。對於 $f \in \mathcal{D}$，我們有

$$\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

第二小節 Parseval 恆等式

Parseval 恆等式是個 L^2 等距性質的結果，我們在註解 9.2.8 中會做更細部的討論。

定理 9.2.7 【Parseval 恆等式】：令 $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 為週期為 2π 且片段連續的函數。那麼，級數 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$、$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n(f)|^2$ 收斂，且我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t. \tag{9.8}$$

證明：令 $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$。我們可以改變 f 在有限多個點的值，把他變成 $\mathcal{D}$ 中的函數，這並不會改變傅立葉係數 $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ 以及積分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ 的值。我們把修改過得函數一樣記作 f。

從系理 9.2.6 ，我們只需要證明 $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 = 0$。令 $\varepsilon > 0$。我們可以使用與引理 8.5.2 證明中類似的手法，來構造週期為 2π 的連續函數 g，且滿足 $\|f-g\|_2 \leqslant \varepsilon$。再來，透過 Stone–Weierstraß 定理（範例 8.4.7 (3)），我們能找到三角多項式 $h \in \mathcal{P}$ 使得 $\|g-h\|_2 \leqslant \varepsilon$。我們的結論是，我們有 $\|f-g\|_2 \leqslant 2\varepsilon$，所以 $\inf_{g\in\mathcal{P}} \|f-g\|_2^2 \leqslant 4\varepsilon^2$。由於 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我們得證。 □

註解 9.2.8 ：

(1) 我們定義空間 $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ 如下：

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \Big\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2} < +\infty\Big\},$$

並賦予他內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：

$$\forall a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad \langle a, b\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}.$$

我們不難檢查 $(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是個預 Hilbert 空間。使用與習題 3.30 類似的方式，我們能證明這個空間是完備的，所以是個 Hilbert 空間。

(2) 上面的 Parseval 恆等式告訴我們，傅立葉映射

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

在被限制在他的像上面時，是個等距變換（定義 2.5.16）。更確切來說，空間 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 會和 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 的一個子空間是等距同構的，這個子空間是由 $\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{F}$ 之下的像所給出的。這就是我們有時候會把這個結果稱作是傅立葉級數「L^2 等距」性質的原因。

(3) 如果我們看式 (9.8)，他的右式對於任意平方可積函數都是有定義的，換句話說，對於 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ 使得下列積分在 Lebesgue 的意義下（這門課不討論）存在：

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

由這些函數所構成的集合記作 $L^2([0,2\pi])$。事實上，Parseval 恆等式對於這些函數都會是對的。

(4) 此外，Riesz–Fischer 定理可以證明 $L^2([0,2\pi])$ 是完備的，所以是個 Hilbert 空間。這可以給我們一個直接結果，也就是傅立葉映射 $\mathcal{F}$ 定義在 $L^2([0,2\pi])$ 上時，是個雙射函數，這蘊含 $\mathcal{F}$ 是個介於 $L^2([0,2\pi])$ 與 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 之間的等距變換。

系理 9.2.9： 令 $f\in\mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 為週期為 2π 且片段連續的函數。Parseval 恆等式（定理 9.2.7）可以直接給我們下列結果。

(1) 我們有 $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$。

(2) 如果對於所有 $n\in\mathbb{Z}$，我們有 $c_n(f)=0$，那麼 $f\equiv 0$。

註解 9.2.10： Riemann–Lebesgue 引理的敘述如下：

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0,$$

其中變數 n 是個實數。然而，系理 9.2.9 (1) 中的結果需要 n 被限制在整數上。

第三節 收斂結果

我們不要忘記，在給定函數 $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 時，他的傅立葉級數只是個形式上的定義而已，並不一定會等於函數 f 自己，見註解 9.1.8 。在這個小節中，我們會討論兩個收斂結果，第 9.3.1 小節中的 Jordan–Dirichlet 定理以及 第 9.3.2 小節 中的 Fejér 定理。

第一小節 Jordan–Dirichlet 定理

Jordan–Dirichlet 定理給我們傅立葉級數逐點收斂的充分條件。特別來說，這給我們一個關於有週期性且片段 $\mathcal{C}^1$ 函數的結果，見系理 9.3.2 ；以及強一點的，關於有週期性、連續，且片段 $\mathcal{C}^1$ 函數的結果，見定理 9.3.4 。

定理 9.3.1 【Jordan–Dirichlet 定理】： 令 $f \in \mathcal{PC}_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 為在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段連續的函數。令 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$h \mapsto \frac{1}{h}\big[f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0+) - f(t_0+)\big] \tag{9.9}$$

在 0 附近有界。那麼下列級數會收斂且滿足

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{\mathrm{i}nt_0} = \frac{1}{2}\big[f(t_0+) + f(t_0-)\big].$$

證明： 藉由平移變換 $t \mapsto t + t_0$，我們可以假設 $t_0 = 0$。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$ 以及 $u_n = s_n - \frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)]$。我們需要證明 $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。

對於 $n \in \mathbb{N}$，我們有

$$2\pi s_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 D_n 是定義 9.1.10 中所定義的 Dirichlet 核。使用命題 9.1.12 (1) 中提到的關於 D_n 的奇偶

性，我們推得

$$2\pi s_n = \int_0^\pi [f(t)+f(-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

此外，命題 9.1.12 (3) 讓我們可以寫

$$\pi[f(0+)+f(0-)] = \int_0^\pi [f(0+)+f(0-)]D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

藉由定義

$$\forall t\in(0,2\pi),\quad g(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}[f(t)+f(-t)-f(0+)-f(0-)],$$

我們得到

$$2\pi u_n = \int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t. \tag{9.10}$$

我們注意到，g 是個在 $(0,2\pi)$ 上片段連續的函數；再根據式 (9.9) 中的假設，他在 0 附近是有界的，所以 g 在 $(0,2\pi)$ 上可積。再來，我們不難看出[1]，系理 9.2.9 (1) 告訴我們式 (9.10) 的右式會在 $n\to\infty$ 時趨近於 0。 □

系理 9.3.2：令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 且片段 $\mathcal{C}^1$ 的函數[2]。那麼對於每個 $x\in\mathbb{R}$，我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)].$$

特別來說，如果 f 在 x 點連續，那麼我們有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nx} = f(x).$$

[1]我們需要半整數版本的 Riemann–Lebesgue 引理。我們有兩種方法：可以直接使用註解 9.2.10 中我們沒證明，而且更一般的結果；或是把系理 9.2.9 (1) 的結果拿來使用，這個情況下，我們需要改寫 $\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}t\right) = \sin t\cos(\frac{t}{2})+\cos t\sin(\frac{t}{2})$。

[2]這與在定義 7.1.1 中片段連續函數的定義相似。給定函數 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果存在 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ 使得對於每個 $1\leqslant k\leqslant m$，f 在 (x_{k-1},x_k) 上是 $\mathcal{C}^1$ 的，且可以藉由連續性拓延到 $[x_{k-1},x_k]$ 上變成 $\mathcal{C}^1$ 函數，則我們說他是個片段 $\mathcal{C}^1$ 函數。

證明： 令 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ 使得對於每個 $1 \leqslant k \leqslant m$，函數 f 可以藉由連續性拓延成在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數，這代表著 f' 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上連續。因此，式 (9.9) 中所定義的函數對於每個 $t_0 \in \mathbb{R}$ 來說都是有界的。因此這是定理 9.3.1 的直接結果。 □

引理 9.3.3 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π、連續且片段 $\mathcal{C}^1$ 的函數。定義 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 如下：

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{若 } f \text{ 在 } t \text{ 點是可微的,} \\ \frac{1}{2}(f'(t+) + f'(t-)) & \text{其他情況.} \end{cases}$$

那麼，對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，傅立葉級數會滿足 $c_n(\varphi) = \mathrm{i} n c_n(f)$。

證明： 令 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 2\pi$ 使得對於所有 $1 \leqslant k \leqslant m$，$f$ 可以藉由連續性來延拓成 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數。讓我們固定 $n \in \mathbb{Z}$。對於 $1 \leqslant k \leqslant m$，分部積分會給我們

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(t) e^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t = \Big[f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \Big]_{t=x_{k-1}}^{x_k} + \mathrm{i}n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t.$$

藉由對於 $1 \leqslant k \leqslant m$ 取和，我們得到

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t = \Big[f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \Big]_{t=0}^{2\pi} + \mathrm{i}n \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t.$$

換句話說

$$c_n(\varphi) = \mathrm{i} n c_n(f).$$

□

定理 9.3.4 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π、連續且片段 $\mathcal{C}^1$ 的函數。那麼，f 的傅立葉級數會在 $\mathbb{R}$ 上正規收斂到 f。

證明： 讓我們以引理 9.3.3 中的方式來定義 φ，那麼對於所有 $n \in \mathbb{Z}$，我們有 $c_n(\varphi) = \mathrm{i} n c_n(f)$。

接著，我們可以使用算幾不等式來得到

$$\forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \quad |c_n(f)| = \left| \frac{c_n(\varphi)}{n} \right| \leqslant \frac{1}{2} \left(|c_n(\varphi)|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Parseval 恆等式（定理 9.2.7 ）蘊含 $\sum |c_n(\varphi)|^2$ 的收斂性，從這個我們可以推得 $\sum |c_n(f)|$ 會收斂。再來，命題 9.1.5 蘊含 f 的傳立葉級數會正規收斂，然後系理 9.3.2 告訴我們這個傳立葉級數與 f 相等。 □

第二小節 Fejér 定理

Fejér 定理說的是，有週期性的連續函數可以被他傳立葉級數部份和的 Cesàro 平均來均勻逼近。

定義 9.3.5 【Fejér 核】 ：我們透過定義 9.1.10 中引進的 Dirichlet 核來定義 Fejér 核。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們定義

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2. \tag{9.11}$$

序列 $(F_n)_{n \geqslant 0}$ 稱作*Fejér 核*。

命題 9.3.6 ：Fejér 核會滿足下列性質。

(1) 對於 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $x \in \mathbb{R}$，我們有 $F_n(x) \geqslant 0$。

(2) 對於 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) \, \mathrm{d}x = 1$。

(3) 對於任意固定的 $\delta > 0$，我們有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} F_n(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

證明： 前面兩個性質是容易檢查的。他們可以直接從 Dirichlet 核的性質直接得到，見命題 9.1.12 。讓我們來檢查 (3)。對於固定的 $\delta > 0$，我們觀察到：

$$\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1} \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

定理 9.3.7 【Fejér 定理】： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 為定義在 $\mathbb{R}$ 上，週期為 2π 的連續函數。對於 $n \in \mathbb{N}_0$，令

$$S_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{\mathrm{i}\,kx}, \quad \sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

那麼，函數序列 $(\sigma_n(f))_{n \geqslant 0}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂至 f。

註解 9.3.8 ：

(1) 我們注意到，序列 $(\sigma_n(f))_{n \geqslant 1}$ 是由序列 $(S_n(f))_{n \geqslant 0}$ 的 Cesàro 平均所構成的。

(2) 這是個在三角多項式情況下，以構造法證明 Stone–Weierstraß 定理的方法，見範例 8.4.7 (3)。

證明： 我們會把 $(\sigma_n(f))_{n \geqslant 0}$ 透過 Fejér 核來改寫，並且使用命題 9.3.6 中的性質。給定 $n \geqslant 0$ 以及 $x \in \mathbb{R}$。我們可以寫

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (D_n \star f)(x) = (F_n \star f)(x).$$

那麼

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

讓我們固定 $\varepsilon > 0$。使用 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的連續性，我們知道他是均勻連續且有界的。讓我們選 $\delta > 0$ 使得對於 $x, y \in [-\pi, \pi]$，條件 $|x - y| \leqslant \delta$ 蘊含 $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$；以及 $M > 0$ 使得

$\|f\|_\infty \leqslant M$。我們有

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} |f(x-t) - f(x)| F_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} |f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} F_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上面不等式並不取決於 $x \in \mathbb{R}$，因此我們有

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

對於 $n \to \infty$ 取 $\limsup$，我們得到

$$\limsup_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

由於不等式對於任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，我們推得 $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$。 □

註解 9.3.9 ： 我們注意到在 Féjer 定理的證明中，我們使用了命題 9.3.6 當中所提到，關於 Fejér 核的性質，並沒有使用到 $(F_n)_{n\geqslant 0}$ 的確切形式。實際上，任何滿足命題 9.3.6 中性質的核 $(F_n)_{n\geqslant 0}$，我們會把他稱作逼近單位元，而且對於這樣的核，我們可以使用相同的證明，來得到 $F_n \star f$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂到 f 的結果。