第一章 ：可數集合

習題 1.1 ： 令 $f:[0,\infty)\to[0,1)$ 為函數，定義作對於所有 $x\geqslant 0$，我們有 $f(x)=\frac{x}{x+1}$。

(1) 證明 f 是個雙射函數，並找出他的反函數 f^{-1}。

(2) 對正整數 $n\geqslant 1$，求合成函數 $f_n(x)=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 項}}(x)$ 以及他的像 $f_n([0,+\infty))$。

習題 1.2 ： 考慮下面的雙曲函數 $\sinh,\cosh$ 及 $\tanh$，定義做

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \text{以及}\quad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(1) 求各個雙曲函數的像。

(2) 證明 $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\cosh:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to[1,\infty)$ 以及 $\tanh:\mathbb{R}\to(-1,1)$ 為雙射函數。

(3) 求 (2) 中雙射函數的反函數。

習題 1.3 ： 令 $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 為單位圓。對於任意 $a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$，我們定義

$$f_a(z)=\frac{z+\overline{a}}{1+az},\quad \forall z\in\mathbb{U}.$$

我們固定 $a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$。

(1) 證明 f_a 定義良好。

(2) 證明 f_a 是個雙射函數並求他的反函數。

習題 1.4 ： 令 $f:S\to T$ 為函數。證明若且唯若對於所有 $A\in\mathcal{P}(S)$，我們有 $f(A^c)=f(A)^c$，則 f 是個雙射函數。

習題 1.5 ： 令 S 為集合，A,B 為 S 的子集合。定義函數

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(S) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B). \end{array}$$

(1) 證明若且唯若 $A\cup B=S$，則 f 為單射函數。

(2) 證明若且唯若 $A\cap B=\varnothing$，則 f 是個滿射函數。

(3) 請找出關於 A 及 B 的充分且必要條件，使得 f 會是個雙射函數。求他的反函數。

習題 1.6 ： 令 S 及 T 為兩個集合，以及 $f: S \to T$ 為函數。

(1) 證明對於 $A \in \mathcal{P}(S)$，我們有 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$。

(2) 證明對於 $B \in \mathcal{P}(T)$，我們有 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$。

(3) 在上面兩個問題中，我們是否會有等式？

習題 1.7 【Cantor–Schröder–Bernstein 定理】： 給定兩個集合 S 及 T。假設存在兩個單射函數 $f: S \to T$ 以及 $g: T \to S$。我們的目的是構造一個 S 與 T 之間的雙射函數。令

$$A_0 = S \backslash g(T), \qquad A_{n+1} = (g \circ f)(A_n), \quad \forall n \geqslant 0,$$
$$B = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n, \qquad C = S \backslash B.$$

(1) 我們先來定義函數 $\varphi: S \to T$。

  (a) 證明對於 $x \in C$，存在唯一的 $z \in T$ 使得 $x = g(z)$。我們記 $\varphi(x) = z$。

  (b) 對於 $x \in B$，我們記 $\varphi(x) = f(x)$。證明 $\varphi: S \to T$ 是定義良好的。

(2) 我們要來證明 φ 是單射的。

  (a) 證明 $\varphi_{|B}$ 以及 $\varphi_{|C}$ 是單射函數。

  (b) 令 $x \in C$ 及 $y \in B$ 滿足 $\varphi(x) = \varphi(y)$。證明 $x = (g \circ f)(y)$。

  (c) 由此推得 φ 是單射函數。

(3) 證明 φ 是滿射函數。

(4) 令 $S = \mathbb{N}$ 及 $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$。考慮 $f: n \mapsto n$ 以及 $g: n \mapsto n + 10$。對於 $n \geqslant 0$，求集合 A_n, B 及 C，還有函數 φ。

習題 1.8 ： 令 X_1, X_2, Y_1, Y_2 為集合且滿足 $X_1 \sim Y_1$ 及 $X_2 \sim Y_2$。證明 $X_1 \times X_2 \sim Y_1 \times Y_2$。

習題 1.9 【問題 1.4.6 】： 請給出由圖 1.1 所代表的編號方式，所對應到的從 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}^2$ 的雙射函數。

習題 1.10 ： 令 $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ 為由只有有限非零項構成的整數序列，數學上會這樣表示：

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \text{存在 } N \geqslant 1 \text{ 使得 } a_n = 0 \text{ 對於所有 } n \geqslant N\}.$$

證明 $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ 是可數的。

習題 1.11：令 A 及 B 為兩個集合。

(1) 證明若且唯若 A 包含無窮可數的子集合，則 A 是個無窮集合。

(2) 假設 A 可數且 B 無限，證明存在 $A \cup B$ 與 B 之間的雙射函數。為什麼不一定存在 $A \cup B$ 與 A 之間的雙射函數呢？

習題 1.12：若 $S \subseteq \mathbb{R}$ 是可數的，證明存在實數 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $(a+S) \cap S = \varnothing$。

習題 1.13：證明 $(0,1)$ 及 $(0,1]$ 為等勢集合，並且構造他們之間的任意雙射函數。（提示：或許可以從習題 1.7 的步驟中找到靈感。）

習題 1.14：令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 函數所構成的函數序列。令 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定義如下：

$$f(n) = f_n(n) + 1, \quad \forall n \geqslant 1.$$

(1) 證明對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $f_n \neq f$。

(2) 證明所有由 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函數所構成的集合並非可數集合。

習題 1.15：令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為非遞減函數。我們將函數 f 的不連續點所構成的集合記為 D。

(1) 令 $a < b$ 及 $I = (a,b)$。證明 $D \cap (a,b)$ 是個可數集合。

(2) 由此推得 D 也是個可數集合。

習題 1.16：令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為凸函數，也就是說，對於任意 $x \in \mathbb{R}$ 函數

$$y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

在 $\mathbb{R}\backslash\{x\}$ 是非遞減的。令 D 為由 f 的可微分點所構成的集合。證明 $\mathbb{R}\backslash D$ 為可數集合。（提示：使用 習題 1.15 。）

習題 1.17：給定函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。對於 $x \in \mathbb{R}$，如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(y) > f(x),$$

則我們說 f 在 x 取嚴格局部最大值。證明下列集合是可數的：

$$\{x \in \mathbb{R} : f \text{ 在 } x \text{ 取局部最大值 }\}.$$

習題 1.18 ： 令 V 為有理數 $\mathbb{Q}$ 上的向量空間。

(1) 假設 V 的維度是有限的。證明 V 是無窮可數的。

(2) 令 $\mathbb{Q}[X]$ 為有理係數多項式所構成的集合，也就是說

$$\mathbb{Q}[X] = \Big\{ \sum_{n=0}^{N} a_n X^n : a_n \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant n \leqslant N, N \geqslant 0 \Big\}.$$

證明 $\mathbb{Q}[X]$ 是無窮可數的。

如果一實數 x 是某多項式 $P \in \mathbb{Q}[X]$ 的其中一個根，則我們稱他為代數數 (algebraic number)；否則我們稱他為超越數 (transcendental number)。

(3) 證明存在超越數 $x \in \mathbb{R}$。

習題 1.19 ： 給定實數序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$。令 $a_1 = u_1 + 1$ 以及 $b_1 = u_1 + 2$，滿足 $u_1 \notin [a_1, b_1]$。

(1) 假設對於整數 $n \geqslant 1$，我們有 $a_n < b_n$ 且 $u_n \notin [a_n, b_n]$。考慮 $c_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n)$ 及 $d_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n)$。證明我們能從集合 $\{a_n, c_n, d_n, b_n\}$ 中選擇 a_{n+1} 及 b_{n+1}，使得

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \tfrac{1}{3}(b_n - a_n) \quad \text{且} \quad u_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n].$$

(2) 考慮上面所構造出來的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 及 $(b_n)_{n\geqslant 1}$，證明 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 是個非遞減序列以及 $(b_n)_{n\geqslant 1}$ 是個非遞增序列。

(3) 推得序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 及 $(b_n)_{n\geqslant 1}$ 會收斂到相同的極限，記作 ℓ。

(4) 關於實數集合 $\mathbb{R}$ 的可數性，我們可以說什麼？

習題 1.20 ： 證明 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 並推得 $\mathbb{R}$ 是不可數的。