Exercise 2.1 : Let (M, d) be a metric space. Define

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad \forall x,y \in M.$$

Show that (M, d') is also a metric space. Note that the metric space (M, d') is bounded, since $0 \leqslant d'(x,y) < 1$ for all $x, y \in M$.

Exercise 2.2 : Let $n \geqslant 0$ be an integer and fix $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ be pairwise distinct real numbers. Let $\mathbb{R}_n[X]$ be the vector space consisting of real polynomials of degree at most n, that is

$$\mathbb{R}_n[X] = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} c_k X^k : c_k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant k \leqslant n \Big\}.$$

Define

$$\|P\| := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |P(a_i)|, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

Show that $\|\cdot\|$ is a norm on $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercise 2.3 : Check that the maps $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ and $\|\cdot\|_\infty$ defined in Example 2.1.9 (a) and (b) are indeed norms on $\mathbb{K}[X]$.

Exercise 2.4 : On a Euclidean space $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, let us define

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Fix $x, y \in V$.

(1) Explain why the function $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2$ is a non-negative function.

(2) Deduce the Cauchy-Schwarz inequality $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

(3) Show the triangular inequality $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

習題 2.1 ： 令 (M, d) 為賦距空間。定義

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad \forall x,y \in M.$$

證明 (M, d') 也是個賦距空間。我們注意到，賦距空間 (M, d') 是有界的，因為對於所有 $x, y \in M$，我們有 $0 \leqslant d'(x,y) < 1$。

習題 2.2 ： 令 $n \geqslant 0$ 為整數並且固定兩兩相異的實數 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$。令 $\mathbb{R}_n[X]$ 為度數至多為 n 的實係數多項式所構成的向量空間，也就是說

$$\mathbb{R}_n[X] = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : a_k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant k \leqslant n \Big\}.$$

定義

$$\|P\| := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |P(a_i)|, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

證明 $\|\cdot\|$ 是個在 $\mathbb{R}_n[X]$ 上的範數。

習題 2.3 ： 檢查定義在範例 2.1.9 (a) 及 (b) 中的函數 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 以及 $\|\cdot\|_\infty$ 的確是 $\mathbb{K}[X]$ 上的範數。

習題 2.4 ： 在歐氏空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上，我們定義

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

固定 $x, y \in V$。

(1) 解釋為什麼 $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2$ 是個非負函數。

(2) 推得柯西不等式：$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$。

(3) 證明三角不等式：$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$。

Exercise 2.5 : Let $(V, \|\cdot\|)$ be a normed space.

(1) Suppose that the norm $\|\cdot\|$ is induced by an inner product in the sense of Proposition 2.1.12. Show that the norm satisfies the parallelogram law,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

(2) Suppose that the norm $\|\cdot\|$ satisfies the parallelogram law (2.1). Show that V is Euclidean, that is, there exists an inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ that induces the norm $\|\cdot\|$ in the sense of Proposition 2.1.12. We may want to consider

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in V.$$

(3) Is the vector space $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ equipped with the norm $\|\cdot\|_\infty$ a Euclidean space?

Exercise 2.6 : In $\mathbb{R}^2$, draw the centered unit closed balls $\overline{B}_{N_1}(0,1)$, $\overline{B}_{N_2}(0,1)$, and $\overline{B}_{N_\infty}(0,1)$, for the norms defined as below,

$$N_1(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2|, \qquad N_2(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \text{and} \qquad N_\infty(x_1,x_2) = \max |x_1|, |x_2|.$$

Give the inclusion relations between these closed unit balls.

Exercise 2.7 : Show that in a normed space, closure of open ball is the closed ball. In other words, given a normed space V, show that $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$ for all $a \in V$ and $r > 0$.

Exercise 2.8 (Question 2.1.26) **:** Is any union of closed sets still a closed set? If yes, please prove it; otherwise, please give a counterexample.

Exercise 2.9 : Show that in $\mathbb{R}$, apart from the emptyset $\varnothing$ and the full space $\mathbb{R}$, any other subset cannot be open and close at the same time. Is there a similar statement for $\mathbb{R}^2$?

Exercise 2.10 : Let (M,d) be a metric space and $A \subseteq M$ be a closed subset. Show that A can be written as a countably infinite intersection of open sets.

Exercise 2.11 : Let $A \subseteq M$ and $x \in M$. Then, the following properties are equivalent.

(1) $x \in \mathring{A}$.

(2) There exists $\varepsilon > 0$ such that $B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

Exercise 2.12 : Let (M,d) be a metric space and $A \subseteq M$ be a subset. Use double inclusion to prove that

$$\operatorname{int} A = M \setminus \operatorname{cl}(M \setminus A) \quad \text{and} \quad \operatorname{int}(M \setminus A) = M \setminus \operatorname{cl}(A).$$

習題 2.5 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範空間。

(1) 假設範數 $\|\cdot\|$ 是可以由內積定義的，見命題 2.1.12 。證明此範數會滿足平行四邊形恆等式：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

(2) 假設範數 $\|\cdot\|$ 滿足 (2.1) 中的平行四邊形恆等式，證明 V 是個歐氏空間，也就是說，存在內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得範數 $\|\cdot\|$ 是藉由內積透過命題 2.1.12 中的方式所得到。我們可以考慮

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in V.$$

(3) 在向量空間 $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ 上賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$ 會是個歐氏空間嗎？

習題 2.6 ： 在 $\mathbb{R}^2$，畫出不同範數定義出來的置中單位閉球：

$$N_1(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2|, \qquad N_2(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \text{以及} \qquad N_\infty(x_1,x_2) = \max |x_1|, |x_2|,$$

並描述這些不同單位閉球之間的包含關係。

習題 2.7 ： 證明在賦範空間中，開球的閉包會是閉球。換句話說，我們想要證明在給定的賦範空間 V 中，對於任意 $a \in V$ 及 $r > 0$，我們有 $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$。

習題 2.8 【問題 2.1.26 】**：** 敘述「任意多個閉集的聯集仍是閉集」是否為真？如果是，請證明此敘述；如果不是，請給出一個反例。

習題 2.9 ： 證明在 $\mathbb{R}$ 中，除了空集合 $\varnothing$ 以及全空間 $\mathbb{R}$，任意其他子集合無法同時是開集與閉集。在 $\mathbb{R}^2$ 中有類似的敘述嗎？

習題 2.10 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為閉子集合。證明 A 可以寫作可數無窮多個開集的交集。

習題 2.11 ： 令 $A \subseteq M$ 及 $x \in M$。則下列性質等價：

(1) $x \in \mathring{A}$。

(2) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subseteq A$。

習題 2.12 ： 令 (M,d) 為賦距空間以及 $A \subseteq M$ 為子集合。使用雙重包含方式來證明

$$\operatorname{int} A = M \setminus \operatorname{cl}(M \setminus A) \quad \text{且} \quad \operatorname{int}(M \setminus A) = M \setminus \operatorname{cl}(A).$$

Exercise 2.13 : Let (M,d) be a metric space. Consider two subsets A and B of M such that $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \varnothing$.

(1) Show that $\operatorname{int}(A \cup B) = \varnothing$ if A is closed in M.

(2) Given an example for which we have $\operatorname{int}(A \cup B) = M$.

Exercise 2.14 : Let (M,d) be a metric space and $A \subseteq M$ be a subset.

(1) Show that if A is open, then $\operatorname{int}(\partial A) = \varnothing$.

(2) When do we have $\operatorname{int}(\partial A) = M$?

Exercise 2.15 : Let (M,d) be a metric space and $A \subseteq M$ be a subset. Show that $\partial A = \overline{A} \cap \overline{M \backslash A}$ and deduce that $\partial A = \partial(M \backslash A)$.

Exercise 2.16 : Let A and B be subsets in a metric space (M,d). Suppose that $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Show that $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

Exercise 2.17 : Let (M,d) be a metric space. Consider a set I, and a family $(A_i)_{i\in I}$ of subsets of M that are indexed by the elements of I.

(1) Suppose that I is finite, for example $I = \{1, \dots, n\}$ for some integer $n \geqslant 1$. Show that

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(2) Suppose that I is infinite. Show that

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(3) Find an example where the equality does not hold in (2).

(4) Without any additional assumption on I, show that

$$\bigcup_{i\in I} (\operatorname{int} A_i) \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big).$$

(5) Find an example with finite I such that the equality does not hold in (4).

Exercise 2.18 : Let (M,d) be a metric space and $S \subseteq T \subseteq U$ be subsets of M. Suppose that S is dense in T and T is dense in U, show that S is also dense in U.

Exercise 2.19 : A metric space (M,d) is said to be separable (可分) if there exists a countable subset $A \subseteq M$ that is dense in M. Show that every Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is separable.

習題 2.13 ： 令 (M,d) 為賦距空間。考量兩個 M 的子集合 A 及 B 使得 $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \varnothing$。

(1) 證明如果 A 在 M 中是個閉集，則 $\operatorname{int}(A \cup B) = \varnothing$。

(2) 請給一個滿足 $\operatorname{int}(A \cup B) = M$ 的例子。

習題 2.14 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為子集合。

(1) 證明如果 A 是個開集，則 $\operatorname{int}(\partial A) = \varnothing$。

(2) 我們什麼時候會有 $\operatorname{int}(\partial A) = M$？

習題 2.15 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為子集合。證明 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{M \backslash A}$ 並由此推得 $\partial A = \partial(M \backslash A)$。

習題 2.16 ： 令 A 及 B 為賦距空間 (M,d) 的子集合。假設 $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$。證明 $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$。

習題 2.17 ： 令 (M,d) 為賦距空間。考慮集合 I 以及由 I 中元素所標記的 M 的子集合族 $(A_i)_{i\in I}$。

(1) 假設 I 是有限的，例如 $I = \{1, \dots, n\}$ 對於某個整數 $n \geqslant 1$。證明

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(2) 假設 I 是無窮的。證明

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(3) 請找出一個例子使得 (2) 中的等式不成立。

(4) 在不對 I 加上任何額外假設的情況下，證明

$$\bigcup_{i\in I} (\operatorname{int} A_i) \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big).$$

(5) 請找出一個 I 為有限的例子，使得 (4) 中的等式不成立。

習題 2.18 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $S \subseteq T \subseteq U$ 為 M 的子集合。假設 S 在 T 中是稠密的，且 T 在 U 中是稠密的，證明 S 在 U 中也會是稠密的。

習題 2.19 ： 給定賦距空間 (M,d)。如果存在可數子集合 $A \subseteq M$ 使得他在 M 中是稠密的，則我們說 M 是可分 (separable) 的。證明任意歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 是可分的。

Exercise 2.20 : The Bolzano–Weierstraß theorem (Theorem 2.2.5) is proven for $\mathbb{R}^n$, equiped with the metric induced by its Euclidean norm. If we equip $\mathbb{R}^n$ with other distances which are also induced by norms, such as $\|\cdot\|_1$ or $\|\cdot\|_\infty$, does the theorem still hold? And how about with the discrete distance given by $d(x,y) = \mathbb{1}_{x\neq y}$?

Exercise 2.21 (Cantor set) **:** We define a sequence of subsets of $\mathbb{R}$ by induction,

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0.$$

Let $\mathcal{C} := \cap_{n\geqslant 0} C_n$.

(1) Show that the subset C_n is closed, and $C_{n+1} \subseteq C_n$ for every $n \geqslant 0$.

(2) Show that the countable intersection $\mathcal{C}$ is nonempty.

Given $x \in [0,1]$, we may define its ternary expansion,

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots = \sum_{k\geqslant 1} x_k 3^{-k}, \tag{2.2}$$

where we have $x_k \in \{0,1,2\}$ for all $k \geqslant 1$. Note that this expansion may not be unique.

(3) In this question, we want to show the uncountability of $\mathcal{C}$.
   (a) Show that if $x \in \mathcal{C}$, then there exists a ternary expansion Eq. (2.2) of x for which we have $x_k = 0$ or 2 for all $k \geqslant 1$.
   (b) Given $x \in [0,1]$ and suppose that the ternary expansion Eq. (2.2) of x is such that $x_k = 0$ or 2 for all $k \geqslant 1$. Show that $x \in \mathcal{C}$.
   (c) For which $x \in \mathcal{C}$, the ternary expansion is not unique?
   (d) Conclude.

(4) Given $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, is the subset $\mathcal{C} \cap [a,b]$ dense in $[a,b]$?

Given a segment $I = [a,b]$ in $[0,1]$, let us define its length to be $\ell(I) := b - a$. Given $n \geqslant 1$ pairwise disjoint segments $(I_i = [a_i,b_i])_{1\leqslant i\leqslant n}$ in $[0,1]$, we define the length of $I := \cup_{i=1}^n I_i$ as $\ell(I) := \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$. Given a subset A in $[0,1]$, we say that it is of length zero if

$$\inf\{\ell(I) : A \subseteq I = \sqcup_{i=1}^n I_i, n \geqslant 1, I_i\text{'s are segments}\} = 0,$$

where $\sqcup$ means that the segments form a pairwise disjoint union.

(5) Find $\ell(C_n)$ for all $n \geqslant 0$ and show that $\mathcal{C}$ is of length zero.

The set $\mathcal{C}$ we constructed above is called *Cantor set*, which is a nonempty uncountable closed set in $[0,1]$, of length 0, thus not containing any interval.

習題 2.20 ： 課程中，我們證明了 Bolzano–Weierstraß 定理（定理 2.2.5 ），在證明中，我們把 $\mathbb{R}^n$ 看作是個歐氏空間，也就是說他的距離是被歐氏範數所給定的。如果我們在 $\mathbb{R}^n$ 上考慮由其他範數所給出的距離，例如 $\|\cdot\|_1$ 或 $\|\cdot\|_\infty$，此定理是否仍然成立？那如果我們考慮的距離是離散距離 $d(x,y) = \mathbb{1}_{x\neq y}$ 呢？

習題 2.21 ： 我們以遞迴方式，定義在 $\mathbb{R}$ 中的子集合序列：

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0.$$

令 $\mathcal{C} := \cap_{n\geqslant 0} C_n$。

(1) 證明對於所有 $n \geqslant 0$，子集合 C_n 是個閉集，且 $C_{n+1} \subseteq C_n$。

(2) 證明可數交集 $\mathcal{C}$ 非空。

給定 $x \in [0,1]$，我們可以定義他的三進位展開：

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots = \sum_{k\geqslant 1} x_k 3^{-k}, \tag{2.2}$$

其中對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $x_k \in \{0,1,2\}$。我們注意到，這個展開式未必有唯一性。

(3) 在此問題中，我們想要證明 $\mathcal{C}$ 是不可數的。
   (a) 證明若 $x \in \mathcal{C}$，則存在 x 的三進位展開式 (2.2)，使得對於所有 $k \geqslant 1$，我們會有 $x_k = 0$ 或 2。
   (b) 給定 $x \in [0,1]$，並假設在 x 的三進位展開式 (2.2) 中，對於所有 $k \geqslant 1$，我們會有 $x_k = 0$ 或 2。證明 $x \in \mathcal{C}$。
   (c) 對於哪些 $x \in \mathcal{C}$，他的三進位展開會是不唯一的？
   (d) 總結。

(4) 給定 $0 \leqslant a < b \leqslant 1$，試問 $\mathcal{C} \cap [a,b]$ 在 $[a,b]$ 中是稠密的嗎？

給定 $[0,1]$ 中的線段 $I = [a,b]$，我們定義他的長度為 $\ell(I) := b - a$。給定 $n \geqslant 1$ 個 $[0,1]$ 中兩兩互斥的線段 $(I_i = [a_i,b_i])_{1\leqslant i\leqslant n}$，我們定義 $I := \cup_{i=1}^n I_i$ 的長度為 $\ell(I) := \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$。給定 $[0,1]$ 中的子集合 A，如果

$$\inf\{\ell(I) : A \subseteq I = \sqcup_{i=1}^n I_i, n \geqslant 1, I_i \text{ 為線段}\} = 0,$$

則我們說他的長度為 0，其中 $\sqcup$ 代表著我們考慮的是互斥線段構成的聯集。

(5) 對於所有 $n \geqslant 0$，求 $\ell(C_n)$，並證明 $\mathcal{C}$ 的長度為 0。

這裡我們構造出來的 $\mathcal{C}$ 稱作 Cantor 集合，是個 $[0,1]$ 中的非空不可數閉集，長度為 0，所以並不包含任何區間。

Exercise 2.22 : Let (M,d) be a metric space and $S \subseteq M$ be an open subset. For any subset $A \subseteq S$, show that A is open in S if and only if it is open in M.

Exercise 2.23 : On the space $(0,1]$, we may consider the topology induced by the metric space $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ as mentioned in Example 2.3.2. Alternatively, we may also define a distance d on $(0,1]$, given by

$$d(x,y) = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big|, \qquad \forall x,y \in (0,1].$$

(1) Let $x \in (0,1]$ and $\varepsilon > 0$. Let $B = B_{|\cdot|}(x,\varepsilon)$ be the ball centered at x of radius ε for the metric $|\cdot|$. Show that for any $y \in B$, we may find $\varepsilon' > 0$ such that

$$B_d(y,\varepsilon') \subseteq B = B_{|\cdot|}(x,\varepsilon).$$

(2) Show that an open ball in $((0,1],d)$ is also an open ball in $((0,1],|\cdot|)$.

(3) Conclude that the metric spaces $((0,1],|\cdot|)$ and $((0,1],d)$ are topologically equivalent, that is, a set A is open in one space if and only if it is also open in the other one.

(4) Is $((0,1],d)$ a complete metric space? How about $((0,1],|\cdot|)$?

Exercise 2.24 : Let M be a set equipped with two distances d and d'. Suppose that the metric spaces (M,d) and (M,d') are topologically equivalent, i.e. the open sets in one space are also open in the other space. Show that if a sequence $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converges in (M,d), then it also converges in (M,d').

Exercise 2.25 : Let M be a set that we equip with two uniformly equivalent distances d and d'. Show that a sequence is Cauchy in (M,d) if and only if it is also Cauchy in (M,d').

Exercise 2.26 : Let (M,d) be a metric space and $\mathcal{C}$ be the set of all the Cauchy sequences in M. Let us define the function $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ as follows. For $U = (u_n)_{n\geqslant 1}, V = (v_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{C}$, let

$$\delta(U,V) = \lim_{n\to\infty} d(u_n,v_n).$$

(1) Show that δ is well defined, symmetric, and satisfies the triangle inequality.

(2) If $U = (u_n)_{n\geqslant 1}$, $V = (v_n)_{n\geqslant 1}$, and $S = (s_n)_{n\geqslant 1}$ are in $\mathcal{C}$ and such that $\delta(U,V) = 0$ and $\delta(V,S) = 0$, check that $\delta(U,S) = 0$.

(3) Let $U = (u_n)_{n\geqslant 1}$, $U' = (u'_n)_{n\geqslant 1}$, $V = (v_n)_{n\geqslant 1}$, and $V' = (v'_n)_{n\geqslant 1}$ be sequences such that $\delta(U,U') = 0$ and $\delta(V,V') = 0$. Show that $\delta(U,V) = \delta(U',V')$.

We will see in Section 3.3 that the above steps are preliminary steps towards the *completion* of the metric space (M,d).

習題 2.22 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $S \subseteq M$ 為開子集合。對於任意子集合 $A \subseteq S$，證明若且唯若 A 在 M 中是個開集，則 A 在 S 中也是個開集。

習題 2.23 ： 如同在範例 2.3.2 所提到的，在空間 $(0,1]$ 上，我們可以考慮由賦距空間 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 所誘導出來的拓撲。此外，我們也能在 $(0,1]$ 上定義距離 d 為：

$$d(x,y) = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big|, \qquad \forall x,y \in (0,1].$$

(1) 令 $x \in (0,1]$ 及 $\varepsilon > 0$。令 $B = B_{|\cdot|}(x,\varepsilon)$ 為由 $|\cdot|$ 當作距離定義出來，中心在 x 且半徑為 ε 的球。證明對任意 $y \in B$，我們能找到 $\varepsilon' > 0$ 使得

$$B_d(y,\varepsilon') \subseteq B = B_{|\cdot|}(x,\varepsilon).$$

(2) 證明在 $((0,1],d)$ 中的開球也是 $((0,1],|\cdot|)$ 中的開球。

(3) 請總結為什麼賦距空間 $((0,1],|\cdot|)$ 及 $((0,1],d)$ 是拓撲等價的；換句話說，證明若且唯若一個集合 A 在其中一個空間中是開集，那麼他在另一個空間中也是開集。

(4) 賦距空間 $((0,1],d)$ 是完備的嗎？那 $((0,1],|\cdot|)$ 呢？

習題 2.24 ： 令 M 為集合，並賦予他兩個距離 d 及 d'。假設賦距空間 (M,d) 與 (M,d') 拓撲等價，也就是說其中一個空間中的開集，也是另一個空間中的開集。證明如果序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 在 (M,d) 中收斂，則他也會在 (M,d') 中收斂。

習題 2.25 ： 令 M 為集合，並賦予他兩個均勻等價的距離 d 及 d'。證明若且唯若一個序列在 (M,d) 中是柯西的，則他在 (M,d') 也是柯西的。

習題 2.26 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $\mathcal{C}$ 為由 M 中所有柯西序列所構成的集合。函數 $\delta : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ 定義如下：對於 $U = (u_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 $V = (v_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{C}$，令

$$\delta(U,V) = \lim_{n\to\infty} d(u_n,v_n).$$

(1) 證明 δ 定義良好，具有對稱性，且滿足三角不等式。

(2) 如果 $U = (u_n)_{n\geqslant 1}$、$V = (v_n)_{n\geqslant 1}$ 及 $S = (s_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $\mathcal{C}$ 裡面且滿足 $\delta(U,V) = 0$ 及 $\delta(V,S) = 0$，請檢查 $\delta(U,S) = 0$。

(3) 令 $U = (u_n)_{n\geqslant 1}$、$U' = (u'_n)_{n\geqslant 1}$、$V = (v_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 $V' = (v'_n)_{n\geqslant 1}$ 為滿足下列條件的序列：$\delta(U,U') = 0$ 及 $\delta(V,V') = 0$。證明 $\delta(U,V) = \delta(U',V')$。

在第 3.3 節中我們會看到，上述的步驟是把 (M,d) 完備化所需要檢查的幾個基本性質。

Exercise 2.27 : Find the upper limit and the lower limit of the following sequences. Do not forget to justify how you obtain your results.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \cos(n), \quad c_n = \frac{1}{\sin(n)}, \quad d_n = \frac{n^2+2n+1}{n(n+\cos(n))}.$$

Exercise 2.28 : Find a sequence $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}$ such that $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, and that any number $x \in [0,1]$ is an accmulation point of $\{a_n : n \geqslant 1\}$.

Exercise 2.29 : Given a bounded sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ with $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$. Show that any point between $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n$ and $L := \limsup_{n\to\infty} a_n$ are accumulation points of $\{a_n : n \geqslant 1\}$.

Exercise 2.30 : Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of positive real numbers. Let $\varepsilon \in (0,1)$ and suppose that there exists $N_0 \geqslant 1$ such that

$$\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1-\varepsilon}{n}, \quad \forall n \geqslant N_0. \tag{2.3}$$

(1) Show that for any positive integer $k \geqslant 1$, we have

$$a_{N_0+k} \leqslant \prod_{i=0}^{k-1}\Big(1+\frac{1-\varepsilon}{n+i}\Big)a_{N_0} - k.$$

(2) Show that for $x \geqslant 0$, we have $1+x \leqslant e^x$.

(3) Show that $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, and conclude that Eq. (2.3) cannot hold.

(4) Deduce the following inequality,

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\Big)^n \geqslant e.$$

(5) Does there exist a sequence $(a_n)_{n\geqslant 1}$ of positive real numbers for which the above inequality becomes an equality?

Exercise 2.31 : Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of positive real numbers.

(1) Prove the following inequality

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(2) Find a sequence $(a_n)_{n\geqslant 1}$ that makes all the three above inequalities strict.

(3) Show that if the limit of $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ exists, then the limit of $(a_n)^{1/n}$ also exists, and we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}.$$

(4) Does the sequence $a_n = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$ have a limit? If yes, find its value.

習題 2.27 ： 請找出下列序列的上極限和下極限。不要忘記解釋你如何求出這些結果的。

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \cos(n), \quad c_n = \frac{1}{\sin(n)}, \quad d_n = \frac{n^2+2n+1}{n(n+\cos(n))}.$$

習題 2.28 ： 請找出 $\mathbb{R}$ 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$、$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ 且對於任意數字 $x \in [0,1]$ 來說，他會是 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點。

習題 2.29 ： 給定有界序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$。證明任意介於 $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n$ 及 $L := \limsup_{n\to\infty} a_n$ 之間的點都會是 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點。

習題 2.30 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為正實數構成的序列。令 $\varepsilon \in (0,1)$ 並假設存在 $N_0 \geqslant 1$ 使得

$$\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1-\varepsilon}{n}, \quad \forall n \geqslant N_0. \tag{2.3}$$

(1) 證明對於任意正整數 $k \geqslant 1$，我們有

$$a_{N_0+k} \leqslant \prod_{i=0}^{k-1}\Big(1+\frac{1-\varepsilon}{n+i}\Big)a_{N_0} - k.$$

(2) 證明對於所有 $x \geqslant 0$，我們有 $1+x \leqslant e^x$。

(3) 證明 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ 並總結為什麼式 (2.3) 無法成立。

(4) 推得下列不等式：

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\Big)^n \geqslant e.$$

(5) 是否存在正實數序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 能讓上面的不等式變成等式呢？

習題 2.31 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為正實數構成的序列。

(1) 證明下列不等式：

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(2) 找到序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 能夠讓上面的三個不等式都變成嚴格不等式。

(3) 證明如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限存在，那麼 $(a_n)^{1/n}$ 的極限也會存在，而且我們有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}.$$

(4) 序列 $a_n = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$ 是否有極限？如果有的話，請求他的值。

Exercise 2.32 : Let $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence with values in $\mathbb{R}$. Show that the following properties are equivalent.

(i) a does not have any subsequential limit in $\mathbb{R}$.

(ii) Any subsequence of a is unbounded.

(iii) $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ when $n \to \infty$.

Exercise 2.33 : Let $(V, \|\cdot\|)$ be a normed vector space and $f : E \to E$ be the function

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

(1) Show that f is a bijection between V and $B(0, 1)$.

(2) Show that f and f^{-1} are continuous.

Exercise 2.34 : Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces, and $f : X \to Y$ be a function. Show that the following properties are equivalent.

(i) f is continuous.

(ii) For any subset $B \subseteq Y$, we have $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(iii) For any subset $B \subseteq Y$, we have $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$.

(iv) For any subset $A \subseteq X$, we have $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercise 2.35 : Let $(V, \|\cdot\|)$ be a normed vector space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Show that the following two maps are continuous

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}.$$

Exercise 2.36 : Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

(1) Show that the set $\mathcal{D}\{p \cdot 2^{-n} : p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$ is dense in $\mathbb{R}$.

(2) Show that $f(0) = f(1) = 0$ implies that $f \equiv 0$.

(3) Conclude that there exists $a, b \in \mathbb{R}$ such that $f(x) = ax + b$.

習題 2.32 ： 令 $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathbb{R}$ 中的序列。證明下列性質是等價的。

(i) a 在 $\mathbb{R}$ 中沒有任何收斂子序列。

(ii) 任何 a 的子序列是沒有界的。

(iii) 當 $n \to \infty$，我們有 $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$。

習題 2.33 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間及 $f : E \to E$ 為定義如下的函數：

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

(1) 證明 f 是 V 與 $B(0, 1)$ 之間的雙射函數。

(2) 證明 f 及 f^{-1} 為連續函數。

習題 2.34 ： 令 (X, d_X) 與 (Y, d_Y) 為賦距空間，$f : X \to Y$ 為函數。證明下列性質等價。

(i) f 是連續函數。

(ii) 對於任意子集合 $B \subseteq Y$，我們有 $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$。

(iii) 對於任意子集合 $B \subseteq Y$，我們有 $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$。

(iv) 對於任意子集合 $A \subseteq X$，我們有 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$。

習題 2.35 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為定義在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範空間。證明下面兩個函數是連續的：

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}.$$

習題 2.36 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為滿足下列條件的連續函數：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

(1) 證明集合 $\mathcal{D}\{p \cdot 2^{-n} : p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的。

(2) 證明 $f(0) = f(1) = 0$ 蘊含 $f \equiv 0$。

(3) 由上面結果總結存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = ax + b$。

Exercise 2.37 : Let (M,d) be a metric space and $A,B\subseteq M$ be two disjoint, closed, nonempty subsets. Consider the map

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & M & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & d(x,A)-d(x,B).\end{array}$$

(1) Show that φ is continuous on M.

(2) Show that $\varphi(x)<0$ for $x\in A$ and $\varphi(x)>0$ for $x\in B$.

(3) Deduce that there exist two disjoint open sets U,V such that $A\subseteq U$ and $B\subseteq V$.

Exercise 2.38 : Consider a closed set F and an open set U in a metric space (M,d) such that $F\subseteq U$. Show that there exists an open set V satisfying

$$F\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

Exercise 2.39 : Show that there is no continuous function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ and $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$. Hint: see below[1].

Exercise 2.40 : Consider the vector space $V=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ equipped with the norm $\|\cdot\|_\infty$. Show that the function $f\mapsto\inf_{x\in[0,1]}f(x)$ is continuous.

Exercise 2.41 : Find an example of metric spaces (M_1,d_1), (M_2,d_2), and (M_2,d_2') such that

- (M_2,d_2) and (M_2,d_2') are topologically equivalent,
- there exists a function $f:(M_1,d_1)\to M_2$ such that f is uniformly continuous when M_2 is equipped with d_2, but not uniformly continuous when M_2 is equipped with d_2'.

You may get inspiration from Exercise 2.23.

Exercise 2.42 : Let X and Y be metric spaces and $f:X\to Y$. The graph (圖) of f is the set

$$\Gamma_f:=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}.$$

(1) Show that if f is continuous, then Γ_f is closed in $X\times Y$.

(2) Find an example for which Γ_f is closed in $X\times Y$ without f being continuous.

(3) Show that f is continuous if and only if the following map is an homeomorphism,

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \Gamma_f\\ x & \mapsto & (x,f(x))\end{array}.$$

[1]Use the intermediate-value theorem in $\mathbb{R}$, and the fact that any nonempty interval of $\mathbb{R}$ contains uncountably infinite elements.

習題 2.37 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A,B\subseteq M$ 為兩個互斥非空閉子集合。考慮函數

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & M & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & d(x,A)-d(x,B).\end{array}$$

(1) 證明 φ 在 M 上是連續的。

(2) 證明對於 $x\in A$，我們有 $\varphi(x)<0$，以及對於 $x\in B$，我們有 $\varphi(x)>0$。

(3) 推得存在兩個互斥開集 U,V 滿足 $A\subseteq U$ 及 $B\subseteq V$。

習題 2.38 ： 在賦距空間 (M,d) 中，考慮閉集 F 及開集 U 使得 $F\subseteq U$。證明存在開集 V 滿足

$$F\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

習題 2.39 ： 證明不存在連續函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 和 $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$。提示：見下方[1]。

習題 2.40 ： 考慮向量空間 $V=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 並賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$。證明函數 $f\mapsto\inf_{x\in[0,1]}f(x)$ 是連續的。

習題 2.41 ： 請找出賦距空間 (M_1,d_1)、(M_2,d_2) 以及 (M_2,d_2') 的例子，使得他們滿足：

- (M_2,d_2) 和 (M_2,d_2') 是拓撲等價的；
- 存在函數 $f:(M_1,d_1)\to M_2$ 使得當我們在 M_2 上賦予距離 d_2 時，f 是均勻連續的；但當我們在 M_2 上賦予距離 d_2' 時，他不是均勻連續的。

你可以從習題 2.23 中得到靈感。

習題 2.42 ： 令 X 與 Y 為賦距空間以及 $f:X\to Y$。我們把下列集合稱作 f 的圖 (graph)：

$$\Gamma_f:=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}.$$

(1) 證明如果 f 是連續的，那麼 Γ_f 在 $X\times Y$ 中是個閉集。

(2) 找出範例使得 Γ_f 在 $X\times Y$ 中是閉集，但 f 不是連續的。

(3) 證明若且唯若 f 是連續函數，則下列映射會是同胚的：

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \Gamma_f\\ x & \mapsto & (x,f(x))\end{array}.$$

[1]使用 $\mathbb{R}$ 裡面的中間值定理，以及任何 $\mathbb{R}$ 的非空區間皆包含不可數無窮多個點。

Exercise 2.43 :

(1) Show that the open interval $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ and $\mathbb{R}$ are homeomorphic, and write $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ be a homeomorphism.

(2) Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a converging sequence in $(-1,1)$. Does the sequence $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ converge?

(3) Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a Cauchy sequence in $(-1,1)$. Is the sequence $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ Cauchy?

Exercise 2.44 : Let $n \geqslant 1$ and $(V_1,\varphi_1),\ldots,(V_n,\varphi_n)$ be normed spaces. We consider the product space $V = V_1 \times \cdots \times V_n$, and define the following maps on V,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i), \quad \text{and} \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)^2}, \quad \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in V.$$

Show that N_1 and N_2 are norms on V.

Exercise 2.45 : Check that the maps D_1 and D_2 defined in Remark 2.6.3 are indeed distances on the product space.

Exercise 2.46 : Given countably infinitely many metric spaces $((M_n,d_n))_{n\geqslant 1}$ which are assumed to be uniformly bounded, i.e.,

$$\exists A > 0, \forall n \geqslant 1, \quad \delta(M_n) < A.$$

Define the product space $M = \prod_{n\geqslant 1} M_n$ and the following function on $M \times M$,

$$d(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} d_n(x_n,y_n), \quad \forall x,y \in M.$$

Show that d is a distance on M.

Exercise 2.47 : Let $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(1) Show that for any $z_0 \in \mathbb{U}$, the subset $\mathbb{U}\backslash\{z_0\}$ is connected. (Hint: show that it is arcwise connected.)

(2) Construct a continuous bijective map from $[0,1)$ to $\mathbb{U}$.

(3) Show that that there is no continuous bijective map from $\mathbb{U}$ to $[0,1]$.

(4) Deduce that $\mathbb{U}$ and $[0,1]$ are not homeomorphic.

Exercise 2.48 : Let (M,d) be a metric space, A and B be subsets of M. Suppose that B is connected and A satisfies

$$B \cap \text{int}(A) \neq \varnothing \quad \text{and} \quad B \cap \text{int}(M\backslash A) \neq \varnothing.$$

Show that $B \cap \partial A \neq \varnothing$.

習題 2.43 ：

(1) 證明開集 $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ 與 $\mathbb{R}$ 是同胚的，並且將 $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ 記為他們之間的一個同胚函數。

(2) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為 $(-1,1)$ 中的收斂序列。序列 $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ 是否也會收斂呢？

(3) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為 $(-1,1)$ 中的柯西序列。序列 $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ 是否也是柯西序列？

習題 2.44 ： 令 $n \geqslant 1$ 以及賦範空間 $(V_1,\varphi_1),\ldots,(V_n,\varphi_n)$。考慮積空間 $V = V_1 \times \cdots \times V_n$ 並在 V 上定義下列函數：

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i), \quad \text{以及} \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)^2}, \quad \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in V.$$

證明 N_1 及 N_2 是 V 上的範數。

習題 2.45 ： 檢查在註解 2.6.3 中定義出來的 D_1 及 D_2 的確是在積空間上的距離。

習題 2.46 ： 給定可數無窮多個賦距空間 $((M_n,d_n))_{n\geqslant 1}$，並假設他們是均勻有界的，也就是說

$$\exists A > 0, \forall n \geqslant 1, \quad \delta(M_n) < A.$$

我們定義積空間 $M = \prod_{n\geqslant 1} M_n$。在 $M \times M$ 上我們定義下列函數：

$$d(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} d_n(x_n,y_n), \quad \forall x,y \in M.$$

證明 d 會是 M 上的距離。

習題 2.47 ： 令 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。

(1) 證明對於任意 $z_0 \in \mathbb{U}$，子集合 $\mathbb{U}\backslash\{z_0\}$ 是連通的。（提示：證明他是弧連通的。）

(2) 構造從 $[0,1)$ 到 $\mathbb{U}$ 的連續雙射函數。

(3) 證明不存在從 $\mathbb{U}$ 到 $[0,1]$ 的連續雙射函數。

(4) 由上推得 $\mathbb{U}$ 和 $[0,1]$ 不是同胚的。

習題 2.48 ： 令 (M,d) 為賦距空間，A 與 B 為 M 的子集合。假設 B 是連通得，且 A 滿足

$$B \cap \text{int}(A) \neq \varnothing \quad \text{以及} \quad B \cap \text{int}(M\backslash A) \neq \varnothing.$$

證明 $B \cap \partial A \neq \varnothing$。

Exercise 2.49 (Question 2.7.10) **:** Let $(C_i)_{i\in I}$ be a countable family of connected subsets, i.e., $I = \{1,\dots,p\}$ for some $p \geqslant 1$ or $I = \mathbb{N}$. Suppose that for every $i \in I, i \neq 1$, we have $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$. Show that $C = \cup_{i\in I} C_i$ is connected by rewriting the proof of Proposition 2.7.8.

Exercise 2.50 : Let (M,d) be a metric space. Show that the the following statements are equivalent.

(i) (M,d) is connected.

(ii) Every proper nonempty subset of M has nonempty boundary in M.

(iii) Any real-valued continuous function defined on M has intermediate value property. That is, for any continuous function $f : (M,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, if $x \in \mathbb{R}$ is such that $f(a) < x < f(b)$ for some $a, b \in M$, then $x \in f(M)$.

Exercise 2.51 : Let A and B be connected metric spaces. Let $X \subsetneq A$ and $Y \subsetneq B$ be proper subsets. Show that $C := (A \times B)\backslash(X \times Y)$ is connected in $A \times B$. Why do we need to take X and Y to be proper subsets?

Exercise 2.52 : Let $A \subseteq \mathbb{R}^2$ be defined as follows,

$$A := \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}.$$

We also define

$$A' := \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}.$$

(1) Show that A' is arcwise connected and deduce that it is connected.

(2) Show that A is not arcwise connected.

(3) Find $\overline{A'}$ and deduce that A is connected.

Exercise 2.53 : In this exercise, we will distinguish the notion between two “equinumerous sets” and “homeomorphic sets”.

(1) Given two disjoint sets A and B, show that $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \sim \mathcal{P}(A \cup B)$.

(2) Use the fact that $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ to deduce that $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

(3) Show that that there is no continuous bijective map from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$.

習題 2.49 【問題 2.7.10】： 令 $(C_i)_{i\in I}$ 由可數多個連通子集合所構成，也就是說存在 $p \geqslant 1$ 使得 $I = \{1,\dots,p\}$，或是說 $I = \mathbb{N}$。假設對於所有 $i \in I, i \neq 1$，我們有 $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$。請修改命題 2.7.8 中的步驟，證明 $C = \cup_{i\in I} C_i$ 是連通的。

習題 2.50 ： 令 (M,d) 為賦距空間，證明下列性質等價。

(i) (M,d) 是連通的。

(ii) 任何 M 的非空嚴格子集合，其邊界皆是非空。

(iii) 任何定義在 M 上的實連續函數皆滿足中間值定理；換句話說，對於任意連續函數 $f : (M,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$，如果 $x \in \mathbb{R}$ 滿足 $f(a) < x < f(b)$，其中 $a, b \in M$，那麼 $x \in f(M)$。

習題 2.51 ： 令 A 及 B 為兩個連通得賦距空間。令 $X \subsetneq A$ 及 $Y \subsetneq B$ 為嚴格子集合。證明 $C := (A \times B)\backslash(X \times Y)$ 在 $A \times B$ 中是連通的。為什麼我們需要假設 X 及 Y 為嚴格子集合呢？

習題 2.52 ： 令 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 定義如下：

$$A := \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}.$$

我們也定義

$$A' := \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}.$$

(1) 證明 A' 是弧連通的，並推得他是連通的。

(2) 證明 A 不是弧連通的。

(3) 求 $\overline{A'}$ 並推得 A 是連通的。

習題 2.53 ： 在此習題中，我們會區分兩個「等勢集合」以及「同胚集合」的概念。

(1) 給定兩個互斥集合 A 及 B，證明 $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \sim \mathcal{P}(A \cup B)$。

(2) 我們已知 $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$，由此推得 $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$。

(3) 證明不存在從 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的連續雙射函數。

Exercise 2.54 : Let (M, d) be a connected metric space and $A \subseteq M$ be a closed subset of M. Suppose that the boundary ∂A is connected. Let $f : A \to D = \{0, 1\}$ be a continuous function.

(1) Show that $f_{|\partial A}$ is constant.

Without loss of generality, we may assume that $f_{|\partial A} \equiv 0$. Define the function $g : M \to D$ as below,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \in A^c. \end{cases}$$

(1) Show that $g^{-1}(\varnothing)$, $g^{-1}(D)$, $g^{-1}(\{0\})$, and $g^{-1}(\{1\})$ are closed subsets of M, and deduce that g is continuous.

(2) Deduce that A is connected.

(3) If we remove the assumption that $A \subseteq M$ is a closed subset, is it still true that A is connected?

Exercise 2.55 : Let $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ and $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Show that there exists $z \in \mathbb{U}$ such that $f(z) = f(-z)$.

習題 2.54 ： 令 (M, d) 為連通的賦距空間以及 $A \subseteq M$ 為 M 的閉子集合。假設邊界 ∂A 是連通的。令 $f : A \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。

(1) 證明 $f_{|\partial A}$ 是個常數。

不失一般性，我們可以假設 $f_{|\partial A} \equiv 0$。我們定義函數 $g : M \to D$ 如下：

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{若 } x \in A, \\ 0 & \text{若 } x \in A^c. \end{cases}$$

(1) 證明 $g^{-1}(\varnothing)$、$g^{-1}(D)$、$g^{-1}(\{0\})$ 以及 $g^{-1}(\{1\})$ 為 M 的閉子集合，由此推得 g 是連續的。

(2) 推得 A 是連通的。

(3) 如果我們移除「$A \subseteq M$ 是個閉子集合」的假設，性質「A 為連通的」是否仍然為真？

習題 2.55 ： 令 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 且 $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 為連續函數。證明存在 $z \in \mathbb{U}$ 使得 $f(z) = f(-z)$。