第二章 ：賦距空間與賦範空間的拓撲

習題 2.1 ： 令 (M, d) 為賦距空間。定義

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad \forall x, y \in M.$$

證明 (M, d') 也是個賦距空間。我們注意到，賦距空間 (M, d') 是有界的，因為對於所有 $x, y \in M$，我們有 $0 \leqslant d'(x,y) < 1$。

習題 2.2 ： 令 $n \geqslant 0$ 為整數並且固定兩兩相異的實數 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$。令 $\mathbb{R}_n[X]$ 為度數至多為 n 的實係數多項式所構成的向量空間，也就是說

$$\mathbb{R}_n[X] = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : a_k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant k \leqslant n \Big\}.$$

定義

$$\|P\| := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |P(a_i)|, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

證明 $\|\cdot\|$ 是個在 $\mathbb{R}_n[X]$ 上的範數。

習題 2.3 ： 檢查定義在範例 2.1.9 (a) 及 (b) 中的函數 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 以及 $\|\cdot\|_\infty$ 的確是 $\mathbb{K}[X]$ 上的範數。

習題 2.4 ： 在歐氏空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上，我們定義

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

固定 $x, y \in V$。

(1) 解釋為什麼 $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2$ 是個非負函數。

(2) 推得柯西不等式：$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$。

(3) 證明三角不等式：$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$。

習題 2.5 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範空間。

(1) 假設範數 $\|\cdot\|$ 是可以由內積定義的，見命題 2.1.12 。證明此範數會滿足平行四邊形恆等式：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

(2) 假設範數 $\|\cdot\|$ 滿足 (2.1) 中的平行四邊形恆等式，證明 V 是個歐氏空間，也就是說，存在內積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 使得範數 $\|\cdot\|$ 是藉由內積透過命題 2.1.12 中的方式所得到。我們可以考慮

$$\langle x, y \rangle := \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad x, y \in V.$$

(3) 在向量空間 $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ 上賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$ 會是個歐氏空間嗎？

習題 2.6 ： 在 $\mathbb{R}^2$，畫出不同範數定義出來的置中單位閉球：

$$N_1(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \qquad N_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \text{以及} \qquad N_\infty(x_1, x_2) = \max |x_1|, |x_2|,$$

並描述這些不同單位閉球之間的包含關係。

習題 2.7 ： 證明在賦範空間中，開球的閉包會是閉球。換句話說，我們想要證明在給定的賦範空間 V 中，對於任意 $a \in V$ 及 $r > 0$，我們有 $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$。

習題 2.8 【問題 2.1.26 】 ： 敘述「任意多個閉集的聯集仍是閉集」是否為真？如果是，請證明此敘述；如果不是，請給出一個反例。

習題 2.9 ： 證明在 $\mathbb{R}$ 中，除了空集合 $\varnothing$ 以及全空間 $\mathbb{R}$，任意其他子集合無法同時是開集與閉集。在 $\mathbb{R}^2$ 中有類似的敘述嗎？

習題 2.10 ： 令 (M, d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為閉子集合。證明 A 可以寫作可數無窮多個開集的交集。

習題 2.11 ： 令 $A \subseteq M$ 及 $x \in M$。則下列性質等價：

(1) $x \in \mathring{A}$。

(2) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq A$。

習題 2.12 ： 令 (M, d) 為賦距空間以及 $A \subseteq M$ 為子集合。使用雙重包含方式來證明

$$\operatorname{int} A = M \setminus \operatorname{cl}(M \setminus A) \quad \text{且} \quad \operatorname{int}(M \setminus A) = M \setminus \operatorname{cl}(A).$$

習題 2.13 ： 令 (M,d) 為賦距空間。考量兩個 M 的子集合 A 及 B 使得 $\operatorname{int} A = \operatorname{int} B = \varnothing$。

(1) 證明如果 A 在 M 中是個閉集，則 $\operatorname{int}(A \cup B) = \varnothing$。

(2) 請給一個滿足 $\operatorname{int}(A \cup B) = M$ 的例子。

習題 2.14 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為子集合。

(1) 證明如果 A 是個開集，則 $\operatorname{int}(\partial A) = \varnothing$。

(2) 我們什麼時候會有 $\operatorname{int}(\partial A) = M$？

習題 2.15 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A \subseteq M$ 為子集合。證明 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{M \backslash A}$ 並由此推得 $\partial A = \partial(M \backslash A)$。

習題 2.16 ： 令 A 及 B 為賦距空間 (M,d) 的子集合。假設 $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$。證明 $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$。

習題 2.17 ： 令 (M,d) 為賦距空間。考慮集合 I 以及由 I 中元素所標記的 M 的子集合族 $(A_i)_{i \in I}$。

(1) 假設 I 是有限的，例如 $I = \{1, \ldots, n\}$ 對於某個整數 $n \geqslant 1$。證明

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(2) 假設 I 是無窮的。證明

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in I} (\operatorname{int} A_i).$$

(3) 請找出一個例子使得 (2) 中的等式不成立。

(4) 在不對 I 加上任何額外假設的情況下，證明

$$\bigcup_{i \in I} (\operatorname{int} A_i) \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big).$$

(5) 請找出一個 I 為有限的例子，使得 (4) 中的等式不成立。

習題 2.18 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $S \subseteq T \subseteq U$ 為 M 的子集合。假設 S 在 T 中是稠密的，且 T 在 U 中是稠密的，證明 S 在 U 中也會是稠密的。

習題 2.19 ： 給定賦距空間 (M,d)。如果存在可數子集合 $A \subseteq M$ 使得他在 M 中是稠密的，則我們說 M 是可分 (separable) 的。證明任意歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 是可分的。

習題 2.20 ： 課程中，我們證明了 Bolzano–Weierstraß 定理（定理 2.2.5 ），在證明中，我們把 $\mathbb{R}^n$ 看作是個歐氏空間，也就是說他的距離是被歐氏範數所給定的。如果我們在 $\mathbb{R}^n$ 上考慮由其他範數所給出的距離，例如 $\|\cdot\|_1$ 或 $\|\cdot\|_\infty$，此定理是否仍然成立？那如果我們考慮的距離是離散距離 $d(x,y) = \mathbb{1}_{x\neq y}$ 呢？

習題 2.21 ： 我們以遞迴方式，定義在 $\mathbb{R}$ 中的子集合序列：

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0.$$

令 $\mathcal{C} := \cap_{n\geqslant 0} C_n$。

(1) 證明對於所有 $n \geqslant 0$，子集合 C_n 是個閉集，且 $C_{n+1} \subseteq C_n$。

(2) 證明可數交集 $\mathcal{C}$ 非空。

給定 $x \in [0,1]$，我們可以定義他的三進位展開：

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots = \sum_{k\geqslant 1} x_k 3^{-k}, \tag{2.2}$$

其中對於所有 $k \geqslant 1$，我們有 $x_k \in \{0,1,2\}$。我們注意到，這個展開式未必有唯一性。

(3) 在此問題中，我們想要證明 $\mathcal{C}$ 是不可數的。

  (a) 證明若 $x \in \mathcal{C}$，則存在 x 的三進位展開式 (2.2)，使得對於所有 $k \geqslant 1$，我們會有 $x_k = 0$ 或 2。

  (b) 給定 $x \in [0,1]$，並假設在 x 的三進位展開式 (2.2) 中，對於所有 $k \geqslant 1$，我們會有 $x_k = 0$ 或 2。證明 $x \in \mathcal{C}$。

  (c) 對於哪些 $x \in \mathcal{C}$，他的三進位展開會是不唯一的？

  (d) 總結。

(4) 給定 $0 \leqslant a < b \leqslant 1$，試問 $\mathcal{C} \cap [a,b]$ 在 $[a,b]$ 中是稠密的嗎？

給定 $[0,1]$ 中的線段 $I = [a,b]$，我們定義他的長度為 $\ell(I) := b - a$。給定 $n \geqslant 1$ 個 $[0,1]$ 中兩兩互斥的線段 $(I_i = [a_i, b_i])_{1\leqslant i\leqslant n}$，我們定義 $I := \cup_{i=1}^n I_i$ 的長度為 $\ell(I) := \sum_{i=1}^n \ell(I_i)$。給定 $[0,1]$ 中的子集合 A，如果

$$\inf\{\ell(I) : A \subseteq I = \sqcup_{i=1}^n I_i, n \geqslant 1, I_i \text{ 為線段}\} = 0,$$

則我們說他的長度為 0，其中 $\sqcup$ 代表著我們考慮的是互斥線段構成的聯集。

(5) 對於所有 $n \geqslant 0$，求 $\ell(C_n)$，並證明 $\mathcal{C}$ 的長度為 0。

這裡我們構造出來的 $\mathcal{C}$ 稱作 *Cantor 集合*，是個 $[0,1]$ 中的非空不可數閉集，長度為 0，所以並不包含任何區間。

習題 2.22 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $S\subseteq M$ 為開子集合。對於任意子集合 $A\subseteq S$，證明若且唯若 A 在 M 中是個開集，則 A 在 S 中也是個開集。

習題 2.23 ： 如同在範例 2.3.2 所提到的，在空間 $(0,1]$ 上，我們可以考慮由賦距空間 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 所誘導出來的拓撲。此外，我們也能在 $(0,1]$ 上定義距離 d 為：

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|,\qquad \forall x,y\in(0,1].$$

(1) 令 $x\in(0,1]$ 及 $\varepsilon>0$。令 $B=B_{|\cdot|}(x,\varepsilon)$ 為由 $|\cdot|$ 當作距離定義出來，中心在 x 且半徑為 ε 的球。證明對任意 $y\in B$，我們能找到 $\varepsilon'>0$ 使得

$$B_d(y,\varepsilon')\subseteq B=B_{|\cdot|}(x,\varepsilon).$$

(2) 證明在 $((0,1],d)$ 中的開球也是 $((0,1],|\cdot|)$ 中的開球。

(3) 請總結為什麼賦距空間 $((0,1],|\cdot|)$ 及 $((0,1],d)$ 是拓撲等價的；換句話說，證明若且唯若一個集合 A 在其中一個空間中是開集，那麼他在另一個空間中也是開集。

(4) 賦距空間 $((0,1],d)$ 是完備的嗎？那 $((0,1],|\cdot|)$ 呢？

習題 2.24 ： 令 M 為集合，並賦予他兩個距離 d 及 d'。假設賦距空間 (M,d) 與 (M,d') 拓撲等價，也就是說其中一個空間中的開集，也是另一個空間中的開集。證明如果序列 $(a_n)_{n\geqslant1}$ 在 (M,d) 中收斂，則他也會在 (M,d') 中收斂。

習題 2.25 ： 令 M 為集合，並賦予他兩個均勻等價的距離 d 及 d'。證明若且唯若一個序列在 (M,d) 中是柯西的，則他在 (M,d') 也是柯西的。

習題 2.26 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $\mathcal{C}$ 為由 M 中所有柯西序列所構成的集合。函數 $\delta:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}_+$ 定義如下：對於 $U=(u_n)_{n\geqslant1}$ 以及 $V=(v_n)_{n\geqslant1}\in\mathcal{C}$，令

$$\delta(U,V)=\lim_{n\to\infty}d(u_n,v_n).$$

(1) 證明 δ 定義良好，具有對稱性，且滿足三角不等式。

(2) 如果 $U=(u_n)_{n\geqslant1}$、$V=(v_n)_{n\geqslant1}$ 及 $S=(s_n)_{n\geqslant1}$ 在 $\mathcal{C}$ 裡面且滿足 $\delta(U,V)=0$ 及 $\delta(V,S)=0$，請檢查 $\delta(U,S)=0$。

(3) 令 $U=(u_n)_{n\geqslant1}$、$U'=(u'_n)_{n\geqslant1}$、$V=(v_n)_{n\geqslant1}$ 以及 $V'=(v'_n)_{n\geqslant1}$ 為滿足下列條件的序列：$\delta(U,U')=0$ 及 $\delta(V,V')=0$。證明 $\delta(U,V)=\delta(U',V')$。

在第 3.3 節中我們會看到，上述的步驟是把 (M,d) 完備化所需要檢查的幾個基本性質。

習題 2.27 ： 請找出下列序列的上極限和下極限。不要忘記解釋你如何求出這些結果的。

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \cos(n), \quad c_n = \frac{1}{\sin(n)}, \quad d_n = \frac{n^2+2n+1}{n(n+\cos(n))}.$$

習題 2.28 ： 請找出 $\mathbb{R}$ 中的序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$、$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ 且對於任意數字 $x \in [0,1]$ 來說，他會是 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點。

習題 2.29 ： 給定有界序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$。證明任意介於 $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n$ 及 $L := \limsup_{n\to\infty} a_n$ 之間的點都會是 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 的匯聚點。

習題 2.30 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為正實數構成的序列。令 $\varepsilon \in (0,1)$ 並假設存在 $N_0 \geqslant 1$ 使得

$$\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1-\varepsilon}{n}, \quad \forall n \geqslant N_0. \tag{2.3}$$

(1) 證明對於任意正整數 $k \geqslant 1$，我們有

$$a_{N_0+k} \leqslant \prod_{i=0}^{k-1}\Big(1+\frac{1-\varepsilon}{n+i}\Big)a_{N_0} - k.$$

(2) 證明對於所有 $x \geqslant 0$，我們有 $1 + x \leqslant e^x$。

(3) 證明 $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ 並總結為什麼式 (2.3) 無法成立。

(4) 推得下列不等式：

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\Big)^n \geqslant e.$$

(5) 是否存在正實數序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 能讓上面的不等式變成等式呢？

習題 2.31 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為正實數構成的序列。

(1) 證明下列不等式：

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(2) 找到序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 能夠讓上面的三個不等式都變成嚴格不等式。

(3) 證明如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限存在，那麼 $(a_n)^{1/n}$ 的極限也會存在，而且我們有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}.$$

(4) 序列 $a_n = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$ 是否有極限？如果有的話，請求他的值。

習題 2.32 ： 令 $a=(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathbb{R}$ 中的序列。證明下列性質是等價的。

(i) a 在 $\mathbb{R}$ 中沒有任何收斂子序列。

(ii) 任何 a 的子序列是沒有界的。

(iii) 當 $n\to\infty$，我們有 $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$。

習題 2.33 ： 令 $(V,\|\cdot\|)$ 為賦範向量空間及 $f:E\to E$ 為定義如下的函數：

$$\forall x\in V,\quad f(x)=\frac{x}{1+\|x\|}.$$

(1) 證明 f 是 V 與 $B(0,1)$ 之間的雙射函數。

(2) 證明 f 及 f^{-1} 為連續函數。

習題 2.34 ： 令 (X,d_X) 與 (Y,d_Y) 為賦距空間，$f:X\to Y$ 為函數。證明下列性質等價。

(i) f 是連續函數。

(ii) 對於任意子集合 $B\subseteq Y$，我們有 $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$。

(iii) 對於任意子集合 $B\subseteq Y$，我們有 $f^{-1}(\mathrm{int}(B))\subseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$。

(iv) 對於任意子集合 $A\subseteq X$，我們有 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$。

習題 2.35 ： 令 $(V,\|\cdot\|)$ 為定義在域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範空間。證明下面兩個函數是連續的：

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}.$$

習題 2.36 ： 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為滿足下列條件的連續函數：

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$

(1) 證明集合 $\mathcal{D}\{p\cdot 2^{-n}:p\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}_0\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的。

(2) 證明 $f(0)=f(1)=0$ 蘊含 $f\equiv 0$。

(3) 由上面結果總結存在 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=ax+b$。

習題 2.37 ： 令 (M,d) 為賦距空間且 $A,B\subseteq M$ 為兩個互斥非空閉子集合。考慮函數

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,A)-d(x,B).\end{array}$$

(1) 證明 φ 在 M 上是連續的。

(2) 證明對於 $x\in A$，我們有 $\varphi(x)<0$，以及對於 $x\in B$，我們有 $\varphi(x)>0$。

(3) 推得存在兩個互斥開集 U,V 滿足 $A\subseteq U$ 及 $B\subseteq V$。

習題 2.38 ： 在賦距空間 (M,d) 中，考慮閉集 F 及開集 U 使得 $F\subseteq U$。證明存在開集 V 滿足

$$F\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

習題 2.39 ： 證明不存在連續函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 和 $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$。提示：見下方[1]。

習題 2.40 ： 考慮向量空間 $V=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 並賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$。證明函數 $f\mapsto\inf_{x\in[0,1]}f(x)$ 是連續的。

習題 2.41 ： 請找出賦距空間 (M_1,d_1)、(M_2,d_2) 以及 (M_2,d_2') 的例子，使得他們滿足：

- (M_2,d_2) 和 (M_2,d_2') 是拓撲等價的；
- 存在函數 $f:(M_1,d_1)\to M_2$ 使得當我們在 M_2 上賦予距離 d_2 時，f 是均勻連續的；但當我們在 M_2 上賦予距離 d_2' 時，他不是均勻連續的。

你可以從習題 2.23 中得到靈感。

習題 2.42 ： 令 X 與 Y 為賦距空間以及 $f:X\to Y$。我們把下列集合稱作 f 的圖 (graph)：

$$\Gamma_f:=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}.$$

(1) 證明如果 f 是連續的，那麼 Γ_f 在 $X\times Y$ 中是個閉集。

(2) 找出範例使得 Γ_f 在 $X\times Y$ 中是閉集，但 f 不是連續的。

(3) 證明若且唯若 f 是連續函數，則下列映射會是同胚的：

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \Gamma_f \\ x & \mapsto & (x,f(x))\end{array}.$$

[1]使用 $\mathbb{R}$ 裡面的中間值定理，以及任何 $\mathbb{R}$ 的非空區間皆包含不可數無窮多個點。

習題 2.43 ：

(1) 證明開集 $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ 與 $\mathbb{R}$ 是同胚的，並且將 $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ 記為他們之間的一個同胚函數。

(2) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為 $(-1,1)$ 中的收斂序列。序列 $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ 是否也會收斂呢？

(3) 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為 $(-1,1)$ 中的柯西序列。序列 $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ 是否也是柯西序列？

習題 2.44 ： 令 $n \geqslant 1$ 以及賦範空間 $(V_1,\varphi_1),\dots,(V_n,\varphi_n)$。考慮積空間 $V = V_1 \times \cdots \times V_n$ 並在 V 上定義下列函數：

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i), \quad \text{以及} \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)^2}, \quad \forall x = (x_1,\dots,x_n) \in V.$$

證明 N_1 及 N_2 是 V 上的範數。

習題 2.45 ： 檢查在註解 2.6.3 中定義出來的 D_1 及 D_2 的確是在積空間上的距離。

習題 2.46 ： 給定可數無窮多個賦距空間 $((M_n,d_n))_{n\geqslant 1}$，並假設他們是均勻有界的，也就是說

$$\exists A > 0, \forall n \geqslant 1, \quad \delta(M_n) < A.$$

我們定義積空間 $M = \prod_{n\geqslant 1} M_n$。在 $M \times M$ 上我們定義下列函數：

$$d(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} d_n(x_n,y_n), \quad \forall x,y \in M.$$

證明 d 會是 M 上的距離。

習題 2.47 ： 令 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。

(1) 證明對於任意 $z_0 \in \mathbb{U}$，子集合 $\mathbb{U}\backslash\{z_0\}$ 是連通的。（提示：證明他是弧連通的。）

(2) 構造從 $[0,1)$ 到 $\mathbb{U}$ 的連續雙射函數。

(3) 證明不存在從 $\mathbb{U}$ 到 $[0,1]$ 的連續雙射函數。

(4) 由上推得 $\mathbb{U}$ 和 $[0,1]$ 不是同胚的。

習題 2.48 ： 令 (M,d) 為賦距空間，A 與 B 為 M 的子集合。假設 B 是連通得，且 A 滿足

$$B \cap \mathrm{int}(A) \neq \varnothing \quad \text{以及} \quad B \cap \mathrm{int}(M\backslash A) \neq \varnothing.$$

證明 $B \cap \partial A \neq \varnothing$。

習題 2.49 【問題 2.7.10】：令 $(C_i)_{i\in I}$ 由可數多個連通子集合所構成，也就是說存在 $p\geqslant 1$ 使得 $I=\{1,\dots,p\}$，或是說 $I=\mathbb{N}$。假設對於所有 $i\in I, i\neq 1$，我們有 $C_{i-1}\cap C_i\neq\varnothing$。請修改命題 2.7.8 中的步驟，證明 $C=\cup_{i\in I}C_i$ 是連通的。

習題 2.50 ：令 (M,d) 為賦距空間，證明下列性質等價。

(i) (M,d) 是連通的。

(ii) 任何 M 的非空嚴格子集合，其邊界皆是非空。

(iii) 任何定義在 M 上的實連續函數皆滿足中間值定理；換句話說，對於任意連續函數 $f:(M,d)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$，如果 $x\in\mathbb{R}$ 滿足 $f(a)<x<f(b)$，其中 $a,b\in M$，那麼 $x\in f(M)$。

習題 2.51 ：令 A 及 B 為兩個連通得賦距空間。令 $X\subsetneq A$ 及 $Y\subsetneq B$ 為嚴格子集合。證明 $C:=(A\times B)\backslash(X\times Y)$ 在 $A\times B$ 中是連通的。為什麼我們需要假設 X 及 Y 為嚴格子集合呢？

習題 2.52 ：令 $A\subseteq\mathbb{R}^2$ 定義如下：

$$A:=\{(0,0)\}\cup\{(x,\sin(1/x)):x\in(0,1]\}.$$

我們也定義

$$A':=\{(x,\sin(1/x)):x\in(0,1]\}.$$

(1) 證明 A' 是弧連通的，並推得他是連通的。

(2) 證明 A 不是弧連通的。

(3) 求 $\overline{A'}$ 並推得 A 是連通的。

習題 2.53 ：在此習題中，我們會區分兩個「等勢集合」以及「同胚集合」的概念。

(1) 給定兩個互斥集合 A 及 B，證明 $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\sim\mathcal{P}(A\cup B)$。

(2) 我們已知 $\mathbb{R}\sim\mathcal{P}(\mathbb{N})$，由此推得 $\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$。

(3) 證明不存在從 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的連續雙射函數。

習題 2.54 ： 令 (M, d) 為連通的賦距空間以及 $A \subseteq M$ 為 M 的閉子集合。假設邊界 ∂A 是連通的。令 $f : A \to D = \{0, 1\}$ 為連續函數。

(1) 證明 $f_{|\partial A}$ 是個常數。

不失一般性，我們可以假設 $f_{|\partial A} \equiv 0$。我們定義函數 $g : M \to D$ 如下：

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{若 } x \in A, \\ 0 & \text{若 } x \in A^c. \end{cases}$$

(1) 證明 $g^{-1}(\varnothing)$、$g^{-1}(D)$、$g^{-1}(\{0\})$ 以及 $g^{-1}(\{1\})$ 為 M 的閉子集合，由此推得 g 是連續的。

(2) 推得 A 是連通的。

(3) 如果我們移除「$A \subseteq M$ 是個閉子集合」的假設，性質「A 為連通的」是否仍然為真？

習題 2.55 ： 令 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 且 $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ 為連續函數。證明存在 $z \in \mathbb{U}$ 使得 $f(z) = f(-z)$。