Chapter 3: Compact spaces and complete spaces

Exercise 3.1 : Let (M, d) be a compact metric space and $f : M \to \mathbb{R}$ be a function. We recall that M satisfies the Borel–Lebesgue property.

(1) Suppose that f is locally bounded, that is for all $x \in M$, there exists $r_x > 0$ and $A_x > 0$ such that

$$\forall y \in B(x, r_x), \quad |f(y)| \leqslant A_x.$$

Show that f is bounded on M.

(2) Suppose that f is locally Lipschitz continuous, that is for all $x \in M$, there exists $r_x > 0$ and $K_x > 0$ such that

$$\forall y, z \in B(x, r_x), \quad |f(y) - f(z)| \leqslant K_x \cdot d(y, z).$$

Show that f is Lipschitz continuous on M.

Exercise 3.2 : Let (M, d) be a metric space, $A \subseteq M$ be a compact subset, and $B \subseteq M$ be a closed subset with $A \cap B = \varnothing$.

(1) Apply the Borel–Lebesgue property to A to show that there exists an open subset $U \subseteq M$ such that $A \subseteq U$ and $\overline{U} \cap B = \varnothing$. Hint: B^c is open.

(2) Suppose that B is also compact. Deduce from the previous question that there exists open sets U and V such that

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad \text{and} \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing.$$

Exercise 3.3 : Let (M, d) be a metric space and $(x_n)_{n \geqslant 1}$ be a convergent sequence in M with limit ℓ. Show that the set

$$\Gamma = \{x_n : n \geqslant 1\} \cup \{\ell\}$$

is compact using the Borel–Lebesgue property.

Exercise 3.4 : Let (K_1, d_1) and (K_2, d_2) be two compact metric spaces. Show that the product space $K_1 \times K_2$ equipped with the product distance $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ satisfies the Borel–Lebesgue property, and deduce that it is compact. Show that any finite product of compact metric spaces is compact.

第三章 ：緊緻空間及完備空間

習題 3.1 ： 令 (M, d) 為緊緻賦距空間且 $f : M \to \mathbb{R}$ 為函數。我們不要忘記，M 會滿足 Borel–Lebesgue 性質。

(1) 假設 f 是局部有界的，也就是說，對於所有 $x \in M$，存在 $r_x > 0$ 和 $A_x > 0$ 使得

$$\forall y \in B(x, r_x), \quad |f(y)| \leqslant A_x.$$

證明 f 在 M 上是有界的。

(2) 假設 f 是局部 Lipschitz 連續的，也就是說，對於所有 $x \in M$，存在 $r_x > 0$ 和 $K_x > 0$ 使得

$$\forall y, z \in B(x, r_x), \quad |f(y) - f(z)| \leqslant K_x \cdot d(y, z).$$

證明 f 在 M 上是 Lipschitz 連續的。

習題 3.2 ： 令 (M, d) 為賦距空間，$A \subseteq M$ 為緊緻子集合，且 $B \subseteq M$ 為閉子集合，滿足 $A \cap B = \varnothing$。

(1) 對 A 使用 Borel–Lebesgue 性質，來證明存在開子集和 $U \subseteq M$ 使得 $A \subseteq U$ 還有 $\overline{U} \cap B = \varnothing$。提示：$B^c$ 是開集。

(2) 假設 B 也是緊緻的。從上述問題推得出來，存在開集 U 和 V 使得

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad \text{以及} \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing.$$

習題 3.3 ： 令 (M, d) 為賦距空間以及 $(x_n)_{n \geqslant 1}$ 為在 M 中的收斂序列，我們將他的極限記作 ℓ。使用 Borel–Lebesgue 性質來證明集合

$$\Gamma = \{x_n : n \geqslant 1\} \cup \{\ell\}$$

是緊緻的。

習題 3.4 ： 令 (K_1, d_1) 及 (K_2, d_2) 為兩個緊緻賦距空間。證明在積空間 $K_1 \times K_2$ 上賦予積距離 $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ 會滿足 Borel–Lebesgue 性質，並推得他是緊緻的。證明任意有限個緊緻賦距空間的積空間還是緊緻的。

Exercise 3.5 : Let (M, d) be a metric space and $(K_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of nonempty compact sets of M. Suppose that $K_{n+1} \subseteq K_n$ for all $n \geqslant 1$. Set $K = \cap_{n\geqslant 1} K_n$.

(1) Show that $K \neq \varnothing$.

(2) Let U be an open set containing K. Show that there exists $n \geqslant 1$ such that $K_n \subseteq U$.

We note that when (M, d) is taken to be the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, then (1) is the Cantor's intersection theorem.

Exercise 3.6 : Let V and W be two normed vector spaces, $K \subseteq V$ be a compact subset. Let $f : K \to W$ be an injective continuous function. Show that f is a homeomorphism between K and $L = f(K)$.

Exercise 3.7 : Let I and J be intervals in $\mathbb{R}$, and $f : I \to J$ be a continuous and bijective function. Show that f^{-1} is continuous.

Exercise 3.8 : Show Exercise 3.1 using the Bolzano–Weierstraß property.

Exercise 3.9 : Let K_1, K_2 be two compact sets in a normed vector space. Show that the following set is compact,

$$K_1 + K_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}.$$

Exercise 3.10 : Let K be a compact set in a metric space (M, d). Given a sequence $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ with values in K. Suppose that x only has one subsequential limit ℓ, that is, its set of subsequential limits, defined in Section 2.4.3, is the singleton set $\{\ell\}$. Show that $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Exercise 3.11 : Let Ω be an open set in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Show that there exists an exhaustion of Ω by compact sets, that is, a sequence $(K_n)_{n\geqslant 1}$ satisfying

(i) $K_n \subseteq \Omega$ for all $n \geqslant 1$.

(ii) $K_n \subseteq K_{n+1}$ for all $n \geqslant 1$.

(iii) $\Omega = \cup_{n\geqslant 1} K_n$.

Hint: see below[1].

Exercise 3.12 : Let V be a normed vector space, and $A, B \subseteq V$ be two subsets. Assume that A is closed. Let $f : A \to B$ be a function, and define its graph as

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

(1) If f is continuous, show that its graph Γ_f is closed. Note that we have seen a similar statement in Exercise 2.42.

(2) Suppose that B is compact and Γ_f is closed. Show that f is continuous. Hint: you may use Exercise 3.10.

[1]For $n \geqslant 1$, consider $L_n := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \Omega^c) \geqslant 1/n\}$ and $K_n = \overline{B}(0, n) \cap L_n$.

習題 3.5 ： 令 (M, d) 為賦距空間且 $(K_n)_{n\geqslant 1}$ 為 M 中非空緊緻集合所構成的序列。假設對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $K_{n+1} \subseteq K_n$。設 $K = \cap_{n\geqslant 1} K_n$。

(1) 證明 $K \neq \varnothing$。

(2) 令 U 為包含 K 的開集。證明存在 $n \geqslant 1$ 使得 $K_n \subseteq U$。

我們注意到，當我們把 (M, d) 取做歐氏空間 $\mathbb{R}^n$，那麼 (1) 就只是 Cantor 交集定理。

習題 3.6 ： 令 V 及 W 為兩個賦範向量空間，$K \subseteq V$ 為緊緻子集合。令 $f : K \to W$ 為單射連續函數。證明 f 是個 K 與 $L = f(K)$ 之間的同胚函數。

習題 3.7 ： 令 I 與 J 為 $\mathbb{R}$ 的區間，且 $f : I \to J$ 為連續雙射函數。證明 f^{-1} 是連續的。

習題 3.8 ： 使用 Bolzano–Weierstraß 性質來證明習題 3.1 中的性質。

習題 3.9 ： 令 K_1, K_2 為兩個在賦範向量空間中的緊緻集合。證明下列集合是緊緻的：

$$K_1 + K_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}.$$

習題 3.10 ： 令 K 為在賦距空間 (M, d) 中的緊緻集合。給定取值在 K 中的序列 $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$。假設 x 只有一個子序列極限 ℓ，也就是說，在第 2.4.3 小節中定義出來的子序列極限集合，會是個單元素集合 $\{\ell\}$。證明 $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$。

習題 3.11 ： 令 Ω 為歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 中的開集。證明我們能把 Ω 用緊緻集合逼近，也就是說，我們能找到序列 $(K_n)_{n\geqslant 1}$ 滿足：

(i) $K_n \subseteq \Omega$ 對於所有 $n \geqslant 1$.

(ii) $K_n \subseteq K_{n+1}$ 對於所有 $n \geqslant 1$.

(iii) $\Omega = \cup_{n\geqslant 1} K_n$.

提示：如下[1]。

習題 3.12 ： 令 V 為賦範向量空間，且 $A, B \subseteq V$ 為兩個子集合。假設 A 是閉集。令 $f : A \to B$ 為函數，定義他的圖為

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

(1) 如果 f 是連續的，證明他的圖 Γ_f 是閉的。不要忘記，在習題 2.42 中，我們有看過類似的敘述。

(2) 假設 B 是緊緻且 Γ_f 是閉的。證明 f 是連續的。提示：你可以使用習題 3.10 。

[1]對於 $n \geqslant 1$，考慮 $L_n := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \Omega^c) \geqslant 1/n\}$ 還有 $K_n = \overline{B}(0, n) \cap L_n$。

Exercise 3.13 : Let $f:(E,d_E)\to(F,d_F)$ be a continuous function between two metric spaces.

(1) Suppose that for every compact set $K\subseteq F$, the preimage $f^{-1}(K)$ is also compact. Show that f is a closed map, that is, for any closed subset $A\subseteq E$, the image $f(A)$ is also closed. Hint: use Exercise 3.3.

(2) Are there continuous maps which are not closed?

(3) Let $n\geqslant 1$ be an integer. Consider the real vector space of polynomials of degree at most n, denoted by

$$\mathbb{R}_n[X]=\{P\in\mathbb{R}[X]:\deg(P)\leqslant n\}.$$

We equip $\mathbb{R}_n[X]$ with one of the norms from Example 2.1.9. (For example, $\|P\|_\infty=\max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k|$ for any $P=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$.) Let Γ_n be the set of monic polynomials of degree exactly n whose roots are all real. Show that Γ_n is closed in $\mathbb{R}_n[X]$. Hint: see below[2].

Exercise 3.14 : Let (M,d) be a metric space. For any subsets A,B in M, we define

$$d(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}d(x,y).$$

(1) Let K_1 and K_2 be two compact subsets of M. Show that there exists $x_1\in K_1$ and $x_2\in K_2$ such that $d(x_1,x_2)=d(K_1,K_2)$. Deduce that if $K_1\cap K_2=\varnothing$, then $d(K_1,K_2)>0$.

(2) Let $K\subseteq M$ be compact, and $A\subseteq M$ be closed. Show that if $K\cap A=\varnothing$, then $d(K,A)\neq 0$.

(3) In the previous question, is it enough to assume that both K and A are closed?

From now on, let us assume that (M,d) is the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with $n\geqslant 1$.

(4) Let $A\subseteq M=\mathbb{R}^n$ be an unbounded closed subset and $f:A\to\mathbb{R}$ be a continuous map such that

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in A}}f(x)=+\infty. \tag{E3.1}$$

Show that there exists $x\in A$ such that $f(x)=\inf_{y\in A}f(y)$. Hint: see below[3].

(5) Let $K\subseteq M=\mathbb{R}^n$ be a compact subset and $A\subseteq M=\mathbb{R}^n$ be a closed subset. Show that there exists $x\in K$ and $y\in A$ such that $d(x,y)=d(K,A)$.

(6) If M is an infinite dimensional normed vector space, show that (5) does not hold. In other words, find an infinite dimensional normed vector space M, a compact subset $K\subseteq M$, a closed subset $A\subseteq M$ such that for any $x\in K$ and $y\in A$, we have $d(x,y)\neq d(K,A)$.

[2] A possible proof starts by showing that if r is a root of $P\in\mathbb{P}_n[X]$, then $|r|\leqslant\max\{1,\|P\|_\infty\}$, before applying this result to check the conditions in (1).

[3] Eq. (E3.1) means that for any large enough $M>0$, there exists $R>0$ such that $\|x\|\geqslant R$ implies that $f(x)\geqslant M$.

習題 3.13 ： 令 $f:(E,d_E)\to(F,d_F)$ 為在兩個賦距空間之間的連續函數。

(1) 假設對於每個緊緻集合 $K\subseteq F$，像原 $f^{-1}(K)$ 也是緊緻的。證明 f 是個閉函數，也就是說，對於任意閉子集合 $A\subseteq E$，像 $f(A)$ 也是閉的。提示：使用習題 3.3 。

(2) 是否存在不是閉函數的連續函數？

(3) 令 $n\geqslant 1$ 為整數。考慮由次數最多為 n 的多項式所構成的實向量空間，記作

$$\mathbb{R}_n[X]=\{P\in\mathbb{R}[X]:\deg(P)\leqslant n\}.$$

我們在 $\mathbb{R}_n[X]$ 上，賦予範例 2.1.9 中其中一個範數。（例如 $\|P\|_\infty=\max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k|$ 對於任意 $P=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X]$。）令 Γ_n 為由次數剛好為 n，根皆是實數的首一多項式所構成的集合。證明 Γ_n 在 $\mathbb{R}_n[X]$ 裡面是閉的。提示：如下[2]。

習題 3.14 ： 令 (M,d) 為賦距空間。對於任意 M 的子集合 A,B，我們定義

$$d(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}d(x,y).$$

(1) 令 K_1 及 K_2 為兩個 M 的緊緻子集合。證明存在 $x_1\in K_1$ 和 $x_2\in K_2$ 使得 $d(x_1,x_2)=d(K_1,K_2)$。由此推得，如果 $K_1\cap K_2=\varnothing$，那麼 $d(K_1,K_2)>0$。

(2) 令 $K\subseteq M$ 為緊緻的，還有 $A\subseteq M$ 為閉的。證明如果 $K\cap A=\varnothing$，那麼 $d(K,A)\neq 0$。

(3) 在上述問題中，如果只假設 K 和 A 是閉的，這是足夠的嗎？

從現在起，我們假設 (M,d) 是個歐氏空間 $\mathbb{R}^n$，其中 $n\geqslant 1$。

(4) 令 $A\subseteq M=\mathbb{R}^n$ 為無界閉子集合，以及 $f:A\to\mathbb{R}$ 為連續函數，使得

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in A}}f(x)=+\infty. \tag{E3.1}$$

證明存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=\inf_{y\in A}f(y)$。提示：如下[3]。

(5) 令 $K\subseteq M=\mathbb{R}^n$ 為緊緻子集合且 $A\subseteq M=\mathbb{R}^n$ 為閉子集合。證明存在 $x\in K$ 還有 $y\in A$ 使得 $d(x,y)=d(K,A)$。

(6) 如果 M 是個無窮維度賦範向量空間，證明 (5) 不成立。換句話說，找出一個無窮維度賦範向量空間 M，$K\subseteq M$ 為緊緻子集合、$A\subseteq M$ 為閉子集合，使得對於任意 $x\in K$ 還有 $y\in A$，我們有 $d(x,y)\neq d(K,A)$。

[2] 一個可能的證明方式是先證明如果 r 是 $P\in\mathbb{P}_n[X]$ 的根，那麼他會滿足 $|r|\leqslant\max\{1,\|P\|_\infty\}$，接著再使用這個結果來檢查 (1) 中的條件。

[3] 式 (E3.1) 代表著對於任何夠大的 $M>0$，存在 $R>0$ 使得 $\|x\|\geqslant R$ 蘊含 $f(x)\geqslant M$。

Exercise 3.15 : Let $(V, \|\cdot\|)$ be a normed vector space and $K \subseteq V$ be a compact subset. Consider a function $f : K \to K$ satisfying

$$\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

Fix $a_0, b_0 \in K$, and define two iterative sequences as follow

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{and} \quad b_{n+1} = f(b_n).$$

(1) Show that for all $\varepsilon > 0$ and integer $p \geqslant 1$, there exists $k \geqslant p$ such that $\|a_k - a_0\| < \varepsilon$ and $\|b_k - b_0\| < \varepsilon$.

(2) Deduce from the previous question that $f(A)$ is dense in A.

(3) Consider $u_n = \|a_n - b_n\|$ for $n \geqslant 0$. Show that $(u_n)_{n \geqslant 0}$ is eventually constant.

(4) Deduce that f is an isometry, so injective.

(5) Show that f is surjective.

Exercise 3.16 : Let (M, d) be a compact metric space and $f : M \to M$ be a function satisfying

$$\forall x, y \in M, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

(1) Show that f has a unique fixed point, that we denote by α in what follows. Hint: see below[4].

(2) Let $x_0 \in M$. Define iteratively the sequence $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n \geqslant 0$. Show that $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$.

(3) If (M, d) is only a complete metric space, are these results still valid?

Exercise 3.17 : Let $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ be equipped with the 2-norm $\|\cdot\|_2$. For $n \in \mathbb{N}$, set $f_n(x) = e^{\mathrm{i}\,nx}$.

(1) Find the value of $\|f_n - f_m\|_2$ for $n, m \in \mathbb{N}$.

(2) Deduce that the bounded closed ball $\overline{B}(0, 1)$ is not compact.

Exercise 3.18 : Let V be a finite dimensional normed vector space and $K \subseteq V$ be a compact subset. Let $r > 0$ and $K_r := \cup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$. Show that K_r is a compact subset of V. What happens if V is an infinite dimensional normed vector space?

[4]Look at the map $x \mapsto d(x, f(x))$.

習題 3.15 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間且 $K \subseteq V$ 為緊緻子集合。考慮滿足下列條件的函數 $f : K \to K$：

$$\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

固定 $a_0, b_0 \in K$，並定義下面兩個迭代序列：

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{以及} \quad b_{n+1} = f(b_n).$$

(1) 證明對於所有 $\varepsilon > 0$ 還有整數 $p \geqslant 1$，會存在 $k \geqslant p$ 使得 $\|a_k - a_0\| < \varepsilon$ 還有 $\|b_k - b_0\| < \varepsilon$。

(2) 從上述問題推得 $f(A)$ 在 A 中是稠密的。

(3) 考慮 $u_n = \|a_n - b_n\|$ 對於 $n \geqslant 0$。證明 $(u_n)_{n \geqslant 0}$ 會固定在常數上。

(4) 推得 f 是個等距變換，所以也是單射函數。

(5) 證明 f 是個滿射函數。

習題 3.16 ： 令 (M, d) 為緊緻賦距空間且 $f : M \to M$ 是個滿足下列條件的函數：

$$\forall x, y \in M, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

(1) 證明 f 有唯一的不動點，我們把他記作 α。提示：如下[4]。

(2) 令 $x_0 \in M$。以迭代方式定義序列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 對於 $n \geqslant 0$。證明 $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$。

(3) 如果 (M, d) 只是個完備賦距空間，上面的結果還會是對的嗎？

習題 3.17 ： 令 $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ 並賦予範數 $\|\cdot\|_2$。對於 $n \in \mathbb{N}$，設 $f_n(x) = e^{\mathrm{i}\,nx}$。

(1) 對於所有 $n, m \in \mathbb{N}$，求 $\|f_n - f_m\|_2$ 的值。

(2) 推得有界的閉球 $\overline{B}(0, 1)$ 不是緊緻的。

習題 3.18 ： 令 V 為有限維度賦範向量空間以及 $K \subseteq V$ 為緊緻子集合。令 $r > 0$ 還有 $K_r := \cup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$。證明 K_r 是 V 的緊緻子集合。如果 V 是個無窮維度的賦範向量空間，會發生什麼事呢？

[4]可以考慮函數 $x \mapsto d(x, f(x))$。

Exercise 3.19 : Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Show that the following conditions are equivalent.

(i) For all $M > 0$, there exists $R > 0$ such that $\|x\| > R$ implies that $|f(x)| > M$.

(ii) For any bounded subset $B \subseteq \mathbb{R}$, the preimage $f^{-1}(B)$ is bounded in $\mathbb{R}^n$.

(iii) For any compact subset $K \subseteq \mathbb{R}$, the preimage $f^{-1}(K)$ is compact in $\mathbb{R}^n$.

Exercise 3.20 (Characterization of complete metric spaces) **:** Let (X, d) be a metric space. Show that the following statements are equivalent.

(i) The metric space (X, d) is complete.

(ii) Each sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in X having the property $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) < \infty$ is convergent.

(iii) Each Cauchy sequence $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in X has a convergent subsequence.

Exercise 3.21 : Show that a metric space (M, d) is compact if and only if it is precompact and complete.

Exercise 3.22 : Given a sequence of metric spaces $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ and consider the product metric space (M, d) given by $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ and the product distance defined in Definition 2.6.1. Show that the following properties are equivalent.

(i) (M, d) is complete.

(ii) (M_i, d_i) is complete for all $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercise 3.23 : Let (M, d) and (M', d') be two metric spaces, and $A \subseteq M$ be a dense subset.

(1) Consider a continuous function $f : (A, d) \to (M', d')$ and suppose that

$$\forall x \in M \backslash A, \quad \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) \text{ there exists.}$$

Show that there exists a unique continuous function $g : M \to M'$ such that $g_{|A} \equiv f$. The function g is called the *continuation* of f on M.

(2) Suppose that (M', d') is complete and consider a uniformly continuous function $f : (A, d) \to (M', d')$. Show that there exists a unique uniformly continuous function $g : M \to M'$ such that $g_{|A} \equiv f$. The function g is called the *uniform continuation* of f on M.

Exercise 3.24 : Let (M, d) be a complete metric space and $p \geqslant 1$ be an integer. Consider a map $f : M \to M$ such that f^p is a contraction.

(1) Show that f has a unique fixed point, denoted by x.

(2) For any $x_0 \in M$, define $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n \geqslant 0$, and show that $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

習題 3.19 ： 令 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 為連續函數。證明下列條件是等價的。

(i) 對於所有 $M > 0$，存在 $R > 0$ 使得 $\|x\| > R$ 蘊含 $|f(x)| > M$。

(ii) 對於任意有界子集合 $B \subseteq \mathbb{R}$，像原 $f^{-1}(B)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界。

(iii) 對於任意緊緻子集合 $K \subseteq \mathbb{R}$，像原 $f^{-1}(K)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是緊緻的。

習題 3.20 【完備空間的描述】 ： 令 (X, d) 為賦距空間。證明下列敘述是等價的。

(i) 賦距空間 (X, d) 是完備的。

(ii) 每個 X 中的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$，若滿足 $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) < \infty$ 的性質，那麼他會收斂。

(iii) 所有 X 中的柯西序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 有會收斂的子序列。

習題 3.21 ： 給定賦距空間 (M, d)。證明若且唯若他是緊緻的，則他是預緊緻且完備。

習題 3.22 ： 給定賦距空間序列 $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ 並考慮積賦距空間 (M, d) 其中積空間寫作 $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ 以及取定義 2.6.1 中的積距離。證明下列性質是等價的。

(i) (M, d) 是完備的。

(ii) 對於所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，賦距空間 (M_i, d_i) 是完備的。

習題 3.23 ： 令 (M, d) 及 (M', d') 為兩個賦距空間，且 $A \subseteq M$ 為稠密的子集合。

(1) 考慮連續函數 $f : (A, d) \to (M', d')$ 並假設

$$\forall x \in M \backslash A, \quad \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) \text{ 存在.}$$

證明存在唯一的連續函數 $g : M \to M'$ 使得 $g_{|A} \equiv f$。我們會說函數 g 是函數 f 在 M 上的連續延伸。

(2) 假設 (M', d') 是完備的，並考慮均勻連續函數 $f : (A, d) \to (M', d')$。證明存在唯一的均勻連續函數 $g : M \to M'$ 使得 $g_{|A} \equiv f$。我們會說函數 g 是函數 f 在 M 上的均勻連續延伸。

習題 3.24 ： 令 (M, d) 為完備賦距空間且 $p \geqslant 1$ 為整數。考慮 $f : M \to M$ 使得 f^p 是個收縮映射。

(1) 證明 f 有唯一的固定點，記作 x。

(2) 對於任意 $x_0 \in M$，對於所有 $n \geqslant 0$，我們定義 $x_{n+1} = f(x_n)$。證明 $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$。

Exercise 3.25 : Let $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ be a continuous function which is not identically 1 and $\alpha \in \mathbb{R}$. We denote by $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ the space of continuous and differentiable functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ such that the derivative is also continuous. We want to show that there exists a unique solution $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ to the differential equation,

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in [0,1].$$

Let $M = \mathcal{C}([0.1],\mathbb{R})$ be equipped with $\|\cdot\|_\infty$, which is a Banach space as we will see later in Exercise 3.30. Define $T : M \to M$ as below,

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

Show that $T^2 = T \circ T$ is a contraction, and conclude using Exercise 3.23.

Exercise 3.26 : Let V be a normed vector space over a field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Consider a linear form $f \in \mathcal{L}(V,\mathbb{K})$ which is not identically zero, then its kernel

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{E3.2}$$

is called an hyperplane (超平面) of V.

(1) Show that $\ker f$ is either closed or dense in V.

(2) Show that f is continuous if and only if $\ker f$ is closed in V.

Exercise 3.27 : Let $\ell^\infty(\mathbb{R})$ be the normed space of bounded sequences of real numbers, equipped with the infinite norm $\|\cdot\|_\infty$. Consider the subspace $V \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$ consisting of the convergent sequences. Let us define the map

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & \mathbb{R} \\ & (a_n)_{n\geqslant 1} & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} a_n. \end{array}$$

(1) Check that V is a subvector space, and that φ is a linear form, that is $\varphi \in \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$.

(2) Show that φ is continuous, and that $|||\varphi||| \leqslant 1$.

(3) Find a sequence $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ such that $|\varphi(a)| = \|a\|_\infty$ and deduce that $|||\varphi||| = 1$.

習題 3.25 ： 令 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ 為連續函數，假設他不是常數函數 1，並給定 $\alpha \in \mathbb{R}$。我們把所有從 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 連續可微、且微分也連續的函數構成的集合記作 $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$。我想要證明下列微分方程式存在唯一的解 $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$：

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in [0,1].$$

令 $M = \mathcal{C}([0.1],\mathbb{R})$，並賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$，稍後我們會在習題 3.30 中看到他會是個 Banach 空間。我們定義 $T : M \to M$ 如下：

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

證明 $T^2 = T \circ T$ 是個收縮映射，並且使用習題 3.23 來總結。

習題 3.26 ： 令 V 為在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範向量空間。考慮線性泛函 $f \in \mathcal{L}(V,\mathbb{K})$ 並假設他不是處處為零，那麼他的核

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{E3.2}$$

稱作 V 中的超平面 (hyperplane)。

(1) 證明 $\ker f$ 在 V 中是閉集，或是稠密的。

(2) 證明若且唯若 $\ker f$ 在 V 中是閉集，那麼 f 是連續的。

習題 3.27 ： 令 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 為由有界實數序列構成的賦範空間，其中我們考慮的範數是 $\|\cdot\|_\infty$。考慮由收斂序列構成的子空間 $V \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$。我們定義函數

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & \mathbb{R} \\ & (a_n)_{n\geqslant 1} & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} a_n. \end{array}$$

(1) 檢查 V 是個子向量空間，還有 φ 是個線性泛函，也就是說 $\varphi \in \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$。

(2) 證明 φ 是連續的，還有 $|||\varphi||| \leqslant 1$。

(3) 找到序列 $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $|\varphi(a)| = \|a\|_\infty$ 並推得 $|||\varphi||| = 1$。

Exercise 3.28 : Let $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ be the space of real continuous functions on $[0,1]$. Consider the subspace

$$V = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}.$$

Let $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ be the function $g : x \mapsto 1 - x$. Consider the endomorphism

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \to & V \\ & f & \mapsto & fg. \end{array}$$

(1) Show that F is linear and continuous.

(2) Show that $|||F||| = 1$.

Exercise 3.29 : Consider the linear form

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array},$$

where we equip $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ with $\|\cdot\|_1$.

(1) For every integer $n \geqslant 1$, consider the function $f_n : t \mapsto t^n$. Compute $\varphi(f_n)$ and $\|f_n\|_1$.

(2) Show that φ is not continuous.

Exercise 3.30 : Show that the space of sequences $\ell^1(\mathbb{R})$ and $\ell^2(\mathbb{R})$, defined in Example 2.1.6, are Banach spaces. Is $\ell^\infty(\mathbb{R})$ a Banach space?

Exercise 3.31 : Let (M,N) be a complete normed vector space. Show that $\mathcal{C}([0,1],M)$, the space of continuous functions from $[0,1]$ to M, equipped with the norm

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],M), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} N(f(x)) < \infty$$

is a Banach space. In particular, the space $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ equipped with $\|\cdot\|_\infty$ is Banach. Hint: see below[5].

[5] You may follow the steps suggested in Remark 3.2.19.

習題 3.28 ： 令 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 為 $[0,1]$ 上實連續函數所構成的空間。考慮子空間

$$V = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}.$$

令 $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 定義做 $g : x \mapsto 1 - x$。考慮自同態

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \to & V \\ & f & \mapsto & fg. \end{array}$$

(1) 證明 F 是線性且連續。

(2) 證明 $|||F||| = 1$。

習題 3.29 ： 考慮線性泛函

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array},$$

其中我們賦予 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 範數 $\|\cdot\|_1$。

(1) 對於每個整數 $n \geqslant 1$，考慮函數 $f_n : t \mapsto t^n$。計算 $\varphi(f_n)$ 及 $\|f_n\|_1$。

(2) 證明 φ 不是連續的。

習題 3.30 ： 證明在範例 2.1.6 中，我們所定義的序列集合構成的空間 $\ell^1(\mathbb{R})$ 和 $\ell^2(\mathbb{R})$ 皆是 Banach 空間。賦範空間 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 會是個 Banach 空間嗎？

習題 3.31 ： 令 (M,N) 為完備賦範向量空間。證明由 $[0,1]$ 到 M 連續函數構成的空間 $\mathcal{C}([0,1],M)$，賦予範數

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],M), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} N(f(x)) < \infty$$

時，會是個 Banach 空間。我們可以由此推得，空間 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 配上範數 $\|\cdot\|_\infty$ 是個 Banach 空間。提示：如下[5]。

[5] 你可以參考註解 3.2.19 並使用類似的步驟來證明。

Exercise 3.32 : Let E be an Euclidean space and $u \in \mathcal{L}(E)$. Suppose that u is symmetric, that is

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Let S be the centered unit sphere of E and $\varphi : S \to \mathbb{R}$ be a map defined by $\varphi(x) = \langle x, u(x)\rangle$.

(1) Justify φ attains its maximum on S. We will write $x_0 \in S$ where this maximum is attained.

(2) Let y be a unit vector that is orthogonal to x. We define the following two functions on $\mathbb{R}$. For $t \in \mathbb{R}$, let

$$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \quad \text{and} \quad f(t) = \langle u(x(t)), x(t)\rangle.$$

Show that f attains its maximum at 0, and deduce that y is orthogonal to $u(x_0)$.

(3) Show that x_0 is an eigenvalue of u.

Exercise 3.33 : Let $(V, \|\cdot\|)$ be a normed space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Let $\hat{V}$ be the completion of V as in Proposition 3.3.6. Define the addition and the scalar product on $\hat{V}$ by

$$(x_n)_{n\geqslant 1} + (y_n)_{n\geqslant 1} := (x_n + y_n)_{n\geqslant 1}, \quad \text{and} \quad a \cdot (x_n)_{n\geqslant 1} := (ax_n)_{n\geqslant 1}$$

for all $(x_n)_{n\geqslant 1}, (y_n)_{n\geqslant 1} \in \hat{V}$ and $a \in \mathbb{K}$. Show that these two operations makes $\hat{V}$ into a vector space, and thus a Banach space.

Exercise 3.34 : In this exercise, we give another construction of the completion of a metric space. Let (X, d) be a nonempty metric space, and fix a point $x_0 \in X$.

(1) Let $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ be the set of all the bounded real-valued functions on X, equipped with the norm $\|\cdot\|_\infty$. Show that $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ is complete.

Hint: It is very similar to Exercise 3.30. If $(f_n)_{n\geqslant 1}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, then $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$ for all $x \in X$. The limit of $(f_n)_{n\geqslant 1}$ will be $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) For every $x \in X$, define the function $f_x : X \to \mathbb{R}$ by

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0).$$

Show that f_x is bounded and thus $f_x \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

(3) Show that the map $F : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), x \mapsto f_x$, is an isometry.

(4) Deduce that $(\overline{F(X)}, \|\cdot\|_\infty)$ is a completion of (X, d).

習題 3.32 ： 令 E 為歐氏空間且 $u \in \mathcal{L}(E)$。假設 u 是對稱的，也就是說

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

令 S 為 E 的置中單位求殼以及 $\varphi : S \to \mathbb{R}$ 為定義做 $\varphi(x) = \langle x, u(x)\rangle$ 的函數。

(1) 解釋 φ 為什麼會在 S 上會碰到他的最大值。我們記 $x_0 \in S$ 為函數碰到此最大值的一個點。

(2) 令 y 為和 x 正交的單位向量。我們定義下列兩個在 $\mathbb{R}$ 上的函數。對於 $t \in \mathbb{R}$，令

$$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \quad \text{以及} \quad f(t) = \langle u(x(t)), x(t)\rangle.$$

證明 f 在 0 會取最大值，並推得 y 與 $u(x_0)$ 正交。

(3) 證明 x_0 是 u 的特徵值。

習題 3.33 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的賦範向量空間。我們使用命題 3.3.6 中的記號，令 $\hat{V}$ 為 V 的完備化空間。在 $\hat{V}$ 上我們定義加法還有純量積：

$$(x_n)_{n\geqslant 1} + (y_n)_{n\geqslant 1} := (x_n + y_n)_{n\geqslant 1}, \quad \text{以及} \quad a \cdot (x_n)_{n\geqslant 1} := (ax_n)_{n\geqslant 1}$$

對於所有 $(x_n)_{n\geqslant 1}, (y_n)_{n\geqslant 1} \in \hat{V}$ 還有 $a \in \mathbb{K}$。證明這兩個運算讓 $\hat{V}$ 變成向量空間，也就是說他會是個 Banach 空間。

習題 3.34 ： 在此習題中，我們用另外的方式來把賦距空間完備化。令 (X, d) 為非空賦距空間，並固定 $x_0 \in X$。

(1) 令 $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ 為所有 X 上有界實數函數構成的集合，並且賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$。證明 $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 是完備的。

提示：與習題 3.30 非常類似。如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個 $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ 中的柯西序列，那麼對於所有 $x \in X$，$(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ 會是 $\mathbb{R}$ 中的柯西序列。序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 的極限會是 $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$。

(2) 對於所有 $x \in X$，定義函數 $f_x : X \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0).$$

證明 f_x 有界，因此 $f_x \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$。

(3) 證明映射 $F : X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), x \mapsto f_x$ 是個等距變換。

(4) 由此推得 $(\overline{F(X)}, \|\cdot\|_\infty)$ 是 (X, d) 的完備化空間。

Exercise 3.35 : The extended complex plane $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is defined to be the union of $\mathbb{C}$ with an extra point ∞.

(1) Show that the function d defined on $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$ by

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \qquad \text{for all } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$
$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \qquad \text{for all } z_1 \in \mathbb{C},$$

is a metric on $\widehat{\mathbb{C}}$.

(2) Show that $(\widehat{\mathbb{C}}, d)$ is a complete and compact metric space.

習題 3.35 ： 擴充複數平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{C}$ 與額外的點 ∞ 的聯集。

(1) 我們在 $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$ 上定義函數 d：

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \qquad \text{對於所有 } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$
$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \qquad \text{對於所有 } z_1 \in \mathbb{C}.$$

證明他在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上是個距離。

(2) 證明 $(\widehat{\mathbb{C}}, d)$ 是個完備且緊緻的賦距空間。