

第三章：緊緻空間及完備空間

習題 3.1：令 (M, d) 為緊緻賦距空間且 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 為函數。我們不要忘記， M 會滿足 Borel-Lebesgue 性質。

- (1) 假設 f 是局部有界的，也就是說，對於所有 $x \in M$ ，存在 $r_x > 0$ 和 $A_x > 0$ 使得

$$\forall y \in B(x, r_x), \quad |f(y)| \leq A_x.$$

證明 f 在 M 上是有界的。

- (2) 假設 f 是局部 Lipschitz 連續的，也就是說，對於所有 $x \in M$ ，存在 $r_x > 0$ 和 $K_x > 0$ 使得

$$\forall y, z \in B(x, r_x), \quad |f(y) - f(z)| \leq K_x \cdot d(y, z).$$

證明 f 在 M 上是 Lipschitz 連續的。

習題 3.2：令 (M, d) 為賦距空間， $A \subseteq M$ 為緊緻子集合，且 $B \subseteq M$ 為閉子集合，滿足 $A \cap B = \emptyset$ 。

- (1) 對 A 使用 Borel-Lebesgue 性質，來證明存在開子集 $U \subseteq M$ 使得 $A \subseteq U$ 還有 $\bar{U} \cap B = \emptyset$ 。
提示： B^c 是開集。

- (2) 假設 B 也是緊緻的。從上述問題推得出來，存在開集 U 和 V 使得

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad \text{以及} \quad \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

習題 3.3：令 (M, d) 為賦距空間以及 $(x_n)_{n \geq 1}$ 為在 M 中的收斂序列，我們將他的極限記作 ℓ 。使用 Borel-Lebesgue 性質來證明集合

$$\Gamma = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{\ell\}$$

是緊緻的。

習題 3.4：令 (K_1, d_1) 及 (K_2, d_2) 為兩個緊緻賦距空間。證明在積空間 $K_1 \times K_2$ 上賦予積距離 $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ 會滿足 Borel-Lebesgue 性質，並推得他是緊緻的。證明任意有限個緊緻賦距空間的積空間還是緊緻的。

習題 3.5 : 令 (M, d) 為賦距空間且 $(K_n)_{n \geq 1}$ 為 M 中非空緊緻集合所構成的序列。假設對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $K_{n+1} \subseteq K_n$ 。設 $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$ 。

(1) 證明 $K \neq \emptyset$ 。

(2) 令 U 為包含 K 的開集。證明存在 $n \geq 1$ 使得 $K_n \subseteq U$ 。

我們注意到，當我們把 (M, d) 取做歐氏空間 \mathbb{R}^n ，那麼 (1) 就只是 Cantor 交集定理。

習題 3.6 : 令 V 及 W 為兩個賦範向量空間， $K \subseteq V$ 為緊緻子集合。令 $f: K \rightarrow W$ 為單射連續函數。證明 f 是個 K 與 $L = f(K)$ 之間的同胚函數。

習題 3.7 : 令 I 與 J 為 \mathbb{R} 的區間，且 $f: I \rightarrow J$ 為連續雙射函數。證明 f^{-1} 是連續的。

習題 3.8 : 使用 Bolzano–Weierstraß 性質來證明習題 3.1 中的性質。

習題 3.9 : 令 K_1, K_2 為兩個在賦範向量空間中的緊緻集合。證明下列集合是緊緻的：

$$K_1 + K_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}.$$

習題 3.10 : 令 K 為在賦距空間 (M, d) 中的緊緻集合。給定取值在 K 中的序列 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 。假設 x 只有一個子序列極限 ℓ ，也就是說，在 [第 2.4.3 小節](#) 中定義出來的子序列極限集合，會是個單元素集合 $\{\ell\}$ 。證明 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ 。

習題 3.11 : 令 Ω 為歐氏空間 \mathbb{R}^n 中的開集。證明我們能把 Ω 用緊緻集合逼近，也就是說，我們能找到序列 $(K_n)_{n \geq 1}$ 滿足：

(i) $K_n \subseteq \Omega$ 對於所有 $n \geq 1$ 。

(ii) $K_n \subseteq K_{n+1}$ 對於所有 $n \geq 1$ 。

(iii) $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ 。

提示：如下¹。

習題 3.12 : 令 V 為賦範向量空間，且 $A, B \subseteq V$ 為兩個子集合。假設 A 是閉集。令 $f: A \rightarrow B$ 為函數，定義他的圖為

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

(1) 如果 f 是連續的，證明他的圖 Γ_f 是閉的。不要忘記，在習題 2.42 中，我們有看過類似的敘述。

(2) 假設 B 是緊緻且 Γ_f 是閉的。證明 f 是連續的。提示：你可以使用習題 3.10。

¹對於 $n \geq 1$ ，考慮 $L_n := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \Omega^c) \geq 1/n\}$ 還有 $K_n = \overline{B}(0, n) \cap L_n$ 。

習題 3.13 : 令 $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ 為在兩個賦距空間之間的連續函數。

- (1) 假設對於每個緊緻集合 $K \subseteq F$ ，像原 $f^{-1}(K)$ 也是緊緻的。證明 f 是個閉函數，也就是說，對於任意閉子集合 $A \subseteq E$ ，像 $f(A)$ 也是閉的。提示：使用習題 3.3。
- (2) 是否存在不是閉函數的連續函數？
- (3) 令 $n \geq 1$ 為整數。考慮由次數最多為 n 的多項式所構成的實向量空間，記作

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}.$$

我們在 $\mathbb{R}_n[X]$ 上，賦予範例 2.1.9 中其中一個範數。（例如 $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$ 對於任意 $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ 。）令 Γ_n 為由次數剛好為 n ，根皆是實數的首一多項式所構成的集合。證明 Γ_n 在 $\mathbb{R}_n[X]$ 裡面是閉的。提示：如下²。

習題 3.14 : 令 (M, d) 為賦距空間。對於任意 M 的子集合 A, B ，我們定義

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

- (1) 令 K_1 及 K_2 為兩個 M 的緊緻子集合。證明存在 $x_1 \in K_1$ 和 $x_2 \in K_2$ 使得 $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$ 。由此推得，如果 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ，那麼 $d(K_1, K_2) > 0$ 。
- (2) 令 $K \subseteq M$ 為緊緻的，還有 $A \subseteq M$ 為閉的。證明如果 $K \cap A = \emptyset$ ，那麼 $d(K, A) \neq 0$ 。
- (3) 在上述問題中，如果只假設 K 和 A 是閉的，這是足夠的嗎？

從現在起，我們假設 (M, d) 是個歐氏空間 \mathbb{R}^n ，其中 $n \geq 1$ 。

- (4) 令 $A \subseteq M = \mathbb{R}^n$ 為無界閉子集合，以及 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數，使得

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in A}} f(x) = +\infty. \quad (\text{E3.1})$$

證明存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = \inf_{y \in A} f(y)$ 。提示：如下³。

- (5) 令 $K \subseteq M = \mathbb{R}^n$ 為緊緻子集合且 $A \subseteq M = \mathbb{R}^n$ 為閉子集合。證明存在 $x \in K$ 還有 $y \in A$ 使得 $d(x, y) = d(K, A)$ 。
- (6) 如果 M 是個無窮維度賦範向量空間，證明 (5) 不成立。換句話說，找出一個無窮維度賦範向量空間 M ， $K \subseteq M$ 為緊緻子集合、 $A \subseteq M$ 為閉子集合，使得對於任意 $x \in K$ 還有 $y \in A$ ，我們有 $d(x, y) \neq d(K, A)$ 。

²一個可能的證明方式是先證明如果 r 是 $P \in \mathbb{P}_n[X]$ 的根，那麼他會滿足 $|r| \leq \max\{1, \|P\|_\infty\}$ ，接著再使用這個結果來檢查 (1) 中的條件。

³式 (E3.1) 代表著對於任何夠大的 $M > 0$ ，存在 $R > 0$ 使得 $\|x\| \geq R$ 蘊含 $f(x) \geq M$ 。

習題 3.15 : 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間且 $K \subseteq V$ 為緊緻子集合。考慮滿足下列條件的函數 $f : K \rightarrow K$:

$$\forall x, y \in K, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

固定 $a_0, b_0 \in K$, 並定義下面兩個迭代序列 :

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{以及} \quad b_{n+1} = f(b_n).$$

- (1) 證明對於所有 $\varepsilon > 0$ 還有整數 $p \geq 1$, 會存在 $k \geq p$ 使得 $\|a_k - a_0\| < \varepsilon$ 還有 $\|b_k - b_0\| < \varepsilon$ 。
- (2) 從上述問題推得 $f(A)$ 在 A 中是稠密的。
- (3) 考慮 $u_n = \|a_n - b_n\|$ 對於 $n \geq 0$ 。證明 $(u_n)_{n \geq 0}$ 會固定在常數上。
- (4) 推得 f 是個等距變換, 所以也是單射函數。
- (5) 證明 f 是個滿射函數。

習題 3.16 : 令 (M, d) 為緊緻賦距空間且 $f : M \rightarrow M$ 是個滿足下列條件的函數 :

$$\forall x, y \in M, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

- (1) 證明 f 有唯一的不動點, 我們把他記作 α 。提示 : 如下⁴ 。
- (2) 令 $x_0 \in M$ 。以迭代方式定義序列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 對於 $n \geq 0$ 。證明 $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$ 。
- (3) 如果 (M, d) 只是個完備賦距空間, 上面的結果還會是對的嗎?

習題 3.17 : 令 $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ 並賦予範數 $\|\cdot\|_2$ 。對於 $n \in \mathbb{N}$, 設 $f_n(x) = e^{inx}$ 。

- (1) 對於所有 $n, m \in \mathbb{N}$, 求 $\|f_n - f_m\|_2$ 的值。
- (2) 推得有界的閉球 $\overline{B}(0, 1)$ 不是緊緻的。

習題 3.18 : 令 V 為有限維度賦範向量空間以及 $K \subseteq V$ 為緊緻子集合。令 $r > 0$ 還有 $K_r := \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$ 。證明 K_r 是 V 的緊緻子集合。如果 V 是個無窮維度的賦範向量空間, 會發生什麼事呢?

⁴可以考慮函數 $x \mapsto d(x, f(x))$ 。

習題 3.19 : 令 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數。證明下列條件是等價的。

- (i) 對於所有 $M > 0$ ，存在 $R > 0$ 使得 $\|x\| > R$ 蘊含 $|f(x)| > M$ 。
- (ii) 對於任意有界子集 $B \subseteq \mathbb{R}$ ，像原 $f^{-1}(B)$ 在 \mathbb{R}^n 中有界。
- (iii) 對於任意緊緻子集 $K \subseteq \mathbb{R}$ ，像原 $f^{-1}(K)$ 在 \mathbb{R}^n 中是緊緻的。

習題 3.20 【完備空間的描述】 : 令 (X, d) 為賦距空間。證明下列敘述是等價的。

- (i) 賦距空間 (X, d) 是完備的。
- (ii) 每個 X 中的序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ ，若滿足 $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) < \infty$ 的性質，那麼他會收斂。
- (iii) 所有 X 中的柯西序列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 有會收斂的子序列。

習題 3.21 : 給定賦距空間 (M, d) 。證明若且唯若他是緊緻的，則他是預緊緻且完備。

習題 3.22 : 給定賦距空間序列 $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ 並考慮積賦距空間 (M, d) 其中積空間寫作 $M = M_1 \times \dots \times M_n$ 以及取定義 2.6.1 中的積距離。證明下列性質是等價的。

- (i) (M, d) 是完備的。
- (ii) 對於所有 $1 \leq i \leq n$ ，賦距空間 (M_i, d_i) 是完備的。

習題 3.23 : 令 (M, d) 及 (M', d') 為兩個賦距空間，且 $A \subseteq M$ 為稠密的子集合。

- (1) 考慮連續函數 $f : (A, d) \rightarrow (M', d')$ 並假設

$$\forall x \in M \setminus A, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} f(y) \text{ 存在.}$$

證明存在唯一的連續函數 $g : M \rightarrow M'$ 使得 $g|_A \equiv f$ 。我們會說函數 g 是函數 f 在 M 上的連續延伸。

- (2) 假設 (M', d') 是完備的，並考慮均勻連續函數 $f : (A, d) \rightarrow (M', d')$ 。證明存在唯一的均勻連續函數 $g : M \rightarrow M'$ 使得 $g|_A \equiv f$ 。我們會說函數 g 是函數 f 在 M 上的均勻連續延伸。

習題 3.24 : 令 (M, d) 為完備賦距空間且 $p \geq 1$ 為整數。考慮 $f : M \rightarrow M$ 使得 f^p 是個收縮映射。

- (1) 證明 f 有唯一的固定點，記作 x 。
- (2) 對於任意 $x_0 \in M$ ，對於所有 $n \geq 0$ ，我們定義 $x_{n+1} = f(x_n)$ 。證明 $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ 。

習題 3.25 : 令 $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 為連續函數，假設他不是常數函數 1，並給定 $\alpha \in \mathbb{R}$ 。我們把所有從 $[0, 1]$ 到 \mathbb{R} 連續可微、且微分也連續的函數構成的集合記作 $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ 。我想要證明下列微分方程式存在唯一的解 $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ：

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in [0, 1].$$

令 $M = C([0, 1], \mathbb{R})$ ，並賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$ ，稍後我們會在習題 3.30 中看到他會是個 Banach 空間。我們定義 $T : M \rightarrow M$ 如下：

$$\forall x \in [0, 1], \quad Tf(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) dt.$$

證明 $T^2 = T \circ T$ 是個收縮映射，並且使用習題 3.23 來總結。

習題 3.26 : 令 V 為在域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 上的賦範向量空間。考慮線性泛函 $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ 並假設他不是處處為零，那麼他的核

$$\text{Ker}(f) := \{x \in V : f(x) = 0\} \tag{E3.2}$$

稱作 V 中的超平面 (hyperplane)。

- (1) 證明 $\text{ker } f$ 在 V 中是閉集，或是稠密的。
- (2) 證明若且唯若 $\text{ker } f$ 在 V 中是閉集，那麼 f 是連續的。

習題 3.27 : 令 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 為由有界實數序列構成的賦範空間，其中我們考慮的範數是 $\|\cdot\|_\infty$ 。考慮由收斂序列構成的子空間 $V \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$ 。我們定義函數

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a_n)_{n \geq 1} &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

- (1) 檢查 V 是個子向量空間，還有 φ 是個線性泛函，也就是說 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 。
- (2) 證明 φ 是連續的，還有 $\|\varphi\| \leq 1$ 。
- (3) 找到序列 $a = (a_n)_{n \geq 1}$ 使得 $|\varphi(a)| = \|a\|_\infty$ 並推得 $\|\varphi\| = 1$ 。

習題 3.28 : 令 $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 為 $[0, 1]$ 上實連續函數所構成的空間。考慮子空間

$$V = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 0\}.$$

令 $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 定義做 $g : x \mapsto 1 - x$ 。考慮自同態

$$\begin{aligned} F : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto fg. \end{aligned}$$

- (1) 證明 F 是線性且連續。
- (2) 證明 $\|F\| = 1$ 。

習題 3.29 : 考慮線性泛函

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(1), \end{aligned}$$

其中我們賦予 $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 範數 $\|\cdot\|_1$ 。

- (1) 對於每個整數 $n \geq 1$ ，考慮函數 $f_n : t \mapsto t^n$ 。計算 $\varphi(f_n)$ 及 $\|f_n\|_1$ 。
- (2) 證明 φ 不是連續的。

習題 3.30 : 證明在範例 2.1.6 中，我們所定義的序列集合構成的空間 $\ell^1(\mathbb{R})$ 和 $\ell^2(\mathbb{R})$ 皆是 Banach 空間。賦範空間 $\ell^\infty(\mathbb{R})$ 會是個 Banach 空間嗎？

習題 3.31 : 令 (M, N) 為完備賦範向量空間。證明由 $[0, 1]$ 到 M 連續函數構成的空間 $\mathcal{C}([0, 1], M)$ ，賦予範數

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], M), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} N(f(x)) < \infty$$

時，會是個 Banach 空間。我們可以由此推得，空間 $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ 配上範數 $\|\cdot\|_\infty$ 是個 Banach 空間。提示：如下⁵。

⁵你可以參考註解 3.2.19 並使用類似的步驟來證明。

習題 3.32：令 E 為歐氏空間且 $u \in \mathcal{L}(E)$ 。假設 u 是對稱的，也就是說

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

令 S 為 E 的置中單位球以及 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ 為定義做 $\varphi(x) = \langle x, u(x) \rangle$ 的函數。

- (1) 解釋 φ 為什麼會在 S 上會碰到他的最大值。我們記 $x_0 \in S$ 為函數碰到此最大值的一個點。
- (2) 令 y 為和 x 正交的單位向量。我們定義下列兩個在 \mathbb{R} 上的函數。對於 $t \in \mathbb{R}$ ，令

$$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \quad \text{以及} \quad f(t) = \langle u(x(t)), x(t) \rangle.$$

證明 f 在 0 會取最大值，並推得 y 與 $u(x_0)$ 正交。

- (3) 證明 x_0 是 u 的特徵值。

習題 3.33：令 $(V, \|\cdot\|)$ 為在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 上的賦範向量空間。我們使用命題 3.3.6 中的記號，令 \hat{V} 為 V 的完備化空間。在 \hat{V} 上我們定義加法還有純量積：

$$(x_n)_{n \geq 1} + (y_n)_{n \geq 1} := (x_n + y_n)_{n \geq 1}, \quad \text{以及} \quad a \cdot (x_n)_{n \geq 1} := (ax_n)_{n \geq 1}$$

對於所有 $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \in \hat{V}$ 還有 $a \in \mathbb{K}$ 。證明這兩個運算讓 \hat{V} 變成向量空間，也就是說他會是個 Banach 空間。

習題 3.34：在此習題中，我們用另外的方式來把賦距空間完備化。令 (X, d) 為非空賦距空間，並固定 $x_0 \in X$ 。

- (1) 令 $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ 為所有 X 上有界實數函數構成的集合，並且賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$ 。證明 $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 是完備的。

提示：與習題 3.30 非常類似。如果 $(f_n)_{n \geq 1}$ 是個 $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ 中的柯西序列，那麼對於所有 $x \in X$ ， $(f_n(x))_{n \geq 1}$ 會是 \mathbb{R} 中的柯西序列。序列 $(f_n)_{n \geq 1}$ 的極限會是 $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 。

- (2) 對於所有 $x \in X$ ，定義函數 $f_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0).$$

證明 f_x 有界，因此 $f_x \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ 。

- (3) 證明映射 $F: X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), x \mapsto f_x$ 是個等距變換。
- (4) 由此推得 $(\overline{F(X)}, \|\cdot\|_\infty)$ 是 (X, d) 的完備化空間。

習題 3.35：擴充複數平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 \mathbb{C} 與額外的點 ∞ 的聯集。

(1) 我們在 $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$ 上定義函數 d ：

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}} \quad \text{對於所有 } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \quad \text{對於所有 } z_1 \in \mathbb{C}.$$

證明他在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上是個距離。

(2) 證明 $(\widehat{\mathbb{C}}, d)$ 是個完備且緊緻的賦距空間。