第四章

習題 4.1 ： 計算下列函數的微分。

(a) $f_1(x,y) = e^{xy}(x+y)$.

(b) $f_2(x,y) = xyz + xy + yz + zx$.

(c) $f_3(r,t) = (r\cos t, r\sin t)$.

習題 4.2 ： 令 V 以及 W 為兩個賦範向量空間。證明如果 $f : V \to W$ 在 $x \in V$ 是可微的，那麼 f 在 x 也是局部 Lipschitz 連續的；也就是說存在 $K > 0$ 和 $r > 0$ 使得對於任意 $y \in B(x,r)$，我們有 $\|f(y) - f(x)\|_W \leqslant K\|y - x\|_V$。

習題 4.3 ： 令 $n \geqslant 1$ 為整數。

(1) 證明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det M \neq 0\}$ 在 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 裡面是個開集。

考慮函數 $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$。我們回顧在線性代數課程中所討論過的：對於 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，他的反函數可以寫作 $M^{-1} = (\det M)^{-1}\widetilde{M}$，其中 $\widetilde{M}$ 是 M 的伴隨矩陣 (adjugate matrix)。我們注意到，伴隨矩陣的係數是由原本矩陣係數，透過乘積的線性組合而得到的。這可以讓我們看出來，函數 φ 會是 $\mathcal{C}^1$ 類的（其實我們可以得到 $\mathcal{C}^\infty$ 類）。

(2) 證明 φ 在 I_n 是可微的，並且計算他的微分 $\mathrm{d}\varphi_{I_n}$。

(3) 給定 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$。證明 φ 在 M 可微，並計算他的微分 $\mathrm{d}\varphi_M$。

習題 4.4 ： 令映射 $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 定義做 $\varphi(u) = u \circ u$。證明 φ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。

習題 4.5 ： 我們在空間 $M = \mathbb{R}_n[X]$ 上賦予範數 $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$。考慮

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (P(t))^3 \,\mathrm{d}t \end{array}.$$

證明 φ 在 M 上是可微的，並且計算他的微分。試問映射 $P \mapsto \mathrm{d}\varphi_P$ 是連續的嗎？

習題 4.6 【不可微分性】：

(1) 考慮賦範空間 $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 以及最小上界範數 $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$。令 $f \in V$ 使得存在至少兩個 $[0,1]$ 中的點 t，滿足 $|f(t)| = \|f\|_\infty$。證明由最小上界範數所定義出來的函數 $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}$ 在這樣的 f 是不可微的。

(2) 令 $V \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$ 為由所有極限為 0 的有界序列所構成的子空間。換句話說，我們有

$$V = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}.$$

證明範數函數 $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}$ 在 $a = (a_n)_{\geqslant 1}$ 可微，若且唯若存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n| = \|a\|_\infty$。

(3) 讓我們回到習題 3.29 中所考慮的線性泛函：

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}.$$

證明如果我們在 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 上賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$，那麼 φ 在任何的點 $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 皆是可微分的。求微分映射 $D\varphi$。這證明了範數的選擇如何影響相同函數的連續性與可微分性。

習題 4.7 ： 令 f 是個由賦範空間 V 至賦範空間 W 的映射。

(1) 給定 $x \in V$，解釋下面兩個性質的差別：
   (a) $\mathrm{d}f$ 在 x 是連續的。
   (b) $\mathrm{d}f_x$ 是連續的。

(2) 證明對於固定的 $x \in V$，如果 $\mathrm{d}f_x$ 存在，那麼 f 在 x 是連續且可微。

(3) 請給出映射 f 的例子，使得 $\mathrm{d}f$ 是連續但不可微。

習題 4.8 ： 令 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 以及 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 為開子集。考慮可微函數 $f : U \to V$ 並假設

(i) f 在某個 $a \in U$ 是可微的；

(ii) f 的反函數 $g : V \to U$ 存在；

(iii) g 在 $b = f(a) \in V$ 是可微的。

證明 $m = n$。

習題 4.9 ： 令 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 為可微函數。假設對於所有 $\lambda\in\mathbb{R}$ 以及 $x\in\mathbb{R}^n$，我們有 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$。

(1) 證明 $f(0)=0$。

(2) 證明 f 是線性的。

習題 4.10 ： 令 $(V,\|\cdot\|_V)$ 以及 $(W,\|\cdot\|_W)$ 為兩個賦範向量空間。考慮開集合 $A\subseteq V$ 以及 $f:A\to W$。我們回顧在定義 4.1.1 中對於微分的定義。假設存在映射 φ，對於所有 $h\in V$，能夠滿足下列比較弱的條件

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left\|f(x+\lambda h)-f(x)-\lambda\varphi(h)\right\|_W=0$$

則我們說 f 在 x 是 *Gâteaux* 可微 的，且 φ 是 f 在 x 的 Gâteaux 微分。證明如果 f 在 x 是可微的，那麼他在 x 也是 Gâteaux 可微的，且兩種微分是相同的。

習題 4.11 ： 我們考慮下面兩個函數：

$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln|x| & \text{若 } x\neq 0,\\ 0 & \text{其他情況,}\end{cases}\qquad \text{以及}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{其他情況.}\end{cases}$$

(1) 證明 f 和 g 在 $(0,0)$ 不連續。

(2) 證明 f 和 g 在 $(0,0)$ 對於任意方向 $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$，他的方向微分皆存在。

(3) 試問 f 和 g 是可微的嗎？

習題 4.12 ： 考慮函數 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定義做：

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 函數 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是否是連續的？

(2) 他是 $\mathcal{C}^1$ 類的嗎？

(3) 他是 $\mathcal{C}^2$ 類的嗎？

習題 4.13 ： 令 $(V, \|\cdot\|_V)$ 與 $(W, \|\cdot\|_W)$ 為兩個賦範向量空間，且 $A \subseteq V$ 為非空開子集合。假設函數 $f : A \to W$ 在 A 上連續、可微，且滿足 $\mathrm{d}f_a \equiv 0$ 對於所有 $a \in A$。你不允許使用定理 2.7.27 的結果，但可以使用他證明中的想法。

(1) 我們假設 A 是弧連通的。證明 f 是個常數函數。

(2) 我們假設 A 只是連通的。固定 $x_0 \in A$ 並考慮 $\Gamma = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\}$。證明 Γ 在 A 中既是開集也是閉集，由此推得 f 是個常數函數。

習題 4.14 ： 令 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 為滿足下列條件的函數：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^{1+\varepsilon}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是固定的。證明 f 是個常數函數。

習題 4.15 ： 令 V 為 Banach 空間。令 A 為 V 中的開集，給定 $r > 0$ 使得 $K = \overline{B}(0, r)$ 為包含在 A 中的閉球。令 $f : A \to V$。假設 f 在 K 上的每個點皆可微，且 $f(K) \subset K$，我們也假設 $\sup\{\|\mathrm{d}f_x\| : x \in K\} < 1$。證明 f 在 K 中有唯一的不動點。提示：使用均值定理還有不動點定理。

習題 4.16 ： 令 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 為 $\mathcal{C}^1$ 類函數。計算下列函數的微分（單變數函數）或是偏微分（多變數函數）：

(a) $g(x, y) = f(y, x)$.

(b) $g(x) = f(x, x)$.

(c) $g(x, y) = f(y, f(x, x))$.

(d) $g(x) = f(x, f(x, x))$.

習題 4.17 ： 令 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ 定義做

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}.$$

(1) 解釋 f 為什麼是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。

(2) 我們在 $(0, 0)$ 應該如何定義 f 的取值，才能使得他能夠連續延拓到 $\mathbb{R}^2$ 上呢？我們把延拓過後的函數記作 $\widetilde{f}$。

(3) 證明偏微分 $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(0, 0)$ 不存在。進而推得 $\widetilde{f}$ 在 $(0, 0)$ 不可微。

習題 4.18 ： 令 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 為 $\mathcal{C}^1$ 類函數。如果

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^2,\quad \forall t>0,\quad f(tx,ty)=t^r f(x,y),$$

則我們說 f $r\in\mathbb{R}$ 次的均勻函數。

(1) 證明如果 f 是 r 次的均勻函數，那麼他的偏微分皆是 $r-1$ 次的均勻函數。

(2) 證明若且唯若

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^2,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=rf(x,y),$$

則 f 是 r 次的均勻函數。

(3) 假設 f 是 $\mathcal{C}^2$ 類的，證明

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=r(r-1)f(x,y).$$

習題 4.19 ： 令 A 為 $\mathbb{R}^n$ 中的開子集合，$f:A\to\mathbb{R}$ 是個 $\mathcal{C}^p$ 類函數，其中 $p\geqslant 1$，還有 $a\in A$。模仿定理 4.3.2 的證明，證明下列 Taylor 展開式。

(1) 令 $x\in A$ 以及 $h\in\mathbb{R}^n$ 使得 $[x,x+h]\subseteq A$。那麼我們有

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{m=1}^{p-1}\frac{f_h^{(m)}(x)}{m!}+\int_0^1\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}f_h^{(p)}(x+th)\,\mathrm{d}t.$$

(2) 令 $x\in A$，證明當 $h\to 0$ 時，我們有

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{m=1}^{p}\frac{f_h^{(m)}(x)}{m!}+o(|h|^p).$$

習題 4.20 ： 令 $A\subseteq\mathbb{R}^m$ 為開子集合。假設函數 $f:A\to\mathbb{R}^n$ 是可微的，且微分映射 $x\mapsto \mathrm{d}f_x$ 在 $a\in A$ 連續。證明對於所有 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$ 使得

$$\|x-a\|<\eta,\|y-a\|<\eta\quad\Rightarrow\quad \|f(y)-f(x)-\mathrm{d}f_a(y-x)\|\leqslant\varepsilon\|y-x\|.$$

習題 4.21 【代數基本定理】： 令 $P \in \mathbb{K}[X]$，其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或是 $\mathbb{C}$。假設 P 並不是個常數多項式，也就是說，他的次數會大於等於 1。

(1) 證明 $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$。

(2) 推得 $|P(z)|$ 在 $\mathbb{C}$ 中會碰到他的最小值。我們把 $|P(z)|$ 碰到最小值得點記作 z_0。

(3) 使用反證法來證明 $P(z_0) = 0$。更確切來說，假設 $P(z_0) \neq 0$，並證明存在夠靠近 z_0 的 z，使得絕對值 $|P(z)|$ 會嚴格小於 $|P(z_0)|$。提示：使用 z_0 附近的泰勒展開式。

習題 4.22： 找出下列函數的臨界點，並解釋他們是局部最小值，局部最大值，還是鞍點。

(a) $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$.

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

習題 4.23： 證明函數 $f(x,y) = xy + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 在

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}.$$

上面有最大值及最小值。f 會在哪些點 (x,y) 碰到最大值和最小值呢？

習題 4.24 【Rolle 定理】： 令 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 為可微函數。我們假設 f 在單位球殼 $S(0,1)$ 上是常數的。證明存在 $x_0 \in B(0,1)$ 使得 $\mathrm{d}f_{x_0} = 0$。

習題 4.25： 令 V 以及 W 為兩個賦範向量空間，且 $f : V \to W$ 為 $\mathcal{C}^1$ 類映射。令 $y_0 \in W$ 使得 $\mathrm{d}f$ 在所有 $f^{-1}(y_0)$ 中的點皆是可逆的。證明 $f^{-1}(y_0)$ 是個離散集合。換句話說，檢查對於任意 $x \in f^{-1}(y_0)$，單元素集合 $\{x\}$ 在 $f^{-1}(y_0)$ 中是個開子集合。

習題 4.26： 假設多項式

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

在 $(a_2, a_1, a_0) = (p_0, q_0, r_0)$ 時有三個不同的根。證明存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $P(x)$ 當 $(a_2, a_1, a_0) \in B((p_0, q_0, r_0), \varepsilon)$ 時，他會有三個不同的根 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$，其中 λ_j 對於 $1 \leqslant j \leqslant 3$ 皆是 $\mathcal{C}^1$ 類取決於 a_2, a_1, a_0 的函數。

習題 4.27： 令 $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^2$。證明存在 $\varepsilon > 0$ 使得對於 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 滿足 $|||A - I||| < \varepsilon$，我們能定義 A 平方根 $\sqrt{A}$。證明 $A \mapsto \sqrt{A}$ 在 $B(I, \varepsilon)$ 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。

習題 4.28 ： 這是習題 4.4 的第二部份。我們要考慮的是函數 $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), u \mapsto u \circ u$。

(1) 證明 φ 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。

(2) 證明 $\mathrm{d}\varphi$ 在 $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ 是個在 $\mathcal{L}_c(\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n))$ 的映射，而且寫做 $u \mapsto 2u$。推得 $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}}$ 是可逆的。

(3) 證明存在包含 $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ 的開集 $U \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 使得對於任意 $u \in U$，存在 $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $u = v \circ v$。換句話說，所有靠近 $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ 的線性運算子都有「平方根」。提示：反函數定理。

習題 4.29 ： 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為 Banach 空間。證明存在 $\varepsilon > 0$ 使得當 $f \in \mathcal{L}_c(V)$ 滿足 $|||f - \mathrm{Id}||| < \varepsilon$ 時，我們能找到 $g \in \mathcal{L}_c(V)$ 使得 $f = \exp(g)$，我們也可以把他記作 $g = \ln(f)$。提示：使用註解 3.2.21 還有反函數定理。

習題 4.30 ： 令 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 定義做 $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$。證明 f 是個局部 $\mathcal{C}^1$ 類的微分同胚，但不是全域的 $\mathcal{C}^1$ 類微分同胚。

習題 4.31 ： 令 V 為 Banach 空間且 $\varphi : V \to V$ 是個 $\mathcal{C}^1$ 類的函數。假設對於所有 $u \in V$，微分 $\mathrm{d}\varphi_u \in \mathcal{L}_c(V, V)$ 是個雙連續同構變換，且存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - (u - v)\|_V \leqslant c\,\|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

利用下列步驟來證明 φ 是個 $\mathcal{C}^1$ 微分同胚變換。

(1) 證明 φ 是單射的。

(2) 固定 $w \in V$。設 $u_0 = w$ 以及對於所有 $n \geqslant 0$，設 $u_{n+1} = u_n + (w - \varphi(u_n))$。證明 $(u_n)_{n \geqslant 0}$ 是個在 V 中的 Cauchy 序列。

(3) 推得 φ 是滿射的，並總結 φ 是個 $\mathcal{C}^1$ 微分同胚變換。

習題 4.32 ： 考慮函數

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, \\ & (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y). \end{array}$$

證明 f 的像是個 $\mathbb{R}^3$ 的嚴格開子集合。

習題 4.33： 考慮方程式 $x+y+z+\sin(xyz)=0$ 的解。

(1) 證明在 $(0,0,0)$ 附近，我們可以把 z 寫成 x 和 y 的函數。換句話說，存在包含 0 的開集 $X\subseteq\mathbb{R}^2$，包含 0 的開集 $Z\subseteq\mathbb{R}$ 以及函數 $\varphi: X\to Z$ 使得 $f(x,y,z)=0$ 有唯一的解 $z=\varphi(x,y)\in Z$。

(2) 計算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

(3) 推得 $\varphi(x,y)=-(x+y)+o(\|(x,y)\|)$ 當 $(x,y)\to 0$。

(4) 證明我們有更高階的展開式 $\varphi(x,y)=-(x+y)+xy(x+y)+o(\|(x,y)\|^3)$ 當 $(x,y)\to 0$。

習題 4.34： 令 $f(x)$ 為非負連續函數，滿足 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$。

(1) 證明在所有閉區間 $[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ 成立，存在長度最短的閉區間。

(2) 如果 $[a,b]$ 是個 (a) 中最短的閉區間，證明 $f(a)=f(b)$。

習題 4.35： 令 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定義做 $f(x,y,z)=x^2-xy^3-y^2z+z^3$，以及曲面 $\mathcal{S}$ 定義為 $f(x,y,z)=0$ 的解所構成的集合。

(1) 證明在 $(1,1,1)$ 附近，曲面 $\mathcal{S}$ 可以透過方程式 $z=\varphi(x,y)$ 表示，其中 φ 是個在 $(1,1)$ 附近 $\mathcal{C}^\infty$ 類的函數。

(2) 找出在 $(1,1,1)$ 對曲面 $\mathcal{S}$ 的切平面方程式。

(3) 求 φ 所有在 $(1,1)$ 附近以及 $(1,1)$ 的一階與二階導數。

(4) 曲面 $\mathcal{S}$ 與切平面 $\mathcal{P}$ 他們的相對位置的關係是什麼呢？

習題 4.36 【算幾不等式】： 令 $n\geqslant 2$ 以及 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\dots x_n$。考慮 $\Gamma=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}: x_1+\cdots+x_n=1\}$。

(1) 證明 f 在 Γ 上有全域極大值，並算出他的值。

(2) 推得算幾不等式，也就是說，證明

$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}.$$