Exercise 5.1 : Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a function defined on $[a,b]$. Show that $V_f([a,b]) \geqslant |f(b) - f(a)|$.

Exercise 5.2 : Define the function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ as follows,

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Is f a function of bounded variation?

Exercise 5.3 : Let $f \in \mathbb{R}[X]$ be a polynomial function and $I = [a,b]$ be a compact segment. Show that the total variation $V_f([a,b])$ is well defined, that is f is of bounded variation on $[a,b]$.

Exercise 5.4 : Let $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of functions of bounded variation on $[a,b]$. Let f be a function on $[a,b]$. We are given the two following conditions,

(a) there exists $M > 0$ such that $V_{f_n}([a,b]) \leqslant M$ for all $n \geqslant 1$;

(b) for every $x \in [a,b]$, we have the convergence $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Please answer the following questions.

(1) If both (a) and (b) hold, show that f is of bounded variation and that $V_f([a,b]) \leqslant M$.

(2) If only the condition (b) is satisfied, can you find an example for which the limiting function f is not of bounded variation?

Exercise 5.5 : Suppose that $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is a function and there exists $M > 0$ such that f is of bounded variation on every interval $[a+\varepsilon, b]$ for any $\varepsilon > 0$, with $V_f([a+\varepsilon,b]) \leqslant M$.

(1) Show that f if of bounded variation on $[a,b]$.

(2) Do we have $V_f([a,b]) \leqslant M$?

Exercise 5.6 : Justify whether each of the following statements is true or false. If it is true, please prove it briefly; otherwise, find a counterexample. ($a < b$ are real numbers.)

(a) A continuous function on $[a,b]$ is of bounded variation.

(b) A function that is continuous on $[a,b]$ and differentiable on (a,b) is of bounded variation.

(c) A function that is continuous and differentiable on $[a,b]$ is of bounded variation.

(d) A function of class $\mathcal{C}^1$ on $[a,b]$ is of bounded variation.

習題 5.1 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為定義在 $[a,b]$ 上的函數。證明 $V_f([a,b]) \geqslant |f(b) - f(a)|$。

習題 5.2 ： 定義函數 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{若 } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

函數 f 會是個有界變差函數嗎？

習題 5.3 ： 令 $f \in \mathbb{R}[X]$ 為多項式函數且 $I = [a,b]$ 為緊緻線段。證明總變差 $V_f([a,b])$ 是定義良好的，也就是說 f 在 $[a,b]$ 上是有界變差的。

習題 5.4 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $[a,b]$ 上的有界變差函數序列。令 f 為在 $[a,b]$ 上的函數。我們給定下面兩個條件：

(a) 存在 $M > 0$ 使得 $V_{f_n}([a,b]) \leqslant M$ 對於所有 $n \geqslant 1$；

(b) 對於每個 $x \in [a,b]$，我們有收斂序列：$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$。

請回答下面問題。

(1) 如果 (a) 與 (b) 都成立，證明 f 是有界變差的，且 $V_f([a,b]) \leqslant M$。

(2) 如果只有 (b) 成立，你可以找到範例使得極限函數 f 不是有界變差的嗎？

習題 5.5 ： 假設 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是個函數且存在 $M > 0$ 使得對於任意 $\varepsilon > 0$，f 在區間 $[a+\varepsilon, b]$ 上會是有界變差的，同時滿足 $V_f([a+\varepsilon,b]) \leqslant M$。

(1) 證明 f 在 $[a,b]$ 上是有界變差的。

(2) 我們會有 $V_f([a,b]) \leqslant M$ 嗎？

習題 5.6 ： 說明下列敘述是否為真。如果為真，請簡單證明；反之，請給出反例。（$a < b$ 為實數。）

(a) 在 $[a,b]$ 上的連續函數是有界變差的。

(b) 在 $[a,b]$ 上連續，且在 (a,b) 上可微的函數是連續變差的。

(c) 在 $[a,b]$ 上連續且可微的函數是連續變差的。

(d) 在 $[a,b]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數是連續變差的。

Exercise 5.7 : Let $\alpha \in \mathbb{R}$. Define the function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ as follows,

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } x \in (0,1], \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

(1) For which values of α is the function f continuous on $[0,1]$?

(2) For which values of α is the function f uniformly continuous on $[0,1]$?

(3) For which values of α is the derivative $f'(0)$ well defined?

(4) For which values of α is the derivative f' continuous on $[0,1]$?

(5) Show that for $\alpha > 2$, the function f is of bounded variation.

(6) Show that for $\alpha \leqslant 1$, the function f is not of bounded variation.

(7) (Hard) Show that for $1 < \alpha \leqslant 2$, the function f is of bounded variation.

Exercise 5.8 : Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a function defined on $[a,b]$. For $\alpha > 0$, we say that f is α-Hölder continuous, or satisfies the uniform Lipschitz condition of order α, if there exists $M > 0$ such that

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a,b]. \tag{5.1}$$

Let $\alpha > 0$ such that f is α-Hölder continuous.

(1) If $\alpha > 1$, show that f is constant on $[a,b]$.

(2) If $\alpha = 1$, show that f is of bounded variation.

(3) If $\alpha < 1$, is f of bounded variation? Hint: see below[1].

(4) Find a function $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ which is of bounded variation, but is not α-Hölder continuous for any $\alpha > 0$.

[1] The answer is no, and you need to find a counterexample.

習題 5.7 ： 令 $\alpha \in \mathbb{R}$。定義函數 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{若 } x \in (0,1], \\ 0, & \text{其他情況}. \end{cases}$$

(1) 對哪些值 α，函數 f 會在 $[0,1]$ 上連續？

(2) 對哪些值 α，函數 f 會在 $[0,1]$ 上均勻連續？

(3) 對哪些值 α，微分 $f'(0)$ 會是定義良好的？

(4) 對哪些值 α，微分 f' 會在 $[0,1]$ 上連續？

(5) 證明對 $\alpha > 2$，函數 f 會是有界變差的。

(6) 證明對 $\alpha \leqslant 1$，函數 f 不會是有界變差的。

(7) （困難）證明對 $1 < \alpha \leqslant 2$，函數 f 會是有界變差的。

習題 5.8 ： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為定義在 $[a,b]$ 上的函數。對於 $\alpha > 0$，如果存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a,b], \tag{5.1}$$

則我們說 f 是 α-Hölder 連續，或是滿足 α 階的均勻 Lipschitz 條件。令 $\alpha > 0$ 使得 f 是 α-Hölder 連續的。

(1) 如果 $\alpha > 1$，證明 f 在 $[a,b]$ 上是個常數。

(2) 如果 $\alpha = 1$，證明 f 是有界變差的。

(3) 如果 $\alpha < 1$，f 會是有界變差的嗎？提示：如下[1]。

(4) 找一個有界變差的函數 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$，但對於任意 $\alpha > 0$，他都不會是 α-Hölder 連續的。

[1] 答案是否定的，你需要找反例出來。

Exercise 5.9 : A function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is said to be *absolutely continuous* (絕對連續) on $[a,b]$ if for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$ and any disjoint open intervals $(a_k, b_k) \subseteq [a,b]$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

(1) Show that the function $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ is absolutely continuous.

We are given two functions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ that are both absolutely continuous.

(2) Show that f is uniformly continuous, continuous, and of bounded variation on $[a,b]$.

(3) Show that if f is 1-Hölder continuous on $[a,b]$, see Eq. (5.1) for the definition, then f is absolutely continuous on $[a,b]$.

(4) Show that both $|f|$ and cf are absolutely continuous, for any constant $c \in \mathbb{R}$.

(5) Show that $f + g$ and $f \cdot g$ are both absolutely continuous.

(6) Show that if g is bounded away from zero (i.e., $|g| \geqslant c$ for some $c > 0$), then $\frac{f}{g}$ is absolutely continuous.

習題 5.9 ： 給定函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，如果對於任意 $\varepsilon > 0$，會存在 $\delta > 0$ 使得對於任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意互斥開區間 $(a_k, b_k) \subseteq [a,b]$, $1 \leqslant k \leqslant n$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

則我們說 f 在 $[a,b]$ 上是絕對連續 (absolutely continuous) 的。

(1) 證明函數 $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ 是絕對連續的。

給定兩個絕對連續的函數 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$。

(2) 證明 f 在 $[a,b]$ 上是均勻連續、連續，且是有界變差的。

(3) 證明如果 f 在 $[a,b]$ 上是 1-Hölder 連續，他的定義請見式 (5.1)，那麼他在 $[a,b]$ 上會是絕對連續的。

(4) 證明 $|f|$ 是絕對連續的；以及對於任意常數 $c \in \mathbb{R}$，函數 cf 是絕對連續的。

(5) 證明 $f + g$ 以及 $f \cdot g$ 都是絕對連續的。

(6) 證明如果 g 是個不靠近零的函數（也就是存在 $c > 0$ 使得 $|g| \geqslant c$），那麼 $\frac{f}{g}$ 是絕對連續的。