第五章 ：Riemann-Stieltjes 積分理論

習題 5.1 ： 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為定義在 $[a,b]$ 上的函數。證明 $V_f([a,b])\geqslant|f(b)-f(a)|$。

習題 5.2 ： 定義函數 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{若 } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

函數 f 會是個有界變差函數嗎？

習題 5.3 ： 令 $f\in\mathbb{R}[X]$ 為多項式函數且 $I=[a,b]$ 為緊緻線段。證明總變差 $V_f([a,b])$ 是定義良好的，也就是說 f 在 $[a,b]$ 上是有界變差的。

習題 5.4 ： 令 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $[a,b]$ 上的有界變差函數序列。令 f 為在 $[a,b]$ 上的函數。我們給定下面兩個條件：

(a) 存在 $M>0$ 使得 $V_{f_n}([a,b])\leqslant M$ 對於所有 $n\geqslant 1$；

(b) 對於每個 $x\in[a,b]$，我們有收斂序列：$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$。

請回答下面問題。

(1) 如果 (a) 與 (b) 都成立，證明 f 是有界變差的，且 $V_f([a,b])\leqslant M$。

(2) 如果只有 (b) 成立，你可以找到範例使得極限函數 f 不是有界變差的嗎？

習題 5.5 ： 假設 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是個函數且存在 $M>0$ 使得對於任意 $\varepsilon>0$，f 在區間 $[a+\varepsilon,b]$ 上會是有界變差的，同時滿足 $V_f([a+\varepsilon,b])\leqslant M$。

(1) 證明 f 在 $[a,b]$ 上是有界變差的。

(2) 我們會有 $V_f([a,b])\leqslant M$ 嗎？

習題 5.6 ： 說明下列敘述是否為真。如果為真，請簡單證明；反之，請給出反例。（$a<b$ 為實數。）

(a) 在 $[a,b]$ 上的連續函數是有界變差的。

(b) 在 $[a,b]$ 上連續，且在 (a,b) 上可微的函數是連續變差的。

(c) 在 $[a,b]$ 上連續且可微的函數是連續變差的。

(d) 在 $[a,b]$ 上的 $\mathcal{C}^1$ 函數是連續變差的。

習題 5.7： 令 $\alpha \in \mathbb{R}$。定義函數 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{若 } x \in (0,1], \\ 0, & \text{其他情況.} \end{cases}$$

(1) 對哪些值 α，函數 f 會在 $[0,1]$ 上連續？

(2) 對哪些值 α，函數 f 會在 $[0,1]$ 上均勻連續？

(3) 對哪些值 α，微分 $f'(0)$ 會是定義良好的？

(4) 對哪些值 α，微分 f' 會在 $[0,1]$ 上連續？

(5) 證明對 $\alpha > 2$，函數 f 會是有界變差的。

(6) 證明對 $\alpha \leqslant 1$，函數 f 不會是有界變差的。

(7) （困難）證明對 $1 < \alpha \leqslant 2$，函數 f 會是有界變差的。

習題 5.8： 令 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為定義在 $[a,b]$ 上的函數。對於 $\alpha > 0$，如果存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a,b], \tag{5.1}$$

則我們說 f 是 α-Hölder 連續，或是滿足 α 階的均勻 Lipschitz 條件。令 $\alpha > 0$ 使得 f 是 α-Hölder 連續的。

(1) 如果 $\alpha > 1$，證明 f 在 $[a,b]$ 上是個常數。

(2) 如果 $\alpha = 1$，證明 f 是有界變差的。

(3) 如果 $\alpha < 1$，f 會是有界變差的嗎？提示：如下[1]。

(4) 找一個有界變差的函數 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$，但對於任意 $\alpha > 0$，他都不會是 α-Hölder 連續的。

[1]答案是否定的，你需要找反例出來。

習題 5.9： 給定函數 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果對於任意 $\varepsilon>0$，會存在 $\delta>0$ 使得對於任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意互斥開區間 $(a_k,b_k)\subseteq[a,b], 1\leqslant k\leqslant n$，我們有

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon,$$

則我們說 f 在 $[a,b]$ 上是絕對連續 (absolutely continuous) 的。

(1) 證明函數 $f:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{x}$ 是絕對連續的。

給定兩個絕對連續的函數 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$。

(2) 證明 f 在 $[a,b]$ 上是均勻連續、連續，且是有界變差的。

(3) 證明如果 f 在 $[a,b]$ 上是 1-Hölder 連續，他的定義請見式 (5.1)，那麼他在 $[a,b]$ 上會是絕對連續的。

(4) 證明 $|f|$ 是絕對連續的；以及對於任意常數 $c\in\mathbb{R}$，函數 cf 是絕對連續的。

(5) 證明 $f+g$ 以及 $f\cdot g$ 都是絕對連續的。

(6) 證明如果 g 是個不靠近零的函數（也就是存在 $c>0$ 使得 $|g|\geqslant c$），那麼 $\frac{f}{g}$ 是絕對連續的。