

第六章

習題 6.1 : 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為 Banach 空間，且 $(a_n)_{n \geq 1}$ 為在 V 中的序列。我們定義輔助序列 $(m_n)_{n \geq 1}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

我們考慮下面兩個性質。

(i) 序列 $(a_n)_{n \geq 1}$ 收斂。

(ii) 序列 $(m_n)_{n \geq 1}$ 收斂。

回答下面的問題。

(1) 證明如果 (i) 成立且極限為 ℓ ，那麼 (ii) 也會成立且有相同的極限。

(2) 找出一個例子使得 (ii) 成立，但是 (i) 不會成立。

(3) 給定非負實數序列 $(w_n)_{n \geq 1}$ 使得 $\sum w_n$ 會發散。定義

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m'_n = \frac{w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n}{w_1 + \cdots + w_n}.$$

如果我們性質 (ii) 改成下面這個性質 (ii') 序列 $(m'_n)_{n \geq 1}$ 會收斂，那麼 (i) 還是會蘊含 (ii') 嗎？

習題 6.2 : 令 $(V, \|\cdot\|)$ 為非空有限維度賦範向量空間。令 $(a_n)_{n \geq 1}$ 為在 V 中的序列，且 $(r_n)_{n \geq 1}$ 為在 $\mathbb{R}_+^*$ 中的序列，滿足

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(a_n, r_n).$$

(1) 證明

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|a_{n+1} - a_n\| \leq r_n - r_{n+1}.$$

(2) 證明序列 $(a_n)_{n \geq 1}$ 會收斂。

(3) 證明 $\bigcap_{n \geq 1} \overline{B}(a_n, r_n)$ 是顆閉球。找出他的中心和半徑。

習題 6.3 : 令 $a \in \mathbb{C}$ 以及

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 證明對於 $n \in \mathbb{N}$ ，我們有

$$A^n = \frac{1}{2}I + \frac{a}{2}J, \quad \text{其中 } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 找出一項為 A^n 的級數的行為。

習題 6.4 : 令 $(a_n)_{n \geq 1}$ 為遞減非負實數序列。證明如果 $\sum u_n$ 收斂，那麼我們會有 $u_n = o(\frac{1}{n})$ 。

習題 6.5 : 令 $\sum_n u_n$ 和 $\sum_n v_n$ 為兩個會收斂、且一般項非負的級數。求級數 $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ 和 $\sum_n \max(u_n, v_n)$ 的行為。

習題 6.6 : 令 $\sum_n u_n$ 為一般項非負的級數。

(1) 假設 $\sum_n u_n$ 收斂。證明對於 $\alpha > 1$ ，級數 $\sum_n u_n^\alpha$ 收斂。

(2) 假設 $\sum_n u_n$ 發散。證明對於 $\alpha \in (0, 1)$ ，級數 $\sum_n u_n^\alpha$ 發散。

習題 6.7 : 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 為一般項非負的級數。對於 $n \geq 1$ ，令 $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ 。

(1) 證明函數 $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是遞增的。

(2) 證明級數 $\sum_n u_n$ 和 $\sum_n v_n$ 有相同的行為。

習題 6.8 : 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 為一般項非負的級數。證明級數 $\sum_n u_n$ 和 $\sum_n 2^n u_{2^n}$ 有相同的行為。

習題 6.9 : 使用比較定理（命題 6.2.2 以及定理 6.2.3）找出下列級數 $\sum u_n$ 的行為，其中一般項 u_n 是被不同的式子所給出的。你也會需要用到習題 6.12 中的 Stirling 公式。我們固定常數 $a \geq 0$ 以及 $b, c \in \mathbb{R}$ 。

(1) $u_n = 3^{-\sqrt{n}},$

(5) $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!},$

(9) $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}.$

(2) $u_n = a^n n!,$

(6) $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 2)}.$

(10) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$

(3) $u_n = n e^{-\sqrt{n}},$

(7) $u_n = \frac{a^n}{n!},$

(11) $u_n = e^{1/n} - a - \frac{b}{n}.$

(4) $u_n = n^{-1-\frac{1}{n}},$

(8) $u_n = \frac{a^n}{(2n)}.$

(12) $u_n = \cos(\frac{1}{n}) - a - \frac{b}{n}.$

習題 6.10 : 令 $(u_n)_{n \geq 0}$ 為實數序列，被 $u_0 > 0$ 以及下面式子所定義：

$$u_{n+1} = u_n + u_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) 證明 $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ 。

(2) 證明

$$\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

(3) 推得存在 $K > 1$ 使得 $u_n \sim K^{2^n}$ 。

習題 6.11 : 令 $(u_n)_{n \geq 0}$ 為實數序列，被 $u_0 = c \in \mathbb{R}$ 以及下面式子所定義：

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) 證明 $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ 。

(2) 找出 u_n 到 $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ 數量級的漸進表示式。

習題 6.12 : 定義序列

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

(1) 證明對於每個 $k \geq 2$ ，我們有

$$\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt.$$

推得 $S_n = n \ln n - n + o(n)$ 。

(2) 藉由考慮定義如下的序列 $(A_n)_{n \geq 1}$ ：

$$\forall n \geq 1, \quad A_n = S_n - n \ln n + n,$$

證明 $A_n - A_{n-1} \sim \frac{1}{2n}$ 並推得 $A_n \sim \frac{1}{2} \ln n$ 。

(3) 令 $D_n := S_n - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n$ 對於 $n \geq 1$ 。證明 $D_n - D_{n-1} \sim -\frac{1}{12n^2}$ 。

(4) 證明當 $n \rightarrow \infty$ 時， D_n 收斂到某個 D_∞ 。由此推得存在常數 $C > 0$ 滿足

$$n! \sim C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(5) 使用 I_{2n} 在習題 A1.2 中的式子來證明 $C = \sqrt{2\pi}$ 。

(6) 證明

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

習題 6.13：我們的目的是計算級數 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ 的值。對於 $n \in \mathbb{N}$ ，令 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 為他的第 n 個部份和。

(1) 請簡短證明對於 $\alpha > 1$ ，我們有

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

(2) 令 $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 為 C^1 函數。證明

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(3) 考慮函數 $A_n: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義做

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt), \quad \forall t \in (0, \pi].$$

證明

$$A_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(4) 求 $a, b \in \mathbb{R}$ 滿足

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

接下來，我們把 a 和 b 固定為這樣的值。

(5) 檢查

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\pi (at^2 + bt) A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6},$$

以及 $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$ 。

(6) 推得

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

習題 6.14 : 令 $(u_n)_{n \geq 0}$ 為序列，被 $u_0 = 1$ 以及下面式子所定義：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

- (1) 檢查 $(u_n)_{n \geq 0}$ 收斂到 0。
- (2) 求 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 和 $\frac{u_n + u_{n+1}}{u_n}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 時的極限。
- (3) 求 $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 時的極限。
- (4) 證明當 $n \rightarrow \infty$ 時，我們有等價關係

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}.$$

由此推得 u_n 在 $n \rightarrow \infty$ 時的一個等價關係。

- (5) 證明

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2).$$

由此推得

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

習題 6.15 : 令 $\sum_{n \geq 1} u_n$ 為一般項非負的發散級數。對於所有 $n \geq 1$ ，我們記 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 。固定 $\alpha > 1$ 。

- (1) 證明對於 $n \geq 2$ ，我們有

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

- (2) 證明級數 $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ 會收斂。

習題 6.16 : 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 為在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的數列，以及

$$\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{1/n} \in [0, +\infty].$$

證明下列性質。

- (1) 如果 $\lambda < 1$ ，那麼級數 $\sum u_n$ 會絕對收斂。
- (2) 如果 $\lambda > 1$ ，那麼級數 $\sum u_n$ 會發散。
- (3) 如果 $\lambda = 1$ ，那麼我們無法總結。

習題 6.17 : 令 $x \in \mathbb{C}$ 以及 $a \in \mathbb{R}$ 。使用商檢測法 (定理 6.3.1) 以及根檢測法 (定理 6.3.6) 來求下列級數的行為。

- | | | |
|--|---------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $\sum \frac{x^n}{n!}$. | (3) $\sum \frac{n!}{n^{an}}$. | (5) $\sum \frac{(n!)^a}{(2n)!}$. |
| (2) $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$. | (4) $\sum \frac{n^a (\ln n)^n}{n!}$. | (6) $\sum \frac{a^n n!}{n^n}$. |

習題 6.18 : 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 為每項皆嚴格為正的序列，滿足

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{對於選定的 } \alpha \in \mathbb{R}.$$

固定 $\beta \in \mathbb{R}$ 並令

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln((n+1)^\beta u_{n+1}) - \ln(n^\beta u_n).$$

- (1) 對哪些 β 的值會讓級數 $\sum v_n$ 收斂呢？
- (2) 對每個這樣的值，證明存在 $A > 0$ 使得 $u_n \sim An^\alpha$ 。

習題 6.19 :

- (1) 證明級數 $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 會收斂。
- (2) 證明對於 $n \rightarrow \infty$ ，我們有

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (3) 下面級數的行為是什麼？

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

習題 6.20 : 使用比較定理 (定理 6.2.3) 以及交錯級數 (定理 6.4.2) 來求級數 $\sum u_n$ 的性質，其中一般項 u_n 是由下列不同的表示式所給出的。令 $\alpha > \beta > 0$ 。

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right),$ | (2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}},$ | (3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}}.$ |
|--|--|--|

習題 6.21 :

(1) 解釋為什麼交錯級數 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ 收斂。他會絕對收斂嗎？

(2) 對於每個 $n \in \mathbb{N}_0$ ，考慮部份和

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

證明對於 $n \in \mathbb{N}$ ，我們有

$$S_{2n-1} < \cos(1) < S_{2n} = S_{2n-1} + \frac{1}{(4n)!}.$$

(3) 推得 $\cos(1)$ 是個無理數。

(4) 同理，使用式子 $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ 來證明 e 是個無理數。

習題 6.22 : 令 $(u_n)_{n \geq 0}$ 為每項皆嚴格為正，且遞減到 0 的序列。考慮交錯級數 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ ，根據定理 6.4.2，他是個收斂級數。我們回顧餘項的定義：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k.$$

假設下列條件成立：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \quad \text{以及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

(1) 證明對於每個 $n \geq 0$ ，我們有 $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$ 。

(2) 證明序列 $(|R_n|)_{n \geq 0}$ 是遞減的。

(3) 推得下面等價關係：

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1} u_n}{2}, \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

(4) 把這個結果用在交錯級數 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 上，以給出他部份和的漸進式。提示：此級數的極限是已知的，見範例 6.4.4。

習題 6.23 :

(1) 證明下面這兩個發散序列的柯西積

$$(-1 - 2 - 2 - 2 - 2 - \cdots)(-1 + 2 - 2 + 2 - 2 + \cdots)$$

會絕對收斂。

(2) 考慮交錯級數 $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 。證明他和自己的柯西積會發散。

習題 6.24：這個習題是定理 6.6.3 的推廣。令 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 為絕對收斂級數以及 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 是個收斂級數，並假設他們的項都在完備賦範代數 $(A, \cdot, |\cdot|)$ 裡面。他們的柯西積是由級數 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 所給定，定義做

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

證明級數 $\sum c_n$ 會收斂，且他的和等於

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \left(\sum_{p \geq 0} a_p \right) \left(\sum_{q \geq 0} b_q \right).$$

習題 6.25：考慮雙下標序列 $(u_{m,n})_{m,n \geq 1}$ ，定義做：

$$\forall m, n \geq 1, \quad u_{m,n} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n.$$

- (1) 求迭代極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} u_{m,n}$ 和 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{m,n}$ 。
- (2) 序列 $(u_{m,n})_{m,n \geq 1}$ 的極限是否存在？那 $(u_{n,n})_{n \geq 1}$ 的極限呢？

習題 6.26：對於實數 $k > 1$ ，我們可以定義黎曼 ζ 函數如下：

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

- (1) 簡單解釋為什麼當 $k > 1$ 時，級數 $\zeta(k)$ 會是定義良好的。
- (2) 證明下列關係式：

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1.$$

- (3) 證明下列關係式：

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k} = 1 - \gamma, \quad \text{其中} \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right].$$

習題 6.27：令 $(u_{m,n})_{m,n \geq 1}$ 為在 Banach 空間 $(W, \|\cdot\|)$ 中的雙下標序列。他所對應到的雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會是雙下標序列 $(s_{m,n})_{m,n \geq 1}$ ，定義做

$$\forall m, n \geq 1, \quad s_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j}.$$

如果極限 $\lim_{m,n \rightarrow \infty} s_{m,n}$ 定義良好，則我們說雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會收斂；如果極限 $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|u_{i,j}\|$ 定義良好，則我們說雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會絕對收斂。

- (1) 證明迭代級數 $\sum_m (\sum_n \|u_{m,n}\|)$ 會收斂，若且唯若雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會絕對收斂。
- (2) 如果雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會絕對收斂，證明他也會收斂。
- (3) 假設雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 會絕對收斂。我們定義

$$\forall n \geq 2, \quad c_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_{i,(n-1)} = u_{1,(n-1)} + u_{2,(n-2)} + \cdots + u_{(n-1),1}.$$

證明級數 $\sum_n c_n$ 也會絕對收斂，而且我們有

$$\sum_{n \geq 2} c_n = \sum_{m,n \geq 1} u_{m,n}.$$

- (4) 令 $(u_{m,n})_{m,n \geq 1}$ 為雙下標序列，定義做：

$$\forall m, n \geq 1, \quad u_{m,n} = \begin{cases} +1 & \text{若 } m - n = 1, \\ -1 & \text{若 } m - n = -1, \\ 0 & \text{其他情況.} \end{cases}$$

- (a) 證明兩個迭代級數 $\sum_n (\sum_m u_{m,n})$ 和 $\sum_m (\sum_n u_{m,n})$ 都會收斂，但極限不相同。
- (b) 證明雙下標級數 $\sum_{m,n} u_{m,n}$ 不會收斂。
- (c) 證明極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,n}$ 存在。
- (5) 證明如果對應到序列 $(u_{m,n})_{m,n \geq 1}$ 的雙下標級數和其中一個迭代級數都收斂，那麼這兩個極限會相等。
- (6) 證明雙下標級數的收斂性不會蘊含迭代級數的收斂性。
- (7) 證明雙下標級數的收斂性不會蘊含對於每個 $m \geq 1$ ，我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{m,n} = 0$ 。

習題 6.28： 令 $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 對於 $n \in \mathbb{N}$ 。

- (1) 證明 $\prod_{n \geq 2} (1 + u_n)$ 收斂且極限為 1。
- (2) 級數 $\sum_{n \geq 2} u_n$ 會收斂、絕對收斂，或條件收斂嗎？

習題 6.29： 令 $(u_n)_{n \geq 1}$ 為定義如下的序列：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

- (1) 證明 $\prod_{n \geq 2} (1 + u_n)$ 收斂到非零極限。
- (2) 級數 $\sum_{n \geq 2} u_n$ 會收斂、絕對收斂，或條件收斂嗎？

習題 6.30：令 $(a_n)_{n \geq 1}$ 為實數序列滿足 $a_n > -1$ 對於所有 $n \in \mathbb{N}$ 。

- (1) 證明如果級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 會絕對收斂，那麼無窮積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 會收斂。
- (2) 假設級數 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 會收斂。證明無窮積 $\prod (1 + a_n)$ 會收斂若且唯若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 會收斂。
提示：如下¹。

習題 6.31：解釋下列無窮積的收斂性，並證明他們的極限。

$$(1) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

習題 6.32：對於 $n \geq 2$ ，令 $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ 。證明存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得當 $n \rightarrow \infty$ 時，我們有 $P_n \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$ 。

習題 6.33：令 $\mathcal{P}$ 為所有質數所構成的集合。在這個習題中，我們會證明 $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ 是發散的。

- (1) 證明對於 $s > 1$ ，我們有

$$-\sum_{p \in \mathcal{P}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \log \zeta(s).$$

- (2) 推得存在 $M > 0$ 使得對於任意 $s > 1$ ，我們有

$$\left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} - \log \zeta(s) \right| < M.$$

- (3) 證明當 $s \rightarrow 1+$ 時，我們有 $\zeta(s) \rightarrow +\infty$ 。

- (4) 總結 $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ 是發散的。

¹證明存在正數 A 和 B 使得如果 $|x| < \frac{1}{2}$ ，則我們有 $Ax^2 \leq x - \log(1+x) \leq Bx^2$ 。