

第七章：黎曼積分的補充

習題 7.1： 令 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為非負連續函數。假設他在 $[1, +\infty)$ 上是可積的。

- (1) 如果極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在，證明這個極限為 0。
- (2) 請給出反例來解釋為什麼 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 可能會不存在。
- (3) 請給出反例來解釋為什麼 f 可能在 $[1, +\infty)$ 上不會有界。
- (4) 假設 f 在 $[1, +\infty)$ 上是均勻連續的，證明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。
- (5) 假設 f 在 $[1, +\infty)$ 上是 Lipschitz 連續的，證明 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} f(n) = 0$ 。

習題 7.2： 令 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。根據 α 和 β 所取的值，找出下列積分的行為：

$$\int_I \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta},$$

其中我們選擇

- (1) $I = (0, \frac{1}{2}]$;
- (2) $I = [\frac{1}{2}, 1)$;
- (3) $I = (1, 2]$;
- (4) $I = [2, +\infty)$.

習題 7.3： 令 $M \in \mathbb{R}$ 以及 $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 為片段連續函數。

- (1) 假設 f 在 $[M, +\infty)$ 上可積。證明

$$\int_n^{2n} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (2) 假設 f 在 $[M, +\infty)$ 上可積且遞減。證明 $f(x) = o(\frac{1}{x})$ 當 $x \rightarrow \infty$ 。

習題 7.4： 請找出下列積分的行為：

$$(1) \int_0^1 \frac{\sinh(\sqrt{t}) \ln t}{\sqrt{t} - \sin t} dt,$$

$$(5) \int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt,$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt,$$

$$(6) \int_0^\infty \frac{\sqrt{|\ln t|}}{(t-1)\sqrt{t}} dt.$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{dt}{e^t - 1},$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dt}{1 - \sqrt{t}},$$

$$(4) \int_0^\infty \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt,$$

$$(8) \int_0^\infty \left(1 + t \ln \left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt.$$

習題 7.5 : 請找出下列積分的行為，在當他們有定義時，也求出他們的值：

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}} du,$$

$$(2) \int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt.$$

習題 7.6 : 令 $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 使得

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \quad \text{以及} \quad \int_0^{\infty} f'(t)^2 dt$$

都會收斂。

(1) 令 F 為 f 的原函數，滿足 $F(0) = 0$ 。證明 F 是 $\mathcal{C}^2$ 類的。

(2) 對於 $x \geq 0$ ，證明

$$F(x+1) = F(x) + f(x) + R(x), \quad \text{其中} \quad R(x) = \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt.$$

(3) 證明當 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有 $R(x) \rightarrow 0$ 。

(4) 推得當 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有 $f(x) \rightarrow 0$ 。

習題 7.7 : 對於每個 $n \in \mathbb{N}$ ，定義

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

(1) 證明對於每個 $n \geq 1$ ，積分 I_n 定義良好。

(2) 對於每個 $n \geq 1$ ，求 I_n 和 I_{n+1} 之間的關係式。

(3) 對於 $n \geq 1$ ，求 I_n 的值。

習題 7.8 : 令 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為 $\mathcal{C}^\infty$ 函數。我們回顧系理 5.2.23 中的 Euler 求和公式：

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \int_1^n f'(x) \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) dx + \frac{1}{2} [f(n) + f(1)].$$

同時我們也不要忘記，在期中考的問題 6 中，我們定義週期為 1 的函數 $(G_p)_{p \geq 1}$ 。

(1) 檢查 $G_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$ 。

(2) 檢查對於 $k \geq 2$ 以及 $x \in \mathbb{R}$ ，我們有

$$G_k(x) = k \int_1^x G_{k-1}(t) dt + B_k,$$

其中 $B_k = G_k(0)$ 。

(3) 證明對於任意 $m \geq 1$ ，我們有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^n G_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx \\ &\quad + \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{(2r)!} [f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(1)] + \frac{1}{2} [f(n) + f(1)]. \end{aligned}$$

(4) 固定 $m \geq 1$ 。假設 $f^{(2m+1)}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是可積的。

(a) 證明下列積分定義良好：

$$\int_1^\infty f^{(2m+1)}(x) G_{2m+1}(x) dx$$

(b) 推得

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + C + E(n),$$

其中

$$C = \frac{1}{2}f(1) - \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(1) + \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^\infty G_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx$$

以及

$$E(n) = \frac{1}{2}f(n) + \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n) - \frac{1}{(2m+1)!} \int_n^\infty G_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx.$$

(5) 應用：證明下列漸進式。

(a) 對於 $s > 1$ 以及 $N \geq 1$ ，我們有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} + \frac{1}{2n^s} - \sum_{r=1}^N \frac{B_{2r}}{(2r)!} \cdot \frac{(s+2r-2)_{2r-1}}{n^{s+2r-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{s+2N}}\right) \quad \text{當 } n \rightarrow \infty,$$

其中 $(a)_p$ 是遞降階層記號，定義做：

$$\forall a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}, \quad (a)_p := a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-p+1).$$

(b) 對於 $N \geq 1$ ，我們有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{2k n^{2k}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2N+1}}\right) \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

這是範例 6.2.9 中最後所提到的式子。

(c) 對於 $N \geq 1$ ，我們有

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{r=1}^N \frac{B_{2r}}{2r(2r-1)n^{2r-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2N}}\right) \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

並推得 Stirling 近似公式：

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \quad \text{當 } n \rightarrow \infty.$$

習題 7.9：我們想要討論範例 7.1.21 中定義的 Gamma 函數 Γ 的性質，並找出方法來刻劃他。

- (1) 令 $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為函數。令 $p, q > 1$ 滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。假設函數 $|f|^p$ 和 $|g|^q$ 兩者在 $(0, +\infty)$ 上都是可積的。證明乘積 fg 在 $(0, +\infty)$ 上是可積的，而且我們有

$$\int_0^\infty |fg| \leq \left(\int_0^\infty |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |g|^q\right)^{1/q}.$$

- (2) 令 $p, q > 1$ 滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。證明

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x, y > 0.$$

- (3) 證明 $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是個凸函數。

- (4) 證明對於所有 $x \in (0, 1)$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ ，我們有

$$x \ln(n) \leq \ln \Gamma(n + x + 1) - \ln(n!) \leq x \ln(n + 1).$$

- (5) 推得對於 $0 < x < 1$ ，我們有

$$0 \leq \ln \Gamma(x) - \ln \left(\frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \right) \leq x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

- (6) 推得

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

對於 $x \in (0, 1)$ 成立，也會對於所有 $x > 0$ 成立。

- (7) 總結對於 $x > 0$ ，我們有

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 1/n)^x}{1 + x/n}.$$

- (8) 證明下面這個對於 Γ 函數的刻劃。令 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為滿足下列三個性質的函數：

- (i) $\ln f(x)$ 是凸函數；
- (ii) $f(x) = (x-1)f(x-1)$ 對於所有 $x > 1$ ；
- (iii) $f(1) = 1$ 。

那麼，我們有 $f(x) = \Gamma(x)$ 。提示：如下¹。

¹把 (4)、(5) 和 (6) 敘述裡面的 Γ 換成 f 。

習題 7.10 :

- (1) 證明下面這個瑕積分會收斂：

$$I := \int_0^{\pi} \ln(\sin x) \, dx.$$

- (2) 證明

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t) \, dt.$$

- (3) 使用變數變換 $x = 2t$ 以及關係式 $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ 來計算 I 的值。

習題 7.11 : 令 $f \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 使得 $\int_0^{\infty} f(t) \, dt$ 會收斂。

- (1) 找出下列積分在 $x \rightarrow +\infty$ 的極限：

$$\int_{x/2}^x f(t) \, dt.$$

- (2) 假設 f 是非負且遞減的。證明當 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有 $f(x) = o(\frac{1}{x})$ 。

- (3) 當 (2) 中的假設沒有滿足時，找一個反例。

習題 7.12 【柯西主值】 : 令 $I = [a, b]$ 為區間以及 $c \in (a, b)$ 。令 $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ 為片段連續函數。如果下列極限存在：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx \right),$$

則我們把他稱作是瑕積分的柯西主值記作

$$\text{p. v.} \int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx \right).$$

求下列瑕積分的柯西主值：

(1) $\int_{-a}^a \frac{dx}{x}, a > 0;$

(2) $\int_a^b \frac{dx}{x-c}, a < c < b.$

習題 7.13 : 令 $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數。證明下面兩個性質是等價的。提示：分部積分。

(1) 當 $x \rightarrow +\infty$ 時，下列極限存在：

$$\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

(2) 當 $x \rightarrow +\infty$ 時，下列極限存在：

$$x \int_x^\infty \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

證明如果上面兩個性質成立的話，則兩個極限相同。

習題 7.14 : 假設 $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是連續的，且當 $x \rightarrow +\infty$ 時會遞減到 0。

(1) 證明如果 $\int_a^\infty |f(x) \cos x| dx$ 收斂，那麼 $\int_a^\infty f(x) \sin x dx$ 和 $\int_a^\infty f(x) \cos x dx$ 兩個積分都會絕對收斂。

(2) 證明如果 $\int_a^\infty |f(x) \cos x| dx$ 發散，那麼 $\int_a^\infty f(x) \sin x dx$ 和 $\int_a^\infty f(x) \cos x dx$ 兩個積分都會條件收斂。

習題 7.15 : 令 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數，使得 $\ell := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在。令 $a < b$ 。我們想要討論下面這個積分：

$$I := \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

令 $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ，定義做

$$\forall x \in (0, \infty), \quad g(x) = \frac{f(ax) - f(bx)}{x}.$$

- (1) (a) 假設 f 在 $0+$ 可微。找出 g 在 $0+$ 附近的等價式，並推得 g 在 $(0, 1]$ 上是可積的。
- (b) 找出一個函數 f 使得 g 在 $(0, 1]$ 上不可積。
- (c) 令 $\varepsilon > 0$ 。證明如果 $f(x) = \ell + o(x^{-\varepsilon})$ 當 $x \rightarrow +\infty$ ，那麼 g 在 $[1, +\infty)$ 上是可積的。
- (2) 對於 $y \geq x > 0$ ，令

$$I(x, y) := \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

(a) 使用變數變換來證明對於 $y \geq x > 0$ ，我們有

$$I(x, y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du.$$

(b) 證明

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{以及} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u} du = \ell \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

(c) 推得極限 $\lim_{x \rightarrow 0+} \lim_{y \rightarrow +\infty} I(x, y)$ 的值。

(3) 你有辦法解釋為什麼當 f 只有假設是連續時，我們可以找到函數 f 使得 g 在 $(0, 1]$ 上不可積，但是 (2c) 中的極限卻是定義良好的嗎？

(4) 證明函數 $x \mapsto \frac{1}{x}(e^{-ax} - e^{-bx})$ 在 $(0, +\infty)$ 上是可積的，並且求下列積分：

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

習題 7.16： 求下列積分的行為：

(1) $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$

(3) $\int_0^\infty \cos(t^2 + t) dt,$

(2) $\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt,$

(4) $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) dt, \alpha \in \mathbb{R}.$

習題 7.17： 考慮函數 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 定義做：

$$f(0) = 0, \quad \text{以及} \quad f(t) = \frac{\sin t - t}{t^2}, \quad \forall t > 0.$$

(1) 檢查 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上是連續的。

(2) 求當 $x \rightarrow 0+$ 時下面式子的極限：

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

(3) 解釋為什麼下列積分收斂：

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t^2} dt.$$

(4) 求上題中積分的值。提示：見下方²。

²注意到 $4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin(3t)$ 。

習題 7.18：考慮函數 $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義做：

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

- (1) 證明 f 在 $[0, \pi]$ 上是 C^1 類的。
- (2) 對於每個 $n \in \mathbb{N}_0$ ，證明下列積分定義良好：

$$I_n := \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

- (3) 對於每個 $n \in \mathbb{N}_0$ ，求 $I_{n+1} - I_n$ 的值以及 I_n 的值。
- (4) 令 $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 為 C^1 函數。證明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

- (5) 證明下列積分會收斂，並求他的值：

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

習題 7.19 【Laplace 方法，定理 7.3.1】：在這個習題中，我們會證明定理 7.3.1 當中敘述的 Laplace 方法。首先，我們注意到我們可以假設 $g(c) > 0$ 。

- (1) 證明對於任意 $\lambda \geq 1$ ，函數 $x \mapsto g(x)e^{\lambda h(x)}$ 在 (a, b) 上是可積的。
- (2) 對於任意 $\varepsilon \in (0, g(c)) \cap (0, -h''(c))$ ，證明存在 $\delta > 0$ 使得

$$h(c) + \frac{1}{2}(h''(c) + \varepsilon)(x - c)^2 \geq h(x) \geq h(c) + \frac{1}{2}(h''(c) - \varepsilon)(x - c)^2,$$

還有

$$g(c) + \varepsilon \geq g(x) \geq g(c) - \varepsilon,$$

對於所有 $x \in [c - \delta, c + \delta] \subseteq (a, b)$ 。

再來，我們考慮下列分解：

$$\int_a^b g(x)e^{\lambda h(x)} dx = \int_a^{c-\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx + \int_{c+\delta}^b g(x)e^{\lambda h(x)} dx.$$

- (3) 我們首先處理這一項： $\int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx$ 。證明

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx \geq (g(c) - \varepsilon)e^{\lambda h(c)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\lambda(-h''(c) + \varepsilon)}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

還有

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx \leq (g(c) + \varepsilon)e^{\lambda h(c)} \sqrt{\frac{1}{\lambda(-h''(c) - \varepsilon)}} \int_{-\delta\sqrt{\lambda(-h''(c) - \varepsilon)}}^{\delta\sqrt{\lambda(-h''(c) - \varepsilon)}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

推得

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}} \cdot g(c)e^{\lambda h(c)}, \quad \text{當 } \lambda \rightarrow +\infty.$$

- (4) 現在我們來處理剩下的項。證明存在 $\eta > 0$ 使得 $|x - c| \geq \delta$ 會蘊含 $h(x) \leq h(c) - \eta$ 。接著，推得對於任意 $\lambda \geq 1$ ，我們有

$$\left| e^{-\lambda h(c)} \int_a^{c-\delta} g(x)e^{\lambda h(x)} dx \right| \leq M \cdot e^{-\eta\lambda}, \quad \text{以及} \quad \left| e^{-\lambda h(c)} \int_{c+\delta}^b g(x)e^{\lambda h(x)} dx \right| \leq M \cdot e^{-\eta\lambda},$$

其中

$$M = e^{-h(c)+\eta} \int_a^b |g(x)|e^{h(x)} dx$$

是個常數。

- (5) 總結定理。