Exercise 8.1 : Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of functions from I to $\mathbb{R}$. Suppose that f_n converges pointwise to a function f.

(1) Suppose that every function f_n is convex, show that f is convex.

(2) Suppose that every function f_n is non-decrasing, show that f is non-decreasing.

(3) Suppose that every function f_n is strictly increasing, is f necessarily strictly increasing?

(4) Suppose that every function f_n is periodic with period T, show that f is periodic with period T.

Exercise 8.2 : Consider the sequence of functions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ defined as below,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big).$$

Show that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.

Exercise 8.3 : For $n \in \mathbb{N}$, define the function u_n on $\mathbb{R}_+$ as below,

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) Show that the series $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converges pointwise on $\mathbb{R}_+$.

(2) Show that the series $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converges uniformly on $[0, A]$ for any $A > 0$.

(3) Show that for every $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geqslant \frac{1}{5}.$$

(4) Deduce that the series $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ does not converge uniformly on $\mathbb{R}_+$.

習題 8.1 ： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，以及 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$ 的函數序列。我們假設 f_n 逐點收斂到函數 f。

(1) 假設每個函數 f_n 都是凸函數，證明 f 是凸函數。

(2) 假設每個函數 f_n 都是非遞減的，證明 f 是非遞減的。

(3) 假設每個函數 f_n 都是嚴格遞增的，f 一定會是嚴格遞增的嗎？

(4) 假設每個函數 f_n 都是有週期性的，且週期為 T，證明 f 也是有週期性的，且週期為 T。

習題 8.2 ： 考慮函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big).$$

證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂。

習題 8.3 ： 對於 $n \in \mathbb{N}$，定義在 $\mathbb{R}_+$ 上的函數 u_n 如下：

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) 證明級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂。

(2) 證明對於任意 $A > 0$，級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會在 $[0, A]$ 上均勻收斂。

(3) 證明對於每個 $n \in \mathbb{N}$，我們有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geqslant \frac{1}{5}.$$

(4) 推得級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 不會在 $\mathbb{R}_+$ 上均勻收斂。

Exercise 8.4 :

(1) Let us consider a sequence of functions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ defined on $\mathbb{R}_+$ as follows,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{if } x \in [0, n], \\ 0 & \text{if } x > n. \end{cases}$$

Show that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly to $f : x \mapsto e^{-x}$ on $\mathbb{R}_+$.

(2) Consider another sequence of functions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ defined on $\mathbb{C}$ as follows,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad g_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Show that $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly to g on every compact subset of $\mathbb{C}$.

Exercise 8.5 : For $n \in \mathbb{N}$, define $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ as below,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) Show that the series of functions $\sum u_n$ converges pointwise on $\mathbb{R}_+$, but does not converge uniformly on $\mathbb{R}_+$.

(2) Show that the series of functions $\sum (-1)^n u_n$ converges uniformly on $\mathbb{R}_+$ but does not converge normally on $\mathbb{R}_+$.

Exercise 8.6 : Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function and $(P_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of polynomials that converges uniformly to f on $\mathbb{R}$.

(1) Show that there exists $N \geqslant 1$ such that

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

(2) When $n \geqslant N$, what can we say about the polynomial $P_n - P_N$?

(3) Deduce that f is a polynomial function.

習題 8.4 ：

(1) 讓我們考慮定義在 $\mathbb{R}_+$ 上的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{若 } x \in [0, n], \\ 0 & \text{若 } x > n. \end{cases}$$

證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上均勻收斂到 $f : x \mapsto e^{-x}$。

(2) 考慮另外一個定義在 $\mathbb{C}$ 上的函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad g_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

證明 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會在每個 $\mathbb{C}$ 的緊緻子集合上均勻收斂到 g。

習題 8.5 ： 對於 $n \in \mathbb{N}$，定義 $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) 證明函數級數 $\sum u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂，但不會均勻收斂。

(2) 證明函數級數 $\sum (-1)^n u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂，但不會均勻收斂。

習題 8.6 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為函數，以及 $(P_n)_{n\geqslant 1}$ 為會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂到 f 的多項式序列。

(1) 證明存在 $N \geqslant 1$ 滿足

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

(2) 當 $n \geqslant N$，我們可以對多項式 $P_n - P_N$ 說些什麼？

(3) 推得 f 是個多項式函數。

Exercise 8.7 : Let $I = [a,b]$ be a segment and $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of (not necessarily continuous) functions from I to $\mathbb{R}$. Suppose that

(i) for each $n \geqslant 1$, the function f_n is increasing on I;

(ii) the sequence $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges pointwise to a continuous function $f : I \to \mathbb{R}$.

(1) Show that f is increasing on I.

(2) Let us fix $\varepsilon > 0$. Show that we can find a partition $P = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant m} \in \mathcal{P}([a,b])$ such that
$$\forall k = 0,\dots,m-1, \quad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$

(3) Show that there exists $N \geqslant 1$ such that
$$\forall n \geqslant N, \forall k = 0,\dots,m, \quad |f(x_k) - f_n(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$

(4) Deduce that for all $n \geqslant N$ and $x \in [a,b]$, we have $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, and conclude that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges to f uniformly.

Exercise 8.8 :

(1) Let $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ be a segment, $(W, \|\cdot\|)$ be a normed vector space, and $K > 0$. Consider a seuqnece of functions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ from I to W that are K-Lipschitz continuous. Show that if $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges pointwise to f, then the convergence is uniform.

(2) Let $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ be an interval and $(f_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of convex functions from I to $\mathbb{R}$ that converges pointwise to f. We want to show that this convergence is uniform on every segment of I.

(a) Let $c,d \in I$ such that $[c,d] \subseteq (a,b)$. Consider $p \in (a,c)$ and $q \in (d,b)$. Show that the following two sequences
$$\left(\frac{f_n(p) - f_n(c)}{p-c}\right)_{n\geqslant 1}, \quad \text{and} \quad \left(\frac{f_n(d) - f_n(q)}{d-q}\right)_{n\geqslant 1}$$
are convergent, so bounded.

(b) Let $K > 0$ be a constant that is an upper bound of the absolute value of the terms of the above two sequences. Show that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ is a sequence of K-Lipschitz continuous functions on $[c,d]$.

(c) Conclude that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly to f on $[c,d]$.

(d) Is it true that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges to f uniformly on (a,b) in general?

習題 8.7 ： 令 $I = [a,b]$ 為線段且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$（未必連續）的函數序列。假設

(i) 對於每個 $n \geqslant 1$，函數 f_n 在 I 上是遞增的；

(ii) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到連續函數 $f : I \to \mathbb{R}$。

(1) 證明 f 在 I 上是遞增的。

(2) 讓我們固定 $\varepsilon > 0$。證明我們可以找到分割 $P = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant m} \in \mathcal{P}([a,b])$ 使得
$$\forall k = 0,\dots,m-1, \quad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$

(3) 證明存在 $N \geqslant 1$ 使得
$$\forall n \geqslant N, \forall k = 0,\dots,m, \quad |f(x_k) - f_n(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$

(4) 推得對於所有 $n \geqslant N$ 以及 $x \in [a,b]$，我們有 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$，並總結 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f。

習題 8.8 ：

(1) 令 $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 為線段，$(W, \|\cdot\|)$ 為賦範向量空間，以及 $K > 0$。考慮由 I 映射至 W，且為 K-Lipschitz 連續的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$。證明如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐點收斂至 f，那麼這個收斂是均勻的。

(2) 令 $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，以及 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$ 的凸函數序列，且會逐點收斂至 f。我們想要證明這個收斂在每個 I 的線段上是均勻的。

(a) 令 $c,d \in I$ 滿足 $[c,d] \subseteq (a,b)$。考慮 $p \in (a,c)$ 以及 $q \in (d,b)$。證明下列兩個序列
$$\left(\frac{f_n(p) - f_n(c)}{p-c}\right)_{n\geqslant 1}, \quad \text{以及} \quad \left(\frac{f_n(d) - f_n(q)}{d-q}\right)_{n\geqslant 1}$$
會收斂，所以有界。

(b) 令 $K > 0$ 為常數，假設他是上面兩個序列各項絕對值的一個上界。證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $[c,d]$ 上是個 K-Lipschitz 連續的函數序列。

(c) 總結 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[c,d]$ 上均勻收斂到 f。

(d) 一般來說，$(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是會在 (a,b) 上均勻收斂到 f 的嗎？

Exercise 8.9 (Cantor–Lebesgue function) **:** We recall the subsets $(C_n)_{n\geqslant 0}$ defined in Exercise 2.21,

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0,$$

and their intersection $\mathcal{C} := \bigcap_{n\geqslant 0} C_n$ called the Cantor set. For $n \geqslant 1$, we also define $I_n := [0,1]\backslash C_n$, which is an open subset of $\mathbb{R}$. Let us define a sequence of functions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ by induction,

$$\forall x \in [0,1], \quad f_0(x) = x, \quad \text{and} \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & \text{if } x \in [0,\frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{if } x \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2) & \text{if } x \in [\frac{2}{3},1]. \end{cases}$$

(1) Represent graphically the functions f_0, f_1, and f_2.

(2) Show that $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2}\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$ for every $n \geqslant 0$.

(3) Deduce that the sequence of functions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converges pointwise to a limit function f, which is continuous.

(4) For any fixed integers $m \leqslant n$, show that f_n is a constant function on every open subinterval of I_m.

(5) Deduce that $f'(x) = 0$ for every $x \in [0,1]\backslash\mathcal{C}$.

The limit function f is called the *Cantor–Lebesgue function*. It is a non-zero function that has zero derivative on $[0,1]$ except for the measure zero set $\mathcal{C}$. Therefore, the function f *does not* satisfy the first fundamental theorem of calculus.

Exercise 8.10 : Consider the sequenece of functions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ defined as below,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \quad f_n(x) = \big(\cos x\big)^n \cdot \sin x.$$

(1) Show that $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly to the zero function. Hint: see below[1].

(2) For $n \geqslant 1$, define $g_n = (n+1)f_n$.

  (a) Show that for any $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, the sequence of functions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converges uniformly to the zero function on $[\delta, \frac{\pi}{2}]$.

  (b) Find the limit of the following sequence

$$\Big(\int_0^{\pi/2} g_n(t)\,\mathrm{d}t\Big)_{n\geqslant 1},$$

  and deduce that $(g_n)_{n\geqslant 1}$ does not converge uniformly on $[0, \frac{\pi}{2}]$.

[1]Look at the behavior around 0 and away from 0 separately.

習題 8.9【Cantor–Lebesgue 函數】**：**我們回顧在習題 2.21 中定義子的子集合 $(C_n)_{n\geqslant 0}$：

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = \tfrac{1}{3}C_n \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}), \quad \forall n \geqslant 0,$$

以及他們的交集 $\mathcal{C} := \bigcap_{n\geqslant 0} C_n$ 稱作 Cantor 集合。對於 $n \geqslant 1$，我們也定義 $I_n := [0,1]\backslash C_n$，這會是個在 $\mathbb{R}$ 中的開子集合。讓我們以遞迴的方式來定義函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 0}$：

$$\forall x \in [0,1], \quad f_0(x) = x, \quad \text{以及} \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & \text{若 } x \in [0,\frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{若 } x \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2) & \text{若 } x \in [\frac{2}{3},1]. \end{cases}$$

(1) 對函數 f_0、f_1 還有 f_2 作圖。

(2) 證明對於每個 $n \geqslant 0$，我們有 $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2}\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$。

(3) 推得函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 會逐點收斂到連續的極限函數 f。

(4) 對於任意固定的整數 $m \leqslant n$，證明 f_n 在任何 I_m 的開子區間上都是常數函數。

(5) 推得對於每個 $x \in [0,1]\backslash\mathcal{C}$，我們有 $f'(x) = 0$。

極限函數 f 稱作 <u>*Cantor–Lebesgue* 函數</u>。這是個非零函數，在 $[0,1]$ 上除了測度為零的集合 $\mathcal{C}$ 之外，微分都是零。因此，函數 f <u>不會</u>滿足微積分第一基本定理。

習題 8.10 ：考慮函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \quad f_n(x) = \big(\cos x\big)^n \cdot \sin x.$$

(1) 證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到零函數。提示：如下[1]。

(2) 對於 $n \geqslant 1$，定義 $g_n = (n+1)f_n$。

  (a) 證明對於任意 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$，函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻收斂到零函數。

  (b) 求下列序列的極限：

$$\Big(\int_0^{\pi/2} g_n(t)\,\mathrm{d}t\Big)_{n\geqslant 1},$$

  並推得 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 不會在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻收斂。

[1]分別檢查函數在 0 附近還有在 0 以外的行為。

Exercise 8.11 : Let $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ and $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ be two absolutely convergent series in $\mathbb{R}$, and $c \in \mathbb{R}$.

(1) Show that the following function f is well defined on $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c + \sum_{n\geqslant 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

(2) Show that the function f is continuous on $\mathbb{R}$.

(3) If, in addition, the series $\sum na_n$ and $\sum nb_n$ converges absolutely, show that

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n\big(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)\big).$$

(4) Find the value of $\int_0^{2\pi} f$.

Exercise 8.12 : Let $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function, and $(f_n)_{n\geqslant 0}$ be a sequence of functions on $[0,1]$ defined as follows,

$$f_0 \equiv 0, \quad \text{and} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Use an induction to show that for every $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in [0,1]$, we have

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!} \|g\|_\infty .$$

(2) Show that $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converges uniformly to a continuous function f satisfying

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercise 8.13 : Show that the following function is of class $\mathcal{C}^\infty$ on $\mathbb{R}_+^* := (0,+\infty)$,

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Exercise 8.14 : Define the functions $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ as below,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}.$$

(1) Show that the series of functions $S = \sum_{n\geqslant 1} u_n$ is well defined on $\mathbb{R}_+$.

(2) Check that S is continuous and is of class $\mathcal{C}^\infty$ on $\mathbb{R}_+$.

(3) Show that S does not have a right derivative at 0. Hint: see below[2].

[2] Show that the limit $\frac{S(x)-S(0)}{x}$ does not exist when $x \to 0+$.

習題 8.11 ： 令 $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ 以及 $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ 為兩個在 $\mathbb{R}$ 中絕對收斂的級數，以及 $c \in \mathbb{R}$。

(1) 證明下列函數 f 在 $\mathbb{R}$ 上是定義良好的：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c + \sum_{n\geqslant 1} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

(2) 證明函數 f 在 $\mathbb{R}$ 上連續。

(3) 如果，我們還假設級數 $\sum na_n$ 和 $\sum nb_n$ 都會均勻收斂，證明

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n\big(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx)\big).$$

(4) 求 $\int_0^{2\pi} f$ 的值。

習題 8.12 ： 令 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ 為連續函數，且 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 為在 $[0,1]$ 上的函數序列，定義如下：

$$f_0 \equiv 0, \quad \text{以及} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 使用歸納法來證明對於每個 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 $x \in [0,1]$，我們有

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!} \|g\|_\infty .$$

(2) 證明 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 會均勻收斂至一個連續函數。我們將極限函數記作 f，證明他會滿足

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

習題 8.13 ： 證明下列函數在 $\mathbb{R}_+^* := (0,+\infty)$ 上會是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的：

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

習題 8.14 ： 定義函數 $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}.$$

(1) 證明函數級數 $S = \sum_{n\geqslant 1} u_n$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是定義良好的。

(2) 檢查 S 在 $\mathbb{R}_+$ 上是連續的，且是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。

(3) 證明 S 在 0 點的右微分不存在。提示：如下[2]。

[2] 證明 $\frac{S(x)-S(0)}{x}$ 當 $x \to 0+$ 時的極限不存在。

Exercise 8.15 :

(1) Check that the following function is well defined,

$$\forall x>0, \quad f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2x}.$$

(2) Consider the function

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}, \\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{1+xt^2}. \end{array}$$

(a) Check that for every fixed $x>0$, the function $t\mapsto u(x,t)$ is integrable on $\mathbb{R}_+$.

(b) For every $x>0$, compute the following integral

$$\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

(c) Check that for every $x>0$, we have

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant u(x,0) = 1.$$

(d) Deduce that when $x\to 0+$, we have

$$f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \mathcal{O}(1).$$

Exercise 8.16 : Let $\sum a_n z^n$ be a power series with radius of convergence $R\in[0,+\infty)$.

(1) Write R' for the radius of convergence of the power series $\sum a_n z^{2n}$. Determine the relation between R' and R.

(2) Write R'' for the radius of convergence of the power series $\sum a_{2n} z^n$. Determine the relation between R' and R.

Exercise 8.17 : Find the radius of convergence of the power series $\sum a_n z^n$ for different choices of $(a_n)_{n\geqslant 1}$,

(1) $a_n = \cosh(n)$,
(2) $a_n = \sinh(n)$,
(3) $a_n = \frac{\cosh(n)}{n}$,
(4) $a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$,
(5) $a_n = e^{\sqrt{n}}$,
(6) $a_n = n^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$,
(7) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,
(8) $a_n = n^{(-1)^n}$,
(9) $a_n = \binom{2n}{n}$.

Exercise 8.18 :

(1) Let $\sum a_n z^n$ be a power series with radius of convergence $R>0$. Show that the radius of convergence of $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ is $+\infty$.

(2) Suppose that the power series $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ has radius of convergence $R<+\infty$. What can we say

習題 8.15 ：

(1) 檢查下列函數是定義良好的：

$$\forall x>0, \quad f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2x}.$$

(2) 考慮函數

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}, \\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{1+xt^2}. \end{array}$$

(a) 檢查對於每個固定的 $x>0$，函數 $t\mapsto u(x,t)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是可積的。

(b) 對於每個 $x>0$，計算下列積分：

$$\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

(c) 檢查對於每個 $x>0$，我們有

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant u(x,0) = 1.$$

(d) 推得當 $x\to 0+$ 時，我們有

$$f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \mathcal{O}(1).$$

習題 8.16 ： 令 $\sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R\in[0,+\infty)$ 的冪級數。

(1) 把冪級數 $\sum a_n z^{2n}$ 的收斂半徑記作 R'。求 R' 和 R 之間的關係式。

(2) 把冪級數 $\sum a_{2n} z^n$ 的收斂半徑記作 R''。求 R'' 和 R 之間的關係式。

習題 8.17 ： 在下面不同 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇中，求冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑：

(1) $a_n = \cosh(n)$,
(2) $a_n = \sinh(n)$,
(3) $a_n = \frac{\cosh(n)}{n}$,
(4) $a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$,
(5) $a_n = e^{\sqrt{n}}$,
(6) $a_n = n^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$,
(7) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,
(8) $a_n = n^{(-1)^n}$,
(9) $a_n = \binom{2n}{n}$.

習題 8.18 ：

(1) 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，其收斂半徑為 $R>0$。證明 $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ 的收斂半徑為 $+\infty$。

(2) 假設 $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ 的收斂半徑為 $R<+\infty$。我們可以對 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑說些什麼？

about the radius of convergence of $\sum a_n z^n$?

Exercise 8.19 : Let $\sum a_n z^n$ and $\sum b_n z^n$ be two power series with radius of convergence R_1 and R_2. Consider the power series $\sum a_n b_n z^n$ and denote its radius of convergence by R.

(1) Show that $R \geqslant R_1 R_2$.

(2) Find an example for which we have $R > R_1 R_2$.

Exercise 8.20 : Let $(a_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of nonzero complex numbers such that

$$\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Show that the radius of convergence of the power series $\sum a_n z^n$ is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercise 8.21 : Let $\sum a_n z^n$ be a power series with radius of convergence R. Let $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ be the partial sums of $\sum a_n$. Denote the radius of convergence of $\sum S_n z^n$ by r.

(1) Show that $r \leqslant R$.

(2) Show that $\min\{1, R\} \leqslant r$. Hint: see below[3].

Exercise 8.22 : Find the radius of convergence and explicit the sum of each of the following power series,

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2n+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\cos(n\theta), \theta \in \mathbb{R}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} z^n$,

(6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 + \cdots + \frac{1}{n}\Big) z^n$.

Exercise 8.23 :

(1) Justify why we may rewrite the following function as a power series,

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

(2) (a) Use (1) and apply a theorem carefully to justify that we have the following power series,

$$\forall x \in (-1,1), \quad \ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

[3] The power series $\sum S_n z^n$ can be seen as the Cauchy product between $\sum a_n z^n$ and a specific power series that you need to choose.

習題 8.19 ： 令 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 為冪級數，他們的收斂半徑分別記作 R_1 和 R_2。考慮冪級數 $\sum a_n b_n z^n$ 並把他的收斂半徑記作 R。

(1) 證明 $R \geqslant R_1 R_2$。

(2) 請給出一個例子，使得我們有 $R > R_1 R_2$。

習題 8.20 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為非零複數所構成的序列，滿足：

$$\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

證明冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。

習題 8.21 ： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，把他的收斂半徑記作 R。令 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ 為 $\sum a_n$ 的部份和。我們把 $\sum S_n z^n$ 的收斂半徑記作 r。

(1) 證明 $r \leqslant R$。

(2) 證明 $\min\{1, R\} \leqslant r$。提示：如下[3]。

習題 8.22 ： 求下列每個冪級數的收斂半徑，以及明確寫下他的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2n+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\cos(n\theta), \theta \in \mathbb{R}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} z^n$,

(6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 + \cdots + \frac{1}{n}\Big) z^n$.

習題 8.23 ：

(1) 解釋為什麼我們可以把下面這個函數寫成冪級數：

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

(2) (a) 使用 (1) 以及一個定理，來嚴謹解釋為什麼我們會有下面這個冪級數：

$$\forall x \in (-1,1), \quad \ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

[3] 我們可以把冪級數 $\sum S_n z^n$ 看成是 $\sum a_n z^n$ 和你特別選定的一個冪級數所構成的柯西積。

(b) Use (2a) and apply a theorem carefully to justify that we have

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

(3) (a) Use (1) to deduce that

$$\forall x\in(-1,1),\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}.$$

(b) Then, show that

$$\forall x\in(-1,1),\quad \arctan(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

(4) Use (3b) to show that

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1-}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}.$$

(5) Mimic the previous questions to show that

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\Big(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big).$$

Exercise 8.24 : Let $f(x)=\sum a_n x^n$ be a real-valued power series with radius of convergence $R>0$. We say that f is an even function if $f(x)=f(-x)$ for all $x\in(-R,R)$. Show that f is an even function if and only if $a_{2k+1}=0$ for all $k\in\mathbb{N}_0$.

Exercise 8.25 : Let f be a real-valued power series with radius of convergence $R>0$. Suppose that there exists $r\in(0,R)$ such that $f(x)=0$ for $x\in(-r,r)$. Show that $f(x)=0$ for all $x\in(-R,R)$.

Exercise 8.26 : Let $f(z)=\sum a_n z^n$ be a power series with radius of convergence $R=+\infty$. Suppose that f is bounded on $\mathbb{C}$. Show that f is a constant function on $\mathbb{C}$. Hint: see below[4].

Exercise 8.27 : Expand the following functions into power series around $x=0$. Do not forget to write down the radius of convergence of each of the power series.

(1) $\ln(a+x)$, $a>0$,

(2) $\ln(1+2x^2)$,

(3) $\frac{1}{a-x}$, $a\neq 0$,

(4) $\sin(x)$.

[4] Use the Cauchy's formula in Theorem 8.3.26.

(b) 使用 (2a) 以及一個定理，來嚴謹解釋：

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

(3) (a) 使用 (1) 來推得：

$$\forall x\in(-1,1),\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}.$$

(b) 接著，證明：

$$\forall x\in(-1,1),\quad \arctan(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

(4) 使用 (3b) 來證明：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1-}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}.$$

(5) 模仿前面的小題來證明：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\Big(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big).$$

習題 8.24 ： 令 $f(x)=\sum a_n x^n$ 為取值實數的冪級數，收斂半徑為 $R>0$。如果對於所有 $x\in(-R,R)$，我們有 $f(x)=f(-x)$，則我們說 f 是個偶函數。證明若且唯若對於所有 $k\in\mathbb{N}_0$，我們有 $a_{2k+1}=0$，則 f 是個偶函數。

習題 8.25 ： 令 $f(x)=\sum a_n x^n$ 為取值實數的冪級數，收斂半徑為 $R>0$。假設存在 $r\in(0,R)$ 使得對於 $x\in(-r,r)$，我們有 $f(x)=0$。證明對於所有 $x\in(-R,R)$，我們有 $f(x)=0$。

習題 8.26 ： 令 $f(z)=\sum a_n z^n$ 為冪級數，收斂半徑為 $R=+\infty$。假設 f 在 $\mathbb{C}$ 上是有界的。證明 f 在 $\mathbb{C}$ 上是個常數函數。提示：如下[4]。

習題 8.27 ： 把下列函數在 $x=0$ 附近展開成冪級數。不要忘記寫下每個冪級數的收斂半徑。

(1) $\ln(a+x)$, $a>0$,

(2) $\ln(1+2x^2)$,

(3) $\frac{1}{a-x}$, $a\neq 0$,

(4) $\sin(x)$.

[4] 使用定理 8.3.26 中的柯西公式。

Exercise 8.28 : Let $(c_n)_{n\geqslant 0}$ be a real sequence defined by $c_0 = 1$ and the following recurrence formula,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

(1) Suppose that the power series $\sum c_n z^n$ has radius of convergence $R > 0$ and denote the series by $f(z)$. Show that

$$\forall z \in D(0,R), \quad zf(z)^2 = f(z) - 1, \quad \text{and} \quad f(z) = \frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z}).$$

(2) Show that the function $z \mapsto \frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z})$ can be extended to 0 by continuity, and can be written as a power series around 0. Find the corresponding power series and its radius of convergence.

(3) Deduce that

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercise 8.29 : We want to study the following function around 0,

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

(1) (a) For $k \in \mathbb{N}_0$, show that

$$\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{2}.$$

(b) Find an expansion in power series of f around 0 by integrating term by term. Do not forget to justify why you can proceed this way.

(2) Find a differential equation satisfied by f. Apply the method in Example 8.3.35 to determine an expansion in power series of f around 0.

Exercise 8.30 : Let (K,d) be a compact metric space and $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ is a subset. Show that if $\mathcal{F}$ is equicontinuous, then $\overline{\mathcal{F}}$ is also equicontinuous.

習題 8.28 ： 令 $(c_n)_{n\geqslant 0}$ 為實數序列，由 $c_0 = 1$ 以及下面這個遞迴式所定義：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

(1) 假設冪級數 $\sum c_n z^n$ 的收斂半徑滿足 $R > 0$，我們把這個級數記作 $f(z)$。證明

$$\forall z \in D(0,R), \quad zf(z)^2 = f(z) - 1, \quad 以及 \quad f(z) = \frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z}).$$

(2) 證明函數 $z \mapsto \frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z})$ 可以藉由連續性拓延到 0 點，而且在 0 附近可以被寫成冪級數。求所對應的冪級數以及他的收斂半徑。

(3) 推得

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

習題 8.29 ： 我們想要討論下列函數在 0 附近的行為：

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

(1) (a) 對於 $k \in \mathbb{N}_0$，證明

$$\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{2}.$$

(b) 透過對每項積分，求 f 在 0 附近的冪級數展開。不要忘記解釋為什麼可以這樣做。

(2) 找到一個 f 可以滿足的微分方程式。使用範例 8.3.35 中的方法來求 f 在 0 附近的冪級數展開。

習題 8.30 ： 令 (K,d) 為緊緻賦距空間以及 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 為子集合。證明如果 $\mathcal{F}$ 是等度連續的，那麼 $\overline{\mathcal{F}}$ 也是等度連續的。

Exercise 8.31 : Let (K, d) be a compact metric space and $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ be equipped with the norm $\|\cdot\|_\infty$. Consider a subset $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

(1) Suppose that $\mathcal{F}$ is precompact.

  (a) Show that for every $\varepsilon > 0$, there exists $f \in \mathcal{F}$ such that $B(f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$ is infinite.

  (b) Deduce that if $(f_n)_{n\geqslant 1}$ is a sequence in $\mathcal{F}$, then we may extract a Cauchy subsequence from $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

(2) Suppose that from any sequence $(f_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathcal{F}$, we may extract a Cauchy subsequence.

  (a) Check that $\overline{\mathcal{F}}$ is complete.

  (b) Let $(g_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence in $\overline{\mathcal{F}}$. For every $n \geqslant 1$, check that we may choose $f_n \in \mathcal{F}$ with $\|f_n - g_n\|_\infty \leqslant 2^{-n}$. Show that $(g_n)_{n\geqslant 1}$ has a convergent subsequence in $\overline{\mathcal{F}}$.

  (c) Deduce that $\mathcal{F}$ is precompact.

Exercise 8.32 : Define the following function on $\mathbb{R}_{>0}$,

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Explain why g is well defined on $\mathbb{R}_{>0}$.

(2) Show that $g(x) \sim \frac{1}{x}$ when $x \to +\infty$. Hint: see below[5].

Exercise 8.33 : Use the dominated convergence theorem (Theorem 8.5.5) to show the following convergence,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Then, use Wallis' integrals (Exercise A1.2) to deduce the value of the integral

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Hint: see below[6].

[5] Apply the dominated convergence theorem to the integral defining $xg(x)$.

[6] Consider the sequence of piecewise continuous functions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ defined by $f_n : t \mapsto (1 - \frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$.

習題 8.31 ： 令 (K, d) 為緊緻賦距空間並在 $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ 上賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$。考慮子集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$。

(1) 假設 $\mathcal{F}$ 是預緊緻的。

  (a) 證明對於每個 $\varepsilon > 0$，存在 $f \in \mathcal{F}$ 使得 $B(f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$ 是無限的。

  (b) 推得如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個在 $\mathcal{F}$ 中的序列，那麼我們可以從 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 中萃取出一個柯西子序列。

(2) 假設從任意 $\mathcal{F}$ 中的序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$，我們可以萃取出一個柯西子序列。

  (a) 檢查 $\overline{\mathcal{F}}$ 是完備的。

  (b) 令 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $\overline{\mathcal{F}}$ 中的序列。對於每個 $n \geqslant 1$，檢查我們可以取 $f_n \in \mathcal{F}$ 滿足 $\|f_n - g_n\|_\infty \leqslant 2^{-n}$。證明 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $\overline{\mathcal{F}}$ 中有個收斂的子序列。

  (c) 推得 $\mathcal{F}$ 是預緊緻的。

習題 8.32 ： 定義在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的函數如下：

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 解釋為什麼 g 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上是定義梁好的。

(2) 證明 $g(x) \sim \frac{1}{x}$ 當 $x \to +\infty$。提示：如下[5]。

習題 8.33 ： 使用控制收斂定理（定理 8.5.5）來證明下列收斂：

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

再來，使用 Wallis 積分（習題 A1.2）來推得下面積分的值：

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

提示：如下[6]。

[5] 對定義 $xg(x)$ 的積分使用控制收斂定理。

[6] 考慮片段連續函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義做 $f_n : t \mapsto (1 - \frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$。

Exercise 8.34 : We define

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Show that $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(2) Use the change of variables $t = u^{1/n}$ and the dominated convergence theorem to show that

$$nI_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(3) Deduce that

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Exercise 8.35 : Let

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Show that g is well defined on $(0, +\infty)$.

(2) Show that g is of class $\mathcal{C}^1$. Find g' and g.

Exercise 8.36 : Show that for $x > 1$, we have

$$\Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercise 8.37 : Let

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{and} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

(1) Show that g is well defined on $\mathbb{R}_+$.

(2) Show that g is of class $\mathcal{C}^1$ and is a solution to the differential equation,

$$y' - 2xy = -2I.$$

(3) Deduce that $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

習題 8.34 ： 我們定義

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 證明 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$。

(2) 使用變數變換 $t = u^{1/n}$ 以及控制收斂定理來證明

$$nI_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(3) 推得

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

習題 8.35 ： 令

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 證明 g 在 $(0, +\infty)$ 上是定義良好的。

(2) 證明 g 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。求 g' 和 g。

習題 8.36 ： 證明對於 $x > 1$，我們有

$$\Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

習題 8.37 ： 令

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{以及} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

(1) 證明 g 在 $\mathbb{R}_+$ 上是定義良好的。

(2) 證明 g 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且是下面這個微分方程式的解：

$$y' - 2xy = -2I.$$

(3) 推得 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。