第八章 ：函數的數列與級數

習題 8.1 ： 令 $I \subseteq \mathbb{R}$ 為區間，以及 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$ 的函數序列。我們假設 f_n 逐點收斂到函數 f。

(1) 假設每個函數 f_n 都是凸函數，證明 f 是凸函數。

(2) 假設每個函數 f_n 都是非遞減的，證明 f 是非遞減的。

(3) 假設每個函數 f_n 都是嚴格遞增的，f 一定會是嚴格遞增的嗎？

(4) 假設每個函數 f_n 都是有週期性的，且週期為 T，證明 f 也是有週期性的，且週期為 T。

習題 8.2 ： 考慮函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big).$$

證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂。

習題 8.3 ： 對於 $n \in \mathbb{N}$，定義在 $\mathbb{R}_+$ 上的函數 u_n 如下：

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) 證明級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂。

(2) 證明對於任意 $A > 0$，級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 會在 $[0, A]$ 上均勻收斂。

(3) 證明對於每個 $n \in \mathbb{N}$，我們有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geqslant \frac{1}{5}.$$

(4) 推得級數 $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 不會在 $\mathbb{R}_+$ 上均勻收斂。

習題 8.4 ：

(1) 讓我們考慮定義在 $\mathbb{R}_+$ 上的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{若 } x \in [0, n], \\ 0 & \text{若 } x > n. \end{cases}$$

證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上均勻收斂到 $f : x \mapsto e^{-x}$。

(2) 考慮另外一個定義在 $\mathbb{C}$ 上的函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad g_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

證明 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會在每個 $\mathbb{C}$ 的緊緻子集合上均勻收斂到 g。

習題 8.5 ： 對於 $n \in \mathbb{N}$，定義 $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

(1) 證明函數級數 $\sum u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂，但不會均勻收斂。

(2) 證明函數級數 $\sum (-1)^n u_n$ 會在 $\mathbb{R}_+$ 上逐點收斂，但不會均勻收斂。

習題 8.6 ： 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 為函數，以及 $(P_n)_{n\geqslant 1}$ 為會在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂到 f 的多項式序列。

(1) 證明存在 $N \geqslant 1$ 滿足

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

(2) 當 $n \geqslant N$，我們可以對多項式 $P_n - P_N$ 說些什麼？

(3) 推得 f 是個多項式函數。

習題 8.7： 令 $I=[a,b]$ 為線段且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$（未必連續）的函數序列。假設

(i) 對於每個 $n\geqslant 1$，函數 f_n 在 I 上是遞增的；

(ii) 序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會逐點收斂到連續函數 $f: I\to\mathbb{R}$。

(1) 證明 f 在 I 上是遞增的。

(2) 讓我們固定 $\varepsilon>0$。證明我們可以找到分割 $P=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant m}\in\mathcal{P}([a,b])$ 使得

$$\forall k=0,\dots,m-1,\quad |f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant\varepsilon.$$

(3) 證明存在 $N\geqslant 1$ 使得

$$\forall n\geqslant N,\forall k=0,\dots,m,\quad |f(x_k)-f_n(x_k)|\leqslant\varepsilon.$$

(4) 推得對於所有 $n\geqslant N$ 以及 $x\in[a,b]$，我們有 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon$，並總結 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到 f。

習題 8.8：

(1) 令 $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 為線段，$(W,\|\cdot\|)$ 為賦範向量空間，以及 $K>0$。考慮由 I 映射至 W，且為 K-Lipschitz 連續的函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$。證明如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐點收斂至 f，那麼這個收斂是均勻的。

(2) 令 $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ 為區間，以及 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 為由 I 映射至 $\mathbb{R}$ 的凸函數序列，且會逐點收斂至 f。我們想要證明這個收斂在每個 I 的線段上是均勻的。

(a) 令 $c,d\in I$ 滿足 $[c,d]\subseteq(a,b)$。考慮 $p\in(a,c)$ 以及 $q\in(d,b)$。證明下列兩個序列

$$\left(\frac{f_n(p)-f_n(c)}{p-c}\right)_{n\geqslant 1},\quad \text{以及}\quad \left(\frac{f_n(d)-f_n(q)}{d-q}\right)_{n\geqslant 1}$$

會收斂，所以有界。

(b) 令 $K>0$ 為常數，假設他是上面兩個序列各項絕對值的一個上界。證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $[c,d]$ 上是個 K-Lipschitz 連續的函數序列。

(c) 總結 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[c,d]$ 上均勻收斂到 f。

(d) 一般來說，$(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是會在 (a,b) 上均勻收斂到 f 的嗎？

習題 8.9 【Cantor–Lebesgue 函數】：我們回顧在習題 2.21 中定義子的子集合 $(C_n)_{n\geqslant 0}$：

$$C_0=[0,1],\quad C_{n+1}=\tfrac{1}{3}C_n\cup\big(\tfrac{1}{3}C_n+\tfrac{2}{3}\big),\quad \forall n\geqslant 0,$$

以及他們的交集 $\mathcal{C}:=\bigcap_{n\geqslant 0}C_n$ 稱作 Cantor 集合。對於 $n\geqslant 1$，我們也定義 $I_n:=[0,1]\backslash C_n$，這會是個在 $\mathbb{R}$ 中的開子集合。讓我們以遞迴的方式來定義函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 0}$：

$$\forall x\in[0,1],\quad f_0(x)=x,\quad \text{以及}\quad f_{n+1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}f_n(3x) & \text{若 } x\in[0,\frac{1}{3}],\\ \frac{1}{2} & \text{若 } x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}f_n(3x-2) & \text{若 } x\in[\frac{2}{3},1].\end{cases}$$

(1) 對函數 f_0、f_1 還有 f_2 作圖。

(2) 證明對於每個 $n\geqslant 0$，我們有 $\|f_{n+2}-f_{n+1}\|_\infty=\frac{1}{2}\|f_{n+1}-f_n\|_\infty$。

(3) 推得函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 會逐點收斂到連續的極限函數 f。

(4) 對於任意固定的整數 $m\leqslant n$，證明 f_n 在任何 I_m 的開子區間上都是常數函數。

(5) 推得對於每個 $x\in[0,1]\backslash\mathcal{C}$，我們有 $f'(x)=0$。

極限函數 f 稱作 *Cantor–Lebesgue 函數*。這是個非零函數，在 $[0,1]$ 上除了測度為零的集合 $\mathcal{C}$ 之外，微分都是零。因此，函數 f 不會滿足微積分第一基本定理。

習題 8.10：考慮函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義如下：

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big],\quad f_n(x)=\big(\cos x\big)^n\cdot\sin x.$$

(1) 證明 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 會均勻收斂到零函數。提示：如下[1]。

(2) 對於 $n\geqslant 1$，定義 $g_n=(n+1)f_n$。

  (a) 證明對於任意 $\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$，函數序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 會在 $[\delta,\frac{\pi}{2}]$ 上均勻收斂到零函數。

  (b) 求下列序列的極限：

$$\left(\int_0^{\pi/2}g_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1},$$

  並推得 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 不會在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上均勻收斂。

[1] 分別檢查函數在 0 附近還有在 0 以外的行為。

習題 8.11 ： 令 $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ 以及 $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ 為兩個在 $\mathbb{R}$ 中絕對收斂的級數，以及 $c\in\mathbb{R}$。

(1) 證明下列函數 f 在 $\mathbb{R}$ 上是定義良好的：

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=c+\sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right).$$

(2) 證明函數 f 在 $\mathbb{R}$ 上連續。

(3) 如果，我們還假設級數 $\sum na_n$ 和 $\sum nb_n$ 都會均勻收斂，證明

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\sum_{n\geqslant 1} n\left(b_n\cos(nx)-a_n\sin(nx)\right).$$

(4) 求 $\int_0^{2\pi} f$ 的值。

習題 8.12 ： 令 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 為連續函數，且 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 為在 $[0,1]$ 上的函數序列，定義如下：

$$f_0\equiv 0,\quad \text{以及}\quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\forall x\in[0,1],\quad f_{n+1}(x)=g(x)+\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 使用歸納法來證明對於每個 $n\in\mathbb{N}_0$ 以及 $x\in[0,1]$，我們有

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{x^n}{n!}\left\|g\right\|_\infty.$$

(2) 證明 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 會均勻收斂至一個連續函數。我們將極限函數記作 f，證明他會滿足

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=g(x)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

習題 8.13 ： 證明下列函數在 $\mathbb{R}_+^*:=(0,+\infty)$ 上會是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的：

$$\forall x>0,\quad f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

習題 8.14 ： 定義函數 $u_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\geqslant 0,\quad u_n(x)=\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}.$$

(1) 證明函數級數 $S=\sum_{n\geqslant 1} u_n$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是定義良好的。

(2) 檢查 S 在 $\mathbb{R}_+$ 上是連續的，且是 $\mathcal{C}^\infty$ 類的。

(3) 證明 S 在 0 點的右微分不存在。提示：如下[2]。

[2]證明 $\frac{S(x)-S(0)}{x}$ 當 $x\to 0+$ 時的極限不存在。

習題 8.15：

(1) 檢查下列函數是定義良好的：

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{1+n^2 x}.$$

(2) 考慮函數

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}, \\ (x,t) & \mapsto & \frac{1}{1+xt^2}. \end{array}$$

(a) 檢查對於每個固定的 $x > 0$，函數 $t \mapsto u(x,t)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上是可積的。

(b) 對於每個 $x > 0$，計算下列積分：

$$\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

(c) 檢查對於每個 $x > 0$，我們有

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant u(x,0) = 1.$$

(d) 推得當 $x \to 0+$ 時，我們有

$$f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \mathcal{O}(1).$$

習題 8.16： 令 $\sum a_n z^n$ 為收斂半徑為 $R \in [0,+\infty)$ 的冪級數。

(1) 把冪級數 $\sum a_n z^{2n}$ 的收斂半徑記作 R'。求 R' 和 R 之間的關係式。

(2) 把冪級數 $\sum a_{2n} z^n$ 的收斂半徑記作 R''。求 R'' 和 R 之間的關係式。

習題 8.17： 在下面不同 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 的選擇中，求冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑：

(1) $a_n = \cosh(n)$,

(2) $a_n = \sinh(n)$,

(3) $a_n = \frac{\cosh(n)}{n}$,

(4) $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$,

(5) $a_n = e^{\sqrt{n}}$,

(6) $a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,

(7) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,

(8) $a_n = n^{(-1)^n}$,

(9) $a_n = \binom{2n}{n}$.

習題 8.18：

(1) 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，其收斂半徑為 $R > 0$。證明 $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ 的收斂半徑為 $+\infty$。

(2) 假設 $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ 的收斂半徑為 $R < +\infty$。我們可以對 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑說些什麼？

習題 8.19 ： 令 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 為冪級數，他們的收斂半徑分別記作 R_1 和 R_2。考慮冪級數 $\sum a_n b_n z^n$ 並把他的收斂半徑記作 R。

(1) 證明 $R \geqslant R_1 R_2$。

(2) 請給出一個例子，使得我們有 $R > R_1 R_2$。

習題 8.20 ： 令 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 為非零複數所構成的序列，滿足：

$$\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

證明冪級數 $\sum a_n z^n$ 的收斂半徑為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。

習題 8.21 ： 令 $\sum a_n z^n$ 為冪級數，把他的收斂半徑記作 R。令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ 為 $\sum a_n$ 的部份和。我們把 $\sum S_n z^n$ 的收斂半徑記作 r。

(1) 證明 $r \leqslant R$。

(2) 證明 $\min\{1, R\} \leqslant r$。提示：如下[3]。

習題 8.22 ： 求下列每個冪級數的收斂半徑，以及明確寫下他的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2n+1}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\cos(n\theta), \theta \in \mathbb{R}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} z^n$,

(6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 + \cdots + \frac{1}{n}\Big) z^n$.

習題 8.23 ：

(1) 解釋為什麼我們可以把下面這個函數寫成冪級數：

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

(2) (a) 使用 (1) 以及一個定理，來嚴謹解釋為什麼我們會有下面這個冪級數：

$$\forall x \in (-1,1), \quad \ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

[3] 我們可以把冪級數 $\sum S_n z^n$ 看成是 $\sum a_n z^n$ 和你特別選定的一個冪級數所構成的柯西積。

(b) 使用 (2a) 以及一個定理，來嚴謹解釋：

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

(3) (a) 使用 (1) 來推得：

$$\forall x\in(-1,1),\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}.$$

(b) 接著，證明：

$$\forall x\in(-1,1),\quad \arctan(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

(4) 使用 (3b) 來證明：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1-}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}.$$

(5) 模仿前面的小題來證明：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\Big(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big).$$

習題 8.24 ： 令 $f(x)=\sum a_n x^n$ 為取值實數的冪級數，收斂半徑為 $R>0$。如果對於所有 $x\in(-R,R)$，我們有 $f(x)=f(-x)$，則我們說 f 是個偶函數。證明若且唯若對於所有 $k\in\mathbb{N}_0$，我們有 $a_{2k+1}=0$，則 f 是個偶函數。

習題 8.25 ： 令 $f(x)=\sum a_n x^n$ 為取值實數的冪級數，收斂半徑為 $R>0$。假設存在 $r\in(0,R)$ 使得對於 $x\in(-r,r)$，我們有 $f(x)=0$。證明對於所有 $x\in(-R,R)$，我們有 $f(x)=0$。

習題 8.26 ： 令 $f(z)=\sum a_n z^n$ 為冪級數，收斂半徑為 $R=+\infty$。假設 f 在 $\mathbb{C}$ 上是有界的。證明 f 在 $\mathbb{C}$ 上是個常數函數。提示：如下[4]。

習題 8.27 ： 把下列函數在 $x=0$ 附近展開成冪級數。不要忘記寫下每個冪級數的收斂半徑。

(1) $\ln(a+x)$, $a>0$,

(2) $\ln(1+2x^2)$,

(3) $\frac{1}{a-x}$, $a\neq 0$,

(4) $\sin(x)$.

[4]使用定理 8.3.26 中的柯西公式。

習題 8.28 ： 令 $(c_n)_{n\geqslant 0}$ 為實數序列，由 $c_0=1$ 以及下面這個遞迴式所定義：

$$\forall n\in\mathbb{N}_0,\quad c_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}c_kc_{n-k}.$$

(1) 假設冪級數 $\sum c_nz^n$ 的收斂半徑滿足 $R>0$，我們把這個級數記作 $f(z)$。證明

$$\forall z\in D(0,R),\quad zf(z)^2=f(z)-1,\quad \text{以及}\quad f(z)=\frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z}).$$

(2) 證明函數 $z\mapsto\frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z})$ 可以藉由連續性拓延到 0 點，而且在 0 附近可以被寫成冪級數。求所對應的冪級數以及他的收斂半徑。

(3) 推得

$$\forall n\in\mathbb{N}_0,\quad c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

習題 8.29 ： 我們想要討論下列函數在 0 附近的行為：

$$f:x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

(1) (a) 對於 $k\in\mathbb{N}_0$，證明

$$\int_0^{+\infty}t^{2k+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{k!}{2}.$$

(b) 透過對每項積分，求 f 在 0 附近的冪級數展開。不要忘記解釋為什麼可以這樣做。

(2) 找到一個 f 可以滿足的微分方程式。使用範例 8.3.35 中的方法來求 f 在 0 附近的冪級數展開。

習題 8.30 ： 令 (K,d) 為緊緻賦距空間以及 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 為子集合。證明如果 $\mathcal{F}$ 是等度連續的，那麼 $\overline{\mathcal{F}}$ 也是等度連續的。

習題 8.31： 令 (K,d) 為緊緻賦距空間並在 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 上賦予範數 $\|\cdot\|_\infty$。考慮子集合 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$。

(1) 假設 $\mathcal{F}$ 是預緊緻的。

  (a) 證明對於每個 $\varepsilon>0$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $B(f,\varepsilon)\cap\mathcal{F}$ 是無限的。

  (b) 推得如果 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個在 $\mathcal{F}$ 中的序列，那麼我們可以從 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 中萃取出一個柯西子序列。

(2) 假設從任意 $\mathcal{F}$ 中的序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$，我們可以萃取出一個柯西子序列。

  (a) 檢查 $\overline{\mathcal{F}}$ 是完備的。

  (b) 令 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 為在 $\overline{\mathcal{F}}$ 中的序列。對於每個 $n\geqslant 1$，檢查我們可以取 $f_n\in\mathcal{F}$ 滿足 $\|f_n-g_n\|_\infty\leqslant 2^{-n}$。證明 $(g_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $\overline{\mathcal{F}}$ 中有個收斂的子序列。

  (c) 推得 $\mathcal{F}$ 是預緊緻的。

習題 8.32： 定義在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的函數如下：

$$\forall x>0,\quad g(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 解釋為什麼 g 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上是定義梁好的。

(2) 證明 $g(x)\sim\frac{1}{x}$ 當 $x\to+\infty$。提示：如下[5]。

習題 8.33： 使用控制收斂定理（定理 8.5.5）來證明下列收斂：

$$\int_0^{\sqrt{n}}\Big(1-\frac{t^2}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

再來，使用 Wallis 積分（習題 A1.2）來推得下面積分的值：

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

提示：如下[6]。

[5]對定義 $xg(x)$ 的積分使用控制收斂定理。

[6]考慮片段連續函數序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 定義做 $f_n:t\mapsto(1-\frac{t^2}{n})^n\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$。

習題 8.34 ： 我們定義

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 證明 $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$。

(2) 使用變數變換 $t = u^{1/n}$ 以及控制收斂定理來證明

$$nI_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(3) 推得

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

習題 8.35 ： 令

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 證明 g 在 $(0,+\infty)$ 上是定義良好的。

(2) 證明 g 是 $\mathcal{C}^1$ 類的。求 g' 和 g。

習題 8.36 ： 證明對於 $x>1$，我們有

$$\Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

習題 8.37 ： 令

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{以及} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

(1) 證明 g 在 $\mathbb{R}_+$ 上是定義良好的。

(2) 證明 g 是 $\mathcal{C}^1$ 類的，而且是下面這個微分方程式的解：

$$y' - 2xy = -2I.$$

(3) 推得 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。