第一章 測度論中的重要概念

現代機率論是建構在測度論之上，因此要學習這門課程，勢必需要對測度論有足夠的熟練程度。也因此，我們先從測度論的複習開始：我們會回顧測度論中重要的定義以及定理，並且給出部份證明；我們回顧的證明通常是經典證明，也就是在機率論中，相同的概念會一再出現的，其餘比較需要測度論的技巧，我們則省略，有興趣的讀者可以參考 Rudin 的《實分析與複分析》(Real and Complex Analysis) 一書。

第一節 可測空間與測度

在測度論中，給定一個集合，我們希望可以定義一個測度去「測量」他的子集合（也有可能是所有的子集合）。此外，我們希望這樣定義出來的測度，能夠具有某些特定的性質及規律，例如加法性 (additivity)，或甚至 σ 加法性 (σ-additivity)。也因此，開始討論測度之前，我們要先定義可測空間及σ 代數的概念，換句話說，也就是討論哪些子集合構成的集合，可以讓我們在上面給出一個合適的測度定義。

第一小節 可測集合及 σ 代數

讓我們從 σ 代數的概念開始。

定義 1.1.1 ： 令 E 為一集合，若 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ 滿足

(a) $E \in \mathcal{A}$；

(b) 若 $A \in \mathcal{A}$，則 $A^c \in \mathcal{A}$；

(c) 若對於所有 $n \in \mathbb{N}$，$A_n \in \mathcal{A}$，則 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$，

則我們稱之為 σ 代數 (σ algebra) 。我們把 $\mathcal{A}$ 中的元素稱為可測集合 (measurable sets) ；或是當我們想要強調 σ 代數的時候，可以把他稱做 $\mathcal{A}$ 可測集合。此外，我們也稱 $(E, \mathcal{A})$ 為可測空間 (measurable space) 。

註解 1.1.2 ： 在上述定義中，σ 意指在條件 (c) 中，聯集是任意可數聯集；若我們將此條件中的「可數」改為「有限」，則我們得到代數 (algebra) 的定義。這裡的代數指的是集合代數。

在下面第 1.1.2 小節中，我們會給出測度的定義，是和可測空間上的 σ 代數息息相關的；稍後在機率論的部份，我們也會看到 σ 代數的重要性及其應用，例如在第五章中，我們要定義的條件機率及條件期望值。

範例 1.1.3 ： 給定任一集合 E，我們有兩個最極端的 σ 代數：最精緻的 (finest) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ 以及最粗糙 (coarsest) $\mathcal{A} = \{\varnothing, E\}$，後者也稱作平凡 (trivial) 的 σ 代數。

為了能夠構造更多 σ 代數，我們介紹生成 σ 代數 (generated σ-algebra) 的概念。

定義 1.1.4 ： 設 $\mathcal{C}$ 為 $\mathcal{P}(E)$ 的子集合，那麼存在一個最小的 σ 代數，使得他包含 $\mathcal{C}$ ，記作 $\sigma(\mathcal{C})$：

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\text{ 為 }\sigma\text{ 代數} \\ \text{使得 }\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

此定義中的交集是定義良好的，因為 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ 是個包含 $\mathcal{C}$ 的 σ 代數。

定義 1.1.5 ： 令 E 為集合，且 $\mathcal{O}$ 為 E 的子集合所構成的集合，滿足：

(a) $E \in \mathcal{O}$ 以及 $\varnothing \in \mathcal{O}$。

(b) 對於任意有限多個開集 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$，我們有 $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{O}$。

(c) 對於任意開集組 $(U_i)_{i\in I}$，其中 $U_i \in \mathcal{O}$，我們有 $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$。

Then, we call $(E, \mathcal{O})$ a **拓撲空間** (topological space) and the elements in $\mathcal{O}$ 開集 (open sets).

定義 1.1.6 ： 假設 $(E, \mathcal{O})$ 為拓撲空間 (topological space)。

(1) 我們把由拓撲空間開集 $\mathcal{O}$ 生成的 σ 代數記作 $\sigma(\mathcal{O})$。

(2) 這也被稱作伯雷爾 σ 代數 (Borel σ-algebra) ，當我們有標準的方法選擇 $\mathcal{O}$ 時，也可以把他記作 $\mathcal{B}(E)$。

(3) 我們把 $\mathcal{B}(E)$ 之中的元素稱作伯雷爾集合 (Borel sets) 。

換句話說，伯雷爾 σ 代數是包含所有 E 的開集中，最小的 σ 代數；

接下來，每當我們提到拓撲空間時，我們要考慮的 σ 代數都會是其伯雷爾 σ 代數；例如當我們想要在實空間 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^d$ 之上賦予 σ 代數、把他們變成可測空間時，我們考慮由任何 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^d$ 上等價範數所定義的開集，再取相對應的伯雷爾 σ 代數。在機率論中，大部分的時候，我們會討論的都是這樣的情況。

問題 1.1.7：證明下列三種不同類型區間構成的集合所生成的 σ 代數皆為 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$：

(1) $\mathcal{I} = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$,

(2) $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,

(3) $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$.

下一個要介紹的重要概念是積 σ 代數。

定義 1.1.8 ：給定兩個可測空間 $(E_1, \mathcal{A}_1)$ 及 $(E_2, \mathcal{A}_2)$，我們可以在 $E_1 \times E_2$ 之上定義積 σ 代數 (product σ-algebra) ：

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2).$$

問題 1.1.9：證明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$。

第二小節 測度

給定一可測空間 $(E, \mathcal{A})$，我們要給出在此空間上測度的定義。

定義 1.1.10 ：令 $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$，若 μ 滿足下列公理 (axioms)，我們稱之為正測度 (positive measure) 或測度 (measure) ：

- $\mu(\varnothing) = 0$；
- 【σ 加法性】對於任何 $\mathcal{A}$ 之上的互斥序列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$，我們有

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n). \tag{1.1}$$

此外，我們稱 $(E, \mathcal{A}, \mu)$ 為測度空間 (measure space) 。

命題 1.1.11 ：對任意測度空間 $(E, \mathcal{A}, \mu)$，下列性質成立：

(1) 若 $A, B \in \mathcal{A}$，$A \subseteq B$，$\mu(A) \leqslant \mu(B)$ 且 $\mu(A) < \infty$，則有

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(2) 若 $A, B \in \mathcal{A}$，則

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

(3) 【下連續性】令 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞增序列（也就是說對於所有 n，我們有 $A_n \subseteq A_{n+1}$），則

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n).$$

(4) 【上連續性】令 $(B_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞減序列（也就是說對於所有 n，我們有 $B_{n+1} \subseteq B_n$）。若存在 n_0 使得 $\mu(B_{n_0}) < \infty$，則

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mu(B_n).$$

(5) 若 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的序列，則

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n).$$

證明：參照習題 1.5 。 □

定義 1.1.12 ： 給定一測度 μ。

- 我們稱 $\mu(E)$ 為 μ 的總質量 (total mass) 。
- 若 $\mu(E) = 1$，我們說 μ 是個 機率測度 (probability measure) .
- 若 $\mu(E) < \infty$，我們說 μ 是個有限測度 (finite measure) 。
- 若存在遞增可測的子集合 (E_n)，使得 $E = \cup E_n$ 且對於所有 n，我們有 $\mu(E_n) < \infty$，那麼我們說 μ 是個 σ 有限測度 (σ-finite measure) 。
- 令 $x \in E$ 並假設 $\{x\} \in \mathcal{A}$。若 $\mu(\{x\}) > 0$，我們說 x 是 μ 的原子 (atom) ，並說 μ 是個原子測度 (atomic measure) ；反之，則說 μ 是個無原子測度 (atomless measure) 。

範例 1.1.13 ：

(1) 如果 μ 是個在 $(E, \mathcal{A})$ 上的有限測度，那麼 $\frac{\mu}{\mu(E)}$ 在相同可測空間上是個機率測度。

(2) 在可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上，勒貝格測度 μ 是滿足下列條件的唯一測度：對於任意 $a < b$，我們有 $\mu([a, b]) = \mu((a, b)) = b - a$。勒貝格測度的唯一性是單調類引理的直接結果，細

節請見系理 1.1.19 以及註解 1.1.20 。他的存在性可以由定理 1.2.29 推得。

(3) 【狄拉克測度】給定可測空間 $(E,\mathcal{A})$。令 $x\in E$ 並假設 $\{x\}\in\mathcal{A}$。測度 $\mu=\delta_x$ 是在 x 的狄拉克測度 (Dirac measure) 。

下列命題告訴我們，σ 可加性的假設是重要的，因為他與有限測度的連續性等價。

命題 1.1.14 【上連續與下連續】：令 $(E,\mathcal{A})$ 為可測空間，並且定義 $\mu:\mathcal{A}\longrightarrow[0,\infty]$ 滿足：

- $\mu(\varnothing)=0$；
- 【有限加法性】對於任何取值在 $\mathcal{A}$ 中的有限互斥序列 $(A_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$，我們有

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n).$$

則下列性質等價。

(i) 【σ 可加性】μ 滿足式 (1.1) 中的 σ 可加性，也就是說 $(E,\mathcal{A},\mu)$ 是個測度空間。

(ii) 【下連續】對於任意取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞增序列 $(A_n)_{n\geqslant1}$，我們有

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu(A_n).$$

(iii) 【上連續】對於任意取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞減序列 $(A_n)_{n\geqslant1}$，若存在 n_0 使得 $\mu(A_{n_0})<\infty$，則我們有

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\downarrow\mu(A_n).$$

證明： 證明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。給定遞增序列 $(A_n)_{n\geqslant1}$，由下列方式來定義序列 $(B_n)_{n\geqslant1}$：設 $B_1:=A_1$，對於所有 $n\geqslant2$，設 $B_n:=A_n\backslash A_{n-1}$。這樣的構造下，所有的 B_n 為兩兩互斥的，且對於所有 $n\geqslant1$，我們有

$$\bigcup_{k=1}^{n}B_k=A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\qquad\text{以及}\qquad\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

因此根據 σ 可加性，我們有

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)&=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

證明 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。考慮互斥序列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 並由下列方式來定義序列 $(B_n)_{n\geqslant 1}$：

$$\forall n \geqslant 1, \qquad B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

我們注意到，$(B_n)_{n\geqslant 1}$ 是個遞增序列，因此根據 (ii) 的性質，我們有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

證明 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)。考慮遞減的序列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 n_0 使得 $\mu(A_{n_0}) < \infty$。對所有 $n \geqslant 1$，設 $B_n := A_n^c \cap A_{n_0}$，則序列 $(B_n)_{n\geqslant 1}$ 會是遞增的。利用 (ii) 的性質，我們有

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} (A_n \cap A_{n_0})\right) &= \mu\left(A_{n_0} \backslash \Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n\Big)\right) \\ &= \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n\right) \\ &= \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

最後，我們可以用類似的手法來證明 (iii) $\Longrightarrow$ (ii)。 □

第三小節 單調類

在前面，給定一個空間，我們定義了 σ 代數以及測度的概念。但 σ 代數並不是一個好操作的定義，因為一般來講，要寫出 σ 代數中的元素並不容易。除此之外，在測度的定義中，我們討論的是互斥可數序列的聯集，但 σ 代數的條件卻是任意可數序列，所以當我們要在一個可測空間之上建構測度，或是證明在某些條件下，測度的唯一性，會比較棘手。也因此，在這小節中，我們要引進單調類的概念，並且敘述單調類引理（定理 1.1.18），以及討論測度的唯一性（系理 1.1.19）。

定義 1.1.15：令 $\mathcal{M}$ 為 $\mathcal{P}(E)$ 的子集合，若 $\mathcal{M}$ 滿足下列條件：

(a) $E \in \mathcal{M}$。

(b) 若 $A, B \in \mathcal{M}$ 及 $A \subseteq B$，則 $B\backslash A \in \mathcal{M}$。

(c) 若 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 為在 $\mathcal{M}$ 之上的遞增集合序列，則 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$。

則稱之為單調類 (monotone class)。

註解 1.1.16 ： 任何一個 σ 代數也是個單調類。

如同 σ 代數的情況，我們也可以定義生成單調類 (generated monotone class) 的概念。

定義 1.1.17 ： 對於任意 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$，存在一個最小的單調類，使得他包含 $\mathcal{C}$ ，記作

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}\text{ 為單調類} \\ \text{使得 } \mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}}} \mathcal{M}.$$

下列引理告訴我們在怎樣的情況下，生成單調類和生成 σ 代數是相等的。

定理 1.1.18 【單調類引理】： 若 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ 在有限交集下是封閉的，那麼 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$。

這是測度論中重要定理之一，我們這裡不提供完整的證明，只給出需要證明的步驟。

證明： 從上面的註解，我們知道 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$，因此只需要證明另一個包含關係。我們需要證明下列兩點：

(1) 若 $\mathcal{M}$ 為單調類，且在有限交集下是封閉的，則 $\mathcal{M}$ 為 σ 代數。

(2) 分兩步驟證明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 在有限交集下是封閉的：

   (a) 給定 $A \in \mathcal{C}$，令 $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{M}(C) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$，證明 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$。

   (b) 給定 $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$，令 $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$，證明 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$。 □

單調類引理可以讓我們證明測度的唯一性。

系理 1.1.19 ： 令 μ 及 ν 為兩個在 $(E, \mathcal{A})$ 上的測度。假設存在一個子集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，在有限交集下是封閉的，滿足 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ 且對於所有的 $A \in \mathcal{C}$，我們有 $\mu(A) = \nu(A)$。

(1) 【有限測度】若 $\mu(E) = \nu(E) < \infty$，我們有 $\mu = \nu$。

(2) 【 σ 有限測度】若存在 $\mathcal{C}$ 中遞增序列 (E_n)，使得 $E = \cup E_n$ 且對於所有 n，我們有 $\mu(E_n) = \nu(E_n)$，那麼 $\mu = \nu$。

證明：

(1) 令 $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$。根據假設，我們有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$，且根據測度的性質，我們可以證明 $\mathcal{G}$ 是個單調類。此外，由於 $\mathcal{C}$ 在有限交集下是封閉的，根據單調類引理，我們有 $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$。由此得證 $\mathcal{G} = \mathcal{A}$，也就是 $\mu = \nu$。

(2) 對於所有 n，我們可以定義 μ 及 ν 設限在 E_n 上的測度：

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n).$$

根據第一部份，我們有 $\mu_n = \nu_n$，接著使用測度的性質三，我們有

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = \lim \uparrow \mu_n(A \cap E_n), \quad \nu(A) = \lim \uparrow \nu_n(A \cap E_n).$$

由此得證。 $\square$

註解 1.1.20 ： 上述系理告訴我們若存在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上存在兩個測度 λ 及 λ'，使得對於所有開區間 (a,b)，我們有 $\lambda((a,b)) = \lambda'((a,b)) = b-a$，則他們必定為同一個測度 $\lambda = \lambda'$。

問題 1.1.21： 請解釋為什麼在系理 1.1.19 中，有限測度或是 σ 有限測度的假設是重要的。換句話說，是否能夠找到無限測度 μ 及 ν，使得對於所有 $A \in \mathcal{C}$，我們有 $\mu(A) = \nu(A)$，但卻會有 $\mu \neq \nu$？