第六章 離散時間鞅

第一節 定義及例子

我們固定機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，我們稱在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為<u>隨機過程</u> (random process)。我們可以注意到，$(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的下標集合為非負整數，也就是 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geqslant 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$，我們可以把此集合理解為我們的隨機過程是由離散時間所標記的。在這裡，我們假設所有的隨機過程值域皆為 $\mathbb{R}$。

定義 6.1.1： 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中，非遞減的子 σ 代數序列 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 稱作<u>濾鏈</u> (filtration)，也就是

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}.$$

我們稱 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ 為<u>濾鏈機率空間</u> (filtered probability space)。

在上述定義中，我們可以把 n 理解為時間，這樣的話，可以把 $\mathcal{F}_n$ 視作在時間 n 所擁有的資訊。

範例 6.1.2： 下面我們給出兩個濾鏈的例子。

(1) 若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個定義在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的隨機過程，我們定義

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, \dots, X_n),$$

為使得隨機變數 $X_0, \dots, X_n$ 可測的最小 σ 代數，則我們稱 $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ 為隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的<u>正則濾鏈</u> (canonical filtration)。

(2) 假設 $\Omega = [0, 1)$ 且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ 為布雷爾 σ 代數，$\mathbb{P}$ 為勒貝格測度。設

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathcal{F}_n := \sigma([\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n}) : 1 \leqslant i \leqslant 2^n).$$

則我們稱 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 為 $[0, 1)$ 上的<u>二元濾鏈</u> (dyadic filtration)。換個方法看，我們可以把二元濾鏈看作是在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的正則濾鍊，其中 $X_n(\omega)$ 的值為 ω 的（有限）二元展開中的第 n 個小數點值。

定義 6.1.3： 給定隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，若對於所有 $n \geqslant 0$，隨機變數 X_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可測的，則我們說 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個<u>適應</u> (adapted) 濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的隨機過程。

註解 6.1.4 ： 正則濾鏈可以看作是使隨機過程適應的最小（在包含的意義下）濾鏈。

再來，我們固定濾鏈機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$，並在上面定義下列概念。

定義 6.1.5 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為適應隨機過程，並假設對於所有 $n \geqslant 0$，我們有 $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$。

(1) 若對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n,$$

則我們稱隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為鞅 (martingale) 。

(2) 若對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \leqslant X_n,$$

則我們稱隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為上鞅 (supermartingale) 。

(3) 若對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geqslant X_n,$$

則我們稱隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為下鞅 (submartingale) 。

註解 6.1.6 ： 根據上述鞅的定義，我們可以輕易驗證下列性質：對於所有 $0 \leqslant n \leqslant m$，

$$\mathbb{E}[X_m \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n. \tag{6.1}$$

這同時也告訴我們，$\mathbb{E}[X_m] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$。在上鞅或下鞅的情況下，我們可以得到類似的性質且等式會變成相對應的不等式。

通常，我們可以將鞅的概念用公平遊戲來詮釋：X_n 代表玩家在時間 n 的總資產，$\mathcal{F}_n$ 是他在時間 n 所擁有的資訊（包含在此時間點以前的遊戲過程），鞅的性質 $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n$ 可以詮釋為此玩家在時間 $n+1$ 總資產的期望值，若我們只有時間 n 以前的資訊的話，會是他在時間 n 的總資產，也就是說，平均來講，他不會賺也不會賠。

用這樣的詮釋方式，上鞅代表的是有利莊家的遊戲。我們還可以注意到，若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個上鞅，則 $(-X_n)_{n\geqslant 0}$ 會是個下鞅，因此在後續我們討論的上下鞅時，通常只會給出上鞅或下鞅的結果，因為反之亦然。

範例 6.1.7 ： 這裡我們給出幾個鞅、上鞅、下鞅的例子，以及定義一些新的概念。我們固定機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 及濾鍊 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$。

(1) 若 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，設

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_n = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n]. \tag{6.2}$$

則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個鞅：

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_{n+1}] \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n.$$

我們稱滿足式 (6.2) 的鞅為封閉鞅 (closed martingale)。

(2) 若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應且由可積隨機變數構成的非遞增序列，則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個上鞅：

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[X_n \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n.$$

(3) 我們討論 $\mathbb{R}$ 上的隨機漫步。令 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ 為 i.i.d. 隨機變數序列，且假設其分佈為 μ 以及 $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$。設

$$X_0 = x \quad \text{且} \quad \forall n \geqslant 1, \quad X_n = x + Y_1 + \cdots + Y_n.$$

我們將濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 定義作

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\} \quad \text{且} \quad \forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n),$$

也就是 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的正則濾鏈。

(a) 若 $\mathbb{E}[Y_1] = 0$，則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個鞅。

(b) 若 $\mathbb{E}[Y_1] \leqslant 0$，則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個上鞅。

(c) 若 $\mathbb{E}[Y_1] \geqslant 0$，則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個下鞅。

我們稱 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為在 $\mathbb{R}$ 上由 x 出發，跳躍分佈為 μ 的隨機漫步。

(4) 我們回到範例 6.1.2 中 (2) 的例子，並且別忘記我們有興趣的濾鍊是二元濾鍊 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$。令 μ 是個在 $[0,1)$ 上的有限測度，$\mathbb{P} = \lambda$ 是在 $[0,1)$ 上的勒貝格測度。對於所有 $n \geqslant 0$，令

$$f_n = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{|\mathcal{F}_n},$$

其中 Radon–Nikodym 微分定義方式是將 μ 及 λ 視為在 σ 代數 $\mathcal{F}_n$ 上的測度。此 Radon–Nikodym 微分定義良好，因為在 $\mathcal{F}_n$ 之上，所有有限測度對於 $\lambda_{|\mathcal{F}_n}$ 皆是絕對連續的。因此我們可以得到

$$f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\mu([(i-1)2^{-n}, i2^{-n}))}{2^{-n}} \mathbb{1}_{[(i-1)2^{-n}, i2^{-n})}(\omega).$$

則 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是個鞅：因為對於所有 $A \in \mathcal{F}_n$，我們有

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A f_{n+1}] = \int \mathbb{1}_A(\omega) f_{n+1}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \mu(A) = \int \mathbb{1}_A(\omega) f_n(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A f_n],$$

也就是說 $f_n = \mathbb{E}[f_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]$。

若在 $\mathcal{F}$ 上 $\mu \ll \nu$，我們記 f 為 μ 對 ν 的 Radon–Nikodym 微分，則我們得到封閉鞅：

$$\forall n \geqslant 1, \quad f_n = \mathbb{E}[f \,|\, \mathcal{F}_n].$$

命題 6.1.8 ： 令 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 為非負凸函數，令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為適應過程且假設對於所有 $n \geqslant 0$，我們有 $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] < \infty$。

(1) 若 (X_n) 是個鞅，則 $(\varphi(X_n))$ 是個下鞅。

(2) 若 (X_n) 是個下鞅，且 φ 非遞減，則 $(\varphi(X_n))$ 也是個下鞅。

註解 6.1.9 ： 從此命題，我們得知若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為鞅，$(|X_n|)_{n\geqslant 0}$ 會是個下鞅；若對於所有 n，X_n 皆為平方可積，則 $(X_n^2)_{n\geqslant 0}$ 也是個下鞅。若 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個下鞅，則 $(X_n^+)_{n\geqslant 0}$ 也是。

證明：

(1) 我們用條件期望值中的琴生不等式（命題 5.2.8 中的 (6)），而得到

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] \geqslant \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]) = \varphi(X_n).$$

(2) 同理，由於 $X_n \leqslant \mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]$ 且 φ 非遞減，

$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] \geqslant \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]) \geqslant \varphi(X_n).$$

□

定義 6.1.10 ： 給定實隨機變數序列 $(H_n)_{n\geqslant 1}$。若對於所有 $n \geqslant 1$，H_n 有界且對於 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測，則我們說 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 為可預測 (predictable) 的序列。

命題 6.1.11 ： 給定適應過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 以及可預測序列 $(H_n)_{n\geqslant 1}$。令 $(H \cdot X)_0 = 0$ 以及

$$\forall n \geqslant 1, \quad (H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + \cdots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

則我們有下列兩個性質

(1) 若 (X_n) 是個鞅，則 $((H \cdot X)_n)$ 也是個鞅。

(2) 若 (X_n) 是個上鞅（或下鞅），且對於所有 $n \geqslant 1$，$H_n \geqslant 0$，則 $((H \cdot X)_n)$ 也是個上鞅（或下鞅）。

證明：

(1) 由於所有的隨機變數 H_n 皆為有界，我們可以檢查所有的隨機變數 $(H \cdot X)_n$ 仍然是可積的，而且根據構造，隨機過程 $((H \cdot X)_n)$ 是個適應過程。因此我們只需要檢查，對於所有的 $n \geqslant 0$，我們有

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n \,|\, \mathcal{F}_n] = 0.$$

由於 $(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n = H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$ 且 H_{n+1} 為 $\mathcal{F}_n$ 可測，我們有

$$\mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \,|\, \mathcal{F}_n] = H_{n+1}\,\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n] = 0.$$

因此得證。

(2) 證明與 (1) 相似。 □

在 (1) 的情況下，若我們將 X_n 當作玩家在時間 n 的總資產，則 $X_{n+1} - X_n$ 為其在時間 n 及 $n+1$ 之間總資產的變化。我們可以把 H_{n+1} 想做玩家在時間 n 改變遊戲策略，而將下注的金額乘上 H_{n+1}，注意，此策略必須要是 $\mathcal{F}_n$ 可測的。這樣的情況下，公平遊戲仍然維持他的公平性，只是玩家總資產在時間 n 及 $n+1$ 的改變量為 $H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$。

第二節 停止時間

定義 6.2.1 ： 給定隨機變數 $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 以及濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$。若下列條件成立，

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \tag{6.3}$$

則我們說 T 是個（對於濾鏈 $(\mathcal{F}_n)$ 的）<u>停止時間</u> (stopping time) 。

註解 6.2.2 ： 注意，T 是可以取 $+\infty$ 這個值的，而且我們可以寫作

$$\{T = +\infty\} = \Omega \backslash \bigcup_{n \geqslant 0} \{T = n\}.$$

因此，若我們定義

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n := \sigma\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n\Big),$$

則 $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$。

註解 6.2.3 ： 我們可以輕易檢查，式 (6.3) 定義與下列等價：

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \quad \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n. \tag{6.4}$$

因此，根據情況，有時候我們會使用式 (6.3) 中的定義，有時候會用式 (6.4) 中的定義。

若我們回到遊戲玩家的詮釋，停止時間可以視為玩家決定撤出遊戲的時間，因此，若我們決定要在時間 n 停止，我們只能夠依靠在時間 n 之前所累積的資訊，也就是 $\mathcal{F}_n$。若我們拿股市來做例子，我們無法決定說要在股票最高點時賣出，因為我們不知道股票未來的走向。

範例 6.2.4 ： 以下是停止時間的例子。

(1) 給定 $k \in \mathbb{N}_0$，則常數時間 $T = k$ 是個停止時間。

(2) 若 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應過程，對於任意布雷爾集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，

$$T_A := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : Y_n \in A\}$$

是個停止時間，我們稱之為<u>進入 A 的時間</u>。我們可以做下列驗證：

$$\{T_A = n\} = \{Y_0 \notin A, \dots, Y_{n-1} \notin A, Y_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

注意到，這裡我們必須要用下列慣例：$\inf \varnothing = +\infty$。

(3) 固定 $N > 0$ 且令

$$L_A := \sup\{n \leqslant N : Y_n \in A\} \quad (\sup \varnothing = 0),$$

則 L_A 未必會是個停止時間，因為對於 $1 \leqslant n \leqslant N-1$，我們有

$$\{L_A = n\} = \{Y_n \in A, Y_{n+1} \notin A, \dots, Y_N \notin A\},$$

也就是說不一定會是 $\mathcal{F}_n$ 可測。

命題 6.2.5 ： 停止時間之間有下列性質。

(1) 若 S 及 T 兩者皆為停止時間，則 $S \vee T$ 及 $S \wedge T$ 也是停止時間。

(2) 若 $(T_k)_{k\geqslant 1}$ 是個停止時間序列，則

$$\inf_{k\geqslant 1} T_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} T_k,$$
$$\sup_{k\geqslant 1} T_k, \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k$$

皆為停止時間。

證明：

(1) 給定 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\{S \wedge T \leqslant n\} = \{S \leqslant n\} \cup \{T \leqslant n\},$$
$$\{S \vee T \leqslant n\} = \{S \leqslant n\} \cap \{T \leqslant n\}.$$

(2) 給定 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\Big\{\inf_{k\geqslant 1} T_k \leqslant n\Big\} = \bigcup_{k\geqslant 1}\{T_k \leqslant n\},$$
$$\Big\{\liminf_{k\geqslant 1} T_k \leqslant n\Big\} = \bigcap_{m\geqslant 1}\Big(\bigcup_{k\geqslant m}\{T_k \leqslant n\}\Big).$$

□

定義 6.2.6 ：若 T 為停止時間，則我們可以定義停止 σ 代數 (stopped σ-algebra) ，又稱為 T 的過往 σ 代數 (σ-algebra of T-past) 為

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}_0, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

問題 6.2.7：檢查 $\mathcal{F}_T$ 為 σ 代數且當 $T = n$ 為常數停止時間時，$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$。

命題 6.2.8 ：若 S 以及 T 兩者皆為停止時間，且 $S \leqslant T$，則我們有 $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$。

證明：令 $A \in \mathcal{F}_S$，則對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$A \cap \{T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n}(A \cap \{S = k\}) \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

□

命題 6.2.9 ：令 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 為適應過程以及 T 為停止時間，則下面定義的隨機變數對 $\mathcal{F}_T$ 會是可測的：

$$\mathbb{1}_{T<\infty} Y_T(\omega) = \begin{cases} Y_n(\omega) & \text{若 } T(\omega) = n \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{若 } T(\omega) = +\infty. \end{cases} \tag{6.5}$$

證明：令 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，假設 $0 \notin B$，則對於所有 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\{\mathbb{1}_{T<\infty} Y_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{Y_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

也就是說，$\{\mathbb{1}_{T<\infty}Y_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$。若 $0 \in B$，則對於所有 $n \in \mathbb{N}_0$，我們有

$$\{\mathbb{1}_{T<\infty}Y_T \in B\} \cap \{T=n\} = \{\mathbb{1}_{T<\infty}Y_T \in B^c\}^c \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n.$$

同理得證。 □

當停止時間 T 殆必有限時，我們可以直接將式 (6.5) 寫作 Y_T。此外，對於任意停止時間 T 以及任意非負整數 n，$T \wedge n$ 也是個停止時間（命題 6.2.5），因此根據命題 6.2.9，$Y_{T\wedge n}$ 對於 $\mathcal{F}_{T\wedge n}$ 是可測的，也就是對於 $\mathcal{F}_n$ 可測。

定理 6.2.10 【停止定理】： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為鞅（或上鞅），令 T 為停止時間，則 $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$ 也是個鞅（或上鞅）。若停止時間 T 有界，我們有 $X_T \in L^1$，而且

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] \quad (\text{或 } \mathbb{E}[X_T] \leqslant \mathbb{E}[X_0]).$$

證明： 我們使用命題 6.1.11 中的方法，由 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 出發，構造隨機過程 $(X_{T\wedge n})_{n\geqslant 0}$，進而使用命題來總結。我們注意到對於所有 $n \geqslant 0$，我們有

$$X_{T\wedge(n+1)} - X_{T\wedge n} = \mathbb{1}_{T\geqslant n+1}(X_{n+1} - X_n).$$

因此，我們定義

$$\forall n \geqslant 1, \quad H_n = \mathbb{1}_{T\geqslant n} = 1 - \mathbb{1}_{T\leqslant n-1},$$

則 $(H_n)_{n\geqslant 1}$ 為可預測序列且

$$\forall n \geqslant 1, \quad X_{T\wedge n} = X_0 + (H\cdot X)_n.$$

這讓我們可以對定理的第一部份總結。

接著，若 T 有界，令其上界為 N，則 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_{T\wedge N}] = \mathbb{E}[X_0]$（或 $\leqslant \mathbb{E}[X_0]$）。 □

問題 6.2.11： 考慮 $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ 為 i.i.d. 隨機變數序列，使得 $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$。定義 $X_0 = 0$ 以及對於所有 $n \geqslant 1$，$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$，也就是說 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個從 0 出發，在 $\mathbb{Z}$ 上且分佈對稱的隨機漫步。設

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 1\}.$$

(1) 證明 $T < \infty$ a.s.。

(2) 證明 $\mathbb{E}[X_T] = 1$ 且 $\mathbb{E}[X_0] = 0$。

(3) 解釋。

第三節 鞅的殆必收斂

在這個章節中，我們要討論鞅（或下鞅）殆必收斂的性質。

首先考慮實數數列 $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$。對於所有實數 $a < b$，我們考慮兩個在 $\overline{\mathbb{N}}$ 中取值的時間序列 (time series) $(S_k(\alpha))$ 及 $(T_k(\alpha))$：

$$S_1(\alpha) = \inf\{n \geqslant 0 : \alpha_n \leqslant a\},$$
$$T_1(\alpha) = \inf\{n \geqslant S_1(\alpha) : \alpha_n \geqslant b\},$$

接著透過遞迴，對於所有 $k \geqslant 1$，定義

$$S_{k+1}(\alpha) = \inf\{n \geqslant T_k(\alpha) : \alpha_n \leqslant a\},$$
$$T_{k+1}(\alpha) = \inf\{n \geqslant S_{k+1}(\alpha) : \alpha_n \geqslant b\}.$$

在上述的定義中，我們固定慣例取 $\inf \varnothing = +\infty$。接著，對於所有整數 $n \geqslant 1$，我們定義

$$N_n([a,b],\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_k(\alpha)\leqslant n},$$
$$N_\infty([a,b],\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_k(\alpha)<\infty},$$

也就是說，$N_n([a,b],\alpha)$ 計算序列 $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ 在 $[a,b]$ 區間中上升的次數。

在基礎分析中，我們有下列引理。

引理 6.3.1：若且唯若實序列 $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ 在 $\mathbb{R}$ 中收斂，則對於所有實數 $a < b$，我們有 $N_\infty([a,b],\alpha) < \infty$。

問題 6.3.2：給定一個適應過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，則對於所有 $k \geqslant 1$，$S_k(X)$ 及 $T_k(X)$ 為值域為 $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ 的隨機變數。驗證下列兩點：

(1) 對於所有 $k \geqslant 1$，$S_k(X)$ 及 $T_k(X)$ 為停止時間。

(2) $N_n([a,b],X)$ 是 $\mathcal{F}_n$ 可測的。

引理 6.3.3【Doob 上升不等式】：令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為下鞅，則對於所有實數 $a < b$ 以及整數 $n \geqslant 1$，我們有

$$(b-a)\,\mathbb{E}[N_n([a,b],X)] \leqslant \mathbb{E}[(X_n-a)^+ - (X_0-a)^+].$$

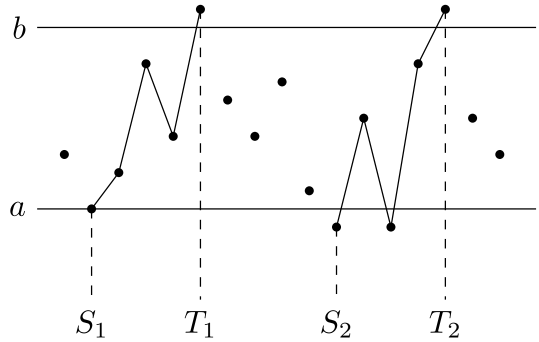

圖 6.1: 下鞅 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 的示意圖，以及所對應的停止時間 $(S_k)_{k\geqslant 1}$ 和 $(T_k)_{k\geqslant 1}$。實線所對應到的是隨機過程 $(H\cdot X)_{n\geqslant 0}$ 中考慮的增量。如果我們要計算 $(H\cdot Y)_{n\geqslant 0}$，我們會把在 a 以下的點上移至 a，並且考慮相對應的增量。

證明：給定 $a<b$。對於所有 $n\geqslant 0$，令 $Y_n=(X_n-a)^+$，根據命題 6.1.8 ，$(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 還是個下鞅。我們簡化記號，將 $S_k(X)$，$T_k(X)$ 以及 $N_n([a,b],X)$ 分別記作 S_k，T_k 以及 N_n。定義可預測隨機變數序列 $(H_n)_{n\geqslant 1}$：

$$H_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{S_k<n\leqslant T_k}\leqslant 1.$$

（請自行檢查可測事件 $\{S_k<n\leqslant T_k\}$ 的確是在 $\mathcal{F}_{n-1}$ 之中。）我們有，

$$(H\cdot Y)_n=\sum_{k=1}^{N_n}(Y_{T_k}-Y_{S_k})+\mathbb{1}_{S_{N_n+1}<n}(Y_n-Y_{S_{N_n+1}})\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}(Y_{T_k}-Y_{S_k})\geqslant N_n(b-a).$$

上式中的第一個不等式成立，因為在事件 $\{S_{N_n+1}<\infty\}$ 之上，$Y_{S_{N_n+1}}=0$ 且 $Y_n\geqslant 0$。因此，我們得到

$$\mathbb{E}[(H\cdot Y)_n]\geqslant(b-a)\,\mathbb{E}[N_n].$$

此外，對於所有 $n\geqslant 1$，令 $K_n=1-H_n$，則非負序列 $(K_n)_{n\geqslant 1}$ 也會是個可測序列。從命題 6.1.11 得知，$(K\cdot Y)$ 仍然會是個下鞅，也就是說 $\mathbb{E}[(K\cdot Y)_n]\geqslant\mathbb{E}[(K\cdot Y)_0]=0$。另外，我們還有

$$(H\cdot Y)_n+(K\cdot Y)_n=Y_n-Y_0,\quad\forall n\geqslant 0.$$

因此，

$$(b-a)\,\mathbb{E}[N_n]\leqslant\mathbb{E}[(H\cdot Y)_n]\leqslant\mathbb{E}[(H\cdot Y)_n+(K\cdot Y)_n]=\mathbb{E}[Y_n-Y_0].$$ □

定理 6.3.4 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為下鞅且滿足下列其中一個等價性質：

(1) $(X_n^+)_{n\geqslant 0}$ 在 L^1 中有界，也就是

$$\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[(X_n)^+]<\infty. \tag{6.6}$$

(2) $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 在 L^1 中有界，也就是

$$\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[|X_n|]<\infty. \tag{6.7}$$

則 X_n 殆必收斂，且其極限 X_∞ 滿足 $\mathbb{E}[|X_\infty|]<\infty$ 以及 $|X_\infty|<\infty$ a.s.。

註解 6.3.5 ： 首先注意到，我們有 $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[(X_n)^+]-\mathbb{E}[(X_n)^-]$。由於下鞅 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 滿足 $\mathbb{E}[X_n]\geqslant\mathbb{E}[X_0]$，則對於所有 $k\geqslant 0$，我們有

$$\mathbb{E}[(X_k)^-]\leqslant\Big(\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[(X_n)^+]\Big)-\mathbb{E}[X_0].$$

因此，我們能夠推得式 (6.6) 蘊含式 (6.7)，其逆命題顯然成立。

證明： 給定 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$，根據引理 6.3.3 ，對於所有 $n\geqslant 1$，我們有

$$\begin{aligned}(b-a)\,\mathbb{E}[N_n([a,b],X)]&\leqslant\mathbb{E}[(X_n-a)^+]\leqslant|a|+\mathbb{E}[(X_n)^+]\\&\leqslant|a|+\sup_{k\geqslant 0}\mathbb{E}[(X_k)^+]<\infty.\end{aligned}$$

因此當 $n\to\infty$，我們有

$$(b-a)\,\mathbb{E}[N_\infty([a,b],X)]<\infty,$$

也就是說，$N_\infty([a,b],X)$ 殆必有限：$\mathbb{P}(N_\infty([a,b],X)<\infty)=1$。

若我們考慮 $\{(a,b)\in\mathbb{Q}^2:a<b\}$，由於此數對集合仍然可數，我們有

$$\mathbb{P}\Big(N_\infty([a,b],X)<\infty,\forall a,b\in\mathbb{Q}:a<b\Big)=1.$$

最後我們使用引理 6.3.1 ，得證 X_n 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中殆必收斂。

關於 a.s. 極限 X_∞ 的可積性質，我們利用 Fatou 引理而得到

$$\mathbb{E}[|X_\infty|]\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X_n|]\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[|X_n|]<\infty.$$

因此，我們也有 $|X_\infty|$ 殆必有限。 □

系理 6.3.6 ： 令 (X_n) 為非負上鞅，則 X_n 殆必收斂且其極限 X_∞ 可積而且滿足對於所有整數 $n \geqslant 0$，$X_n \geqslant \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]$。

證明： 這是定理 6.3.4 的應用：令 $Y_n = -X_n$，則式 (6.6) 中的假設對於 (Y_n) 顯然成立。最後我們使用條件期望值的 Fatou 引理（命題 5.2.8 中的 (4)）：

$$X_n \geqslant \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_m \,|\, \mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[\liminf_{m\to\infty} X_m \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]. \qquad \square$$