離散時間馬可夫鏈

第七章

第一節 定義及基本性質

在此章節中，我們要討論的是離散時間的馬可夫鏈。這是個滿足下列性質的隨機過程：固定時間點時，未來的演變只取決於此刻的狀態，而不是過去所有的狀態。

我們考慮有限或可數空間 E，以及相對應的 σ 代數 $\mathcal{P}(E)$。

定義 7.1.1 ：若 $Q : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ 滿足

(1) 對於所有 $x, y \in E$，$0 \leqslant Q(x, y) \leqslant 1$；

(2) 對於所有 $x \in E$，我們有 $\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1$。

則稱之為在 E 上的轉移矩陣 (transition matrix) 或隨機矩陣 (stochastic matrix) 。

註解 7.1.2 ：在 E 上轉移矩陣的概念與由 E 至 E 的轉移機率等價。給定轉移矩陣 Q，我們可以將 $\nu : E \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義做

$$\nu(x, A) = \sum_{y \in A} Q(x, y), \quad \forall x \in E, A \subseteq E,$$

則我們可以驗證 ν 的確是個由 E 至 E 的轉移機率；反之，給定轉移機率 ν，我們可以由 $Q(x, y) = \nu(x, \{y\})$ 得到在 E 上的轉移矩陣 Q。

定義 7.1.3 ：對於所有正整數 $n \geqslant 1$，我們定義 $Q_n = Q^n$；也就是說，$Q_1 = Q$ 且對於所有 $n \geqslant 1$，我們有下列遞迴關係：

$$Q_{n+1}(x, y) = \sum_{z \in E} Q_n(x, z) Q(z, y). \tag{7.1}$$

此等式稱作*Chapman-Kolmogorov* 等式 (Chapman-Kolmogorov equality) 。我們可以檢查 Q_n 仍然是在 E 上的轉移矩陣。此外，我們可以定義 $Q_0(x, y) = \mathbb{1}_{x=y}$，這是個對角的轉移矩陣，這可以讓我們把推廣到 $n = 0$ 的情況。

定義 7.1.4 ： 對於任意函數 $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，我們定義 $Qf : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 為

$$Qf(x) = \sum_{y \in E} Q(x,y)f(y), \quad \forall x \in E. \tag{7.2}$$

註解 7.1.5 ：

(1) (7.2)中的和永遠是定義良好的，因為他是可數多個非負項的和。

(2) 如果我們將 f 視為一個行向量，則 Qf 可以看作透過矩陣乘法所定義出來的值。

定義 7.1.6 ： 令 Q 為在 E 上的轉移矩陣，$(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為值域為 E 的隨機過程。若對於所有 $n \geqslant 0$，X_{n+1} 在已知 $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ 的條件分佈為 $Q(X_n, \cdot)$，則我們說 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈 (Markov chain) 。由於 E 是個離散空間，此條件與下列等價：對於所有 $x_0, x_1, \ldots, x_n, y \in E$，若 $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$，則我們也會有

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = Q(x_n, y).$$

註解 7.1.7 ：

(1) 一般來說，X_{n+1} 對於 $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ 的條件分佈會不會只取決於 X_n，而是會取決於所有的 $X_0, X_1, \ldots, X_n$。在馬可夫鏈的情況中，此條件分佈只取決於 X_n，這樣的性質稱作馬可夫性質 (Markov property) 。此概念應該被理解為：當我們知道完整的過去 $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ 時，並不會比只知道此刻時間的狀態 X_n 所給出的資訊還多。

(2) 上述所描述的條件分佈 $Q(x, \cdot)$ 並不取決於時間 n，這種情況下，我們討論的是個均勻 (homogeneous) 的馬可夫鏈；我們當然也可以考慮會隨著時間 n 改變的轉移矩陣 Q。

命題 7.1.8 ： 給定值域為 E 的隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$。若且唯若對於所有 $n \geqslant 0$ 及 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$，下列等式成立：

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)\ldots Q(x_{n-1}, x_n), \tag{7.3}$$

則 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈。此外，當 $\mathbb{P}(X_0 = x_0) > 0$ 時，我們有

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_0 = x_0) = Q_n(x_0, x_n). \tag{7.4}$$

證明： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈，我們有：

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_{n+1}=x_{n+1})\\&=\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)\times\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\,|\,X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)\\&=\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)\times Q(x_n,x_{n+1}).\end{aligned}$$

因此根據遞迴，我們可以得到式 (7.3)。反之，若式 (7.3) 成立，則我們可以驗證

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=y\,|\,X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)=\frac{\mathbb{P}(X_{n+1}=y,X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)}{\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)}=Q(x_n,y).$$

最後，式 (7.4) 中的邊緣分佈可由下列式子得到：

$$Q_n(x_0,x_n)=\sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}Q(x_0,x_1)\ldots Q(x_{n-1},x_n).$$

□

註解 7.1.9 ： 從式 (7.3) 可以得到，初始分佈也就是 X_0 的分佈以及轉移矩陣 Q 共同決定了整個馬可夫鏈 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的分佈。

下列命題把馬可夫鏈的各種性質集結起來。

命題 7.1.10 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈。

(1) 對於所有 $n\geqslant 0$ 以及非負可測函數 $f:E\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0}$，我們有

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})\,|\,X_0,X_1,\ldots,X_n]=\mathbb{E}[f(X_{n+1})\,|\,X_n]=Qf(X_n).$$

更一般來說，對於 $\{0,\ldots,n-1\}$ 的任意有限子集合 $\{i_1,\ldots,i_k\}$，我們有

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})\,|\,X_{i_1},\ldots,X_{i_k},X_n]=Qf(X_n).$$

(2) 對任意整數 $n\geqslant 0$ 及 $p\geqslant 1$ 以及 $y_1,\ldots y_p\in E$，我們有

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=y_1,\ldots,X_{n+p}=y_p\,|\,X_0,\ldots,X_n)=Q(X_n,y_1)Q(y_1,y_2)\ldots Q(y_{p-1},y_p),\tag{7.5}$$

因此

$$\mathbb{P}(X_{n+p}=y_p\,|\,X_n)=Q_p(X_n,y_p).\tag{7.6}$$

若對於所有 $p\geqslant 0$，設 $Y_p=X_{n+p}$，則 $(Y_p)_{p\geqslant 0}$ 仍是轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈。

證明：

(1) 根據定義，我們有

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_0, \ldots, X_n] = \sum_{y \in E} Q(X_n, y) f(y) = Qf(X_n).$$

此外，若 $\{i_1, \ldots, i_k\}$ 是個 $\{0, \ldots, n-1\}$ 的有限子集合，我們有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, X_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_1, \ldots, X_n] \,|\, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, X_n] \\ &= \mathbb{E}[Qf(X_n) \,|\, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, X_n] \\ &= Qf(X_n).\end{aligned}$$

(2) 式 (7.5) 是式 (7.3) 的直接應用，且如同式 (7.4) 的證明，式 (7.6) 可由對所有可能的 $y_1, \ldots, y_{p-1}$ 求和而得到。最後，根據式 (7.5)，我們可以得到

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n) = \mathbb{P}(X_n = y_0) Q(y_0, y_1) \ldots Q(y_{p-1}, y_p),$$

並利用命題 7.1.8 總結。 □

範例 7.1.11 ： 以下是馬可夫鏈的例子。

(1) 【獨立隨機變數】若 $(X_n)_{n \geqslant 0}$ 是個值域為 E 的 i.i.d. 隨機變數序列，將任意項的分佈記作 μ，則 $(X_n)_{n \geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為

$$Q(x, y) = \mu(y), \quad \forall x, y \in E$$

的馬可夫鏈。

(2) 【$\mathbb{Z}^d$ 上的隨機漫步】令 $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n$ 為取值在 $\mathbb{Z}^d$ 上的獨立隨機變數，並假設 $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ 為分佈為 μ 的 i.i.d. 序列。對於所有 $n \geqslant 0$，設

$$X_n = \eta + \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

則 $(X_n)_{n \geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為

$$Q(x, y) = \mu(y - x), \quad \forall x, y \in E$$

的馬可夫鏈。利用 ξ_{n+1} 與 $(X_0, \ldots, X_n)$ 的獨立性，我們有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = y - x_n \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = y - x_n) = \mu(y - x_n).\end{aligned}$$

令 $(e_1, \dots, e_d)$ 為 $\mathbb{R}^d$ 上的正則基底 (canonical basis)，當 μ 滿足

$$\mu(e_i) = \mu(-e_i) = \frac{1}{2d}, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

我們將馬可夫鏈 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 稱做在 $\mathbb{Z}^d$ 上的對稱簡單隨機漫步 (symmetric simple random walk)。

(3) 【圖上的簡單隨機漫步】令 E 為任意集合，$\mathcal{P}_2(E)$ 為由所有 E 中兩個不相等的元素構成的集合，F 為 $\mathcal{P}_2(E)$ 的子集合。對於所有 $x \in E$，我們設

$$F_x = \{y \in E : \{x, y\} \in F\}.$$

假設對於所有 $x \in E$，集合 F_x 非空且有限，我們定義 E 上的轉移矩陣 Q 為

$$\forall x, y \in E, \quad Q(x, y) = \begin{cases} |F_x|^{-1} & \text{若 } \{x, y\} \in F, \\ 0 & \text{其他情況.} \end{cases}$$

我們稱轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈為在圖 (E, F) 上的簡單隨機漫步 (simple random walk)。

(4) 【分支過程】我們回顧在範例 6.3.8 以及習題 6.24 中討論過的分支過程。

令 μ 為在非負整數上的機率分佈，假設 μ 可積，並將其期望值記作 $m < \infty$。我們不考慮 $\mu = \delta_0$ 或 δ_1 的特殊情況。考慮 i.i.d. 隨機變數序列 $(\xi_{n,j})_{n,j\geqslant 0}$ 且各項分佈皆由 μ 所給定。固定正整數 $\ell \geqslant 1$，並以遞迴方式來定義隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 0}$：

$$\begin{aligned} X_0 &= \ell, \\ X_{n+1} &= \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n,j}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{aligned}$$

我們可以將 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 視為描述一個（單性生殖）家族人口數量的隨機過程：μ 為家族成員中，每個成員後代數量的機率分佈，則第 n 代的人口數量為 X_n。在這樣的情況下，$(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個在 $E = \mathbb{N}_0$ 上的馬可夫鏈，其轉移矩陣寫作

$$Q(x, y) = \mu^{*x}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{N}_0, \tag{7.7}$$

其中 μ^{*x} 是 μ 與自己取 x 次的捲積 (convolution)，也可以理解做 x 個 i.i.d. 有著與 μ 相同分佈的隨機變數和。式 (7.7) 是下列計算的結果

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ &\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{x_n} \xi_{n,j} = y \,\Big|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\Big) \\ &\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{x_n} \xi_{n,j} = y\Big) = \mu^{*x_n}(y), \end{aligned}$$

其中在第二個等式中，我們使用 $(\xi_{n,j})_{j\geqslant 1}$ 與 $X_0,\ldots,X_n$ 獨立的性質。

第二節 正則馬可夫鏈

在定義 7.1.6 中，我們給出馬可夫鏈需要滿足的性質，在下列命題中，則告訴我們在給定轉移矩陣時，如何構造出相對應的馬可夫鏈。稍後在定理 7.2.3 中，我們會看到這樣的馬可夫鏈，其分佈是唯一的。因此在後續章節中，當我們有轉移矩陣時，我們可以以定冠詞 the 來描述（正則）馬可夫鏈。

命題 7.2.1 ： 令 Q 為在 E 上的轉移矩陣。我們可以找到機率空間 $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')$ 使得對於任意 $x\in E$，我們可以構造轉移機率為 Q，起始位置為 $X_0^x=x$ 的馬可夫鏈 $(X_n^x)_{n\geqslant 0}$。

證明： 取 $\Omega'=[0,1)$，$\mathcal{F}'=\mathcal{B}(\Omega')$ 以及 $\mathbb{P}'$ 為勒貝格測度。對於任意實數 $\omega\in[0,1)$，我們有二元展開式：

$$\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(\omega)2^{-n-1},\quad \varepsilon_n(\omega)\in\{0,1\}.$$

由此我們得到一個 i.i.d. 隨機變數序列 $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ 使得 $\mathbb{P}(\varepsilon_n=1)=\mathbb{P}(\varepsilon_n=0)=\frac{1}{2}$。若 $\varphi:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ 是個單射函數，則對於 $i,j\in\mathbb{N}_0$，定義 $\eta_{i,j}=\varepsilon_{\varphi(i,j)}$，則 $(\eta_{i,j})_{i,j\geqslant 0}$ 仍是個 i.i.d. 隨機變數序列。令

$$\forall i\geqslant 0,\quad U_i=\sum_{j\geqslant 0}\eta_{i,j}2^{-j-1},$$

則 $(U_i)_{i\geqslant 0}$ 是個 i.i.d. 隨機變數序列，且皆為在 $[0,1]$ 之上的均勻分佈。

由於 E 可數，我們將裡面的元素記作 $y_1,y_2,\ldots$。給定 $x\in E$，令 $X_0^x=x$，接著根據均勻隨機變數 U_0 的值來決定 X_1^x 的值：

$$X_1^x=y_k\quad \text{若}\quad \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1}Q(x,y_j)<U_0\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant k}Q(x,y_j).$$

我們可以輕易驗證，對於所有 $y\in E$，我們的確有 $\mathbb{P}(X_1^x=y)=Q(x,y)$。我們可以以遞迴的方式來定義整個馬可夫鏈 $(X_n^x)_{n\geqslant 0}$：對於所有 $n\geqslant 0$，定義

$$X_{n+1}^x=y_k\quad \text{若}\quad \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1}Q(X_n^x,y_j)<U_n\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant k}Q(X_n^x,y_j).$$

接著利用 (U_i) 的獨立性，我們得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^x_{n+1} = y_k \,|\, X^x_0 = x_0, \dots, X^x_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} Q(x_n, y_j) < U_n \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant k} Q(x_n, y_j) \,\middle|\, X^x_0 = x_0, \dots, X^x_n = x_n \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} Q(x_n, y_j) < U_n \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant k} Q(x_n, y_j) \right) \\
&= Q(x_n, y_k).
\end{aligned}$$

因此 $(X^x_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣由 Q 給定的馬可夫鏈。 □

在接續的章節中，我們要選定慣例的機率空間，並在上面定義馬可夫鏈：若狀態空間為 E，樣本空間寫作 $\Omega = E^{\mathbb{N}_0}$。在樣本空間中的元素 $\omega \in \Omega$ 可以寫作 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$，這是個在 E 中的序列。對於所有 $n \geqslant 0$，我們可以定義座標函數 (coordinate function) X_n 如下：

$$\begin{array}{cccc} X_n: & \Omega = E^{\mathbb{N}_0} & \to & E \\ & \omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) & \mapsto & \omega_n \end{array}.$$

在 Ω 上，我們考慮 $\mathcal{F}$ 為使所有座標函數 X_n 皆可測的最小的 σ 代數，也就是說

$$\mathcal{F} := \sigma(X_n^{-1}(x) : \forall n \geqslant 0, \forall x \in E).$$

這個 σ 代數也可以被以下「圓柱事件 (cylindrical events)」所生成：

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x_0, \dots, x_n \in E, \quad C = \{\omega \in \Omega : \omega_0 = x_0, \dots, \omega_n = x_n\}.$$

在此章節接續的部份，我們要在 Ω 上定義機率測度，進而得到馬可夫鏈的唯一性。

上述命題 7.2.1 給出了在給定轉移矩陣以及起始位置的情況下，馬可夫鏈的存在性，但一般來說，我們不會有唯一性，因為如同在第 2.1.2 小節討論過的，隨機變數本身沒有唯一性，有唯一性的是他的分佈。

引理 7.2.2： 令 $(G, \mathcal{G})$ 為可測空間，以及函數 $\psi : (G, \mathcal{G}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$。則下列兩性質等價：

(1) 對於所有 $n \geqslant 0$，$X_n \circ \psi$ 為可測函數。

(2) ψ 為可測函數。

證明：我們只需要證明 (1) ⇒ (2)。令

$$\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{F} : \psi^{-1}(A) \in \mathcal{G}\}.$$

我們不難檢查 $\mathcal{F}'$ 是個在 Ω 上的 σ 代數。對於任意固定的 $y \in E$ 來說，由於 E 是離散的，$\{y\}$ 是個可測集合。根據 (1)，我們知道 $\psi^{-1}(X_n^{-1}(\{y\})) = (X_n \circ \psi)^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{G}$，所以 $X_n^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{F}'$。因此，$\mathcal{F}'$ 會讓所有的座標函數 X_n 可測，所以給出等式 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$。 □

$$\begin{tikzcd}
(G,\mathcal{G}) \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[dd, dashed, "X_n\circ\psi"'] & \\
& (\Omega,\mathcal{F}) \arrow[dl, "X_n"] \\
(E,\mathcal{P}(E)) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\Omega',\mathcal{F}') \arrow[r, "\mathbb{P}'"] \arrow[d, "X_n\circ\Psi"'] \arrow[dr, "\Psi"] & {[0,1]} \\
(E,\mathcal{P}(E)) & (\Omega=E^{\otimes\mathbb{N}_0},\mathcal{F}) \arrow[l, "X_n"] \arrow[u, "\mathbb{P}_x"']
\end{tikzcd}$$

圖 7.1: **左圖**：對於所有 $n \geqslant 0$，座標函數 X_n 皆是可測的。引理 7.2.2 的敘述告訴我們，若且唯若 ψ 可測，則對於所有 $n \geqslant 0$，合成函數 $X_n \circ \psi$ 皆是可測的。**右圖**：定理 7.2.3 中構造正則馬可夫鏈，我們將在 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 機率空間上的測度，推至正則空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上。

定理 7.2.3 【正則馬可夫鏈】：令 Q 為 E 上的轉移矩陣，則對於所有 $x \in E$，存在唯一在 $\Omega = E^{\mathbb{N}_0}$ 上的機率測度 $\mathbb{P}_x$ 使得在 $\mathbb{P}_x$ 之下，座標函數定義出來的隨機過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，是個轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈，且滿足 $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$。

證明：令 $x \in E$，根據命題 7.2.1 ，存在機率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 使得我們可以在上面構造轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈 $(X_n^x)_{n\geqslant 0}$，且滿足 $X_0^x = x$。根據引理 7.2.2 ，下述函數可測：

$$\begin{array}{cccc}
\Psi: & \Omega' & \longrightarrow & \Omega = E^{\otimes\mathbb{N}_0} \\
 & \omega' & \longrightarrow & (X_n^x(\omega'))_{n\geqslant 0}
\end{array}.$$

我們將 $\mathbb{P}_x$ 定義為 $\mathbb{P}'$ 在 Ψ 之下的影像測度：$\mathbb{P}_x = \mathbb{P}' \circ \Psi^{-1}$，則我們有

$$\mathbb{P}_x(X_0 = x) = \mathbb{P}' \circ \Psi^{-1}(X_0 = x) = \mathbb{P}'(X_0^x = x) = 1.$$

此外，對於所有 $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$，我們也有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}'(X_0^x = x_0, \dots, X_n^x = x_n) \\ &= \mathbb{P}'(X_0^x = x_0)Q(x_0, x_1)\dots Q(x_{n-1}, x_n) \\ &= \mathbb{P}_x(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)\dots Q(x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

因此根據命題 7.1.8 ，在 $\mathbb{P}_x$ 之下，$(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 且起始位置為 x 的馬可夫鏈。

我們來討論唯一性：若 $\mathbb{P}_x$ 及 $\mathbb{P}'_x$ 皆滿足此定理敘述中所要求的性質，則他們在圓柱事件上取值相同。由於圓柱事件構成的集合在有限交集下是封閉的，且能夠生成 σ 代數 $\mathcal{F}$，單調類引理告訴我們 $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}'_x$（參考系理 1.1.19）。 □

註解 7.2.4 ：

(1) 根據命題 7.1.8 ，我們知道對於所有 $n \geqslant 0$ 以及 $x, y \in E$，我們有

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = Q_n(x, y).$$

(2) 若 μ 是個在 E 上的機率測度，我們記

$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x\in E} \mu(x)\mathbb{P}_x,$$

這會是個在 Ω 上的機率測度。我們可以檢驗在 $\mathbb{P}_\mu$ 之下，座標函數 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 的馬可夫鏈，且 X_0 與 μ 有著相同的分佈。

(3) 在機率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ 上，若 $(X'_n)_{n\geqslant 0}$ 是個轉移矩陣為 Q 且初始分佈為 μ 的馬可夫鏈，則對於任意可測集合 $B \subseteq \Omega = E^{\mathbb{N}_0}$，我們有

$$\mathbb{P}'((X'_n)_{n\geqslant 0} \in B) = \mathbb{P}_\mu(B).$$

在定理 7.2.3 的證明中，我們知道上式對於所有圓柱事件皆成立，因此同樣根據單調類引理，對於所有可測集合皆成立。此等式告訴我們，任何對正則馬可夫鏈為真的敘述，對任意有著相同轉移矩陣、以及相同初始條件的馬可夫鏈也會為真。

接著我們要討論馬可夫性質 (Markov properties) ，在此之前我們還需要引進一些新的記號。

定義 7.2.5 ： 首先，我們定義平移算子 (translation operator)。對於所有非負整數 $k \geqslant 0$，定義 $\theta_k : \Omega \longrightarrow \Omega$ 為

$$\theta_k((\omega_n)_{n\geqslant 0}) = (\omega_{k+n})_{n\geqslant 0}.$$

從引理 7.2.2 我們知道這些算子是可測的。

對於所有 $n \geqslant 0$，我們定義 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$，也就是說 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的正則濾鏈 (canonical filtration)。另外，我們定義 $\mathbb{E}_x$ 為在機率測度 $\mathbb{P}_x$ 之下的期望值。

定理 7.2.6 【簡單馬可夫性質】： 令 G 為在 Ω 上的非負可測函數。固定 $n \geqslant 0$。則對於所有 $x \in E$，以及任意非負 $\mathcal{F}_n$ 可測函數 F，我們有

$$\mathbb{E}_x[F \cdot G \circ \theta_n] = \mathbb{E}_x[F \ \mathbb{E}_{X_n}[G]]. \tag{7.8}$$

以等價的方式描述，對於任意的 $x \in E$ 來說，上述也可以重新寫做

$$\mathbb{E}_x[G \circ \theta_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[G], \tag{7.9}$$

這可以解讀為：$\theta_n(\omega)$ 在已知 $(X_0, \ldots, X_n)$ 的條件分佈為 $\mathbb{P}_{X_n}$。

證明：定理第二部份的敘述與第一部份等價，因此只需要證明第一部份。要證明式 (7.8)，只需要對於下列形式的 F 進行驗證：對於所有 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$，考慮

$$F = \mathbb{1}_{X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n}.$$

同樣的，對於 $p \geqslant 0$，$y_0, \ldots, y_p \in E$，考慮

$$G = \mathbb{1}_{X_0=y_0,\ldots,X_p=y_p}. \tag{7.10}$$

給定 $y \in E$，我們有

$$\mathbb{E}_y[G] = \mathbb{1}_{y_0=y} Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{p-1}, y_p),$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F \cdot G \circ \theta_n] &= \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_n = y_0, X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+p} = y_p) \\ &= \mathbb{1}_{x_0=x} Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{1}_{y_0=x_n} Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{p-1}, y_p), \end{aligned}$$

因此式 (7.8) 對式 (7.10) 中形式的 G 為真。透過單調類引理，我們知道式 (7.8) 對於所有的 $G = \mathbb{1}_A$，且 $A \in \mathcal{F}$ 也為真，故得證。 □

上述定理是簡單馬可夫性質的推廣形式：在知道過去 $(X_0, \ldots, X_n)$ 的情況下，馬可夫鏈在未來時間的分佈 $\theta_n(\omega)$ 只取決於當下的狀態 X_n。下面我們要探討的是強馬可夫性質 (strong Markov property)，也就是說所謂的「當下」，不一定會是個固定時間 n，而會是個由隨機變數 T 所給定的時間。在後面第 7.3 節中，我們會看到強馬可夫性質的應用。

定理 7.2.7 【強馬可夫性質】： 令 T 對於濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的停止時間，F 及 G 為兩個定義在 Ω

上的非負可測函數。那麼對於所有 $x \in E$，以及非負 $\mathcal{F}_T$ 可測函數 F 來說，我們有

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T<\infty} F \cdot G \circ \theta_T] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T<\infty} F \ \mathbb{E}_{X_T}[G]]. \tag{7.11}$$

對於任意固定的 $x \in E$ 來說，上述也可以重新寫做

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T<\infty} G \circ \theta_T \,|\, \mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{T<\infty} \mathbb{E}_{X_T}[G]. \tag{7.12}$$

註解 7.2.8 ： 我們注意到，這裡的隨機變數 X_T 是定義在 $\mathcal{F}_T$ 可測的集合 $\{T < \infty\}$ 之上，且是 $\mathcal{F}_T$ 可測的。期望值 $\mathbb{E}_{X_T}[G]$ 是個隨機變數，且也是定義在 $\{T < \infty\}$ 之上，可以視為函數 $\omega \mapsto X_T(\omega)$ 與 $x \mapsto \mathbb{E}_x[G]$ 的合成函數。

證明：給定整數 $n \geqslant 0$，由於 $\mathbb{1}_{T=n} F$ 是 $\mathcal{F}_n$ 可測的，我們可以將定理 7.2.6 中的簡單馬可夫性質用此函數上，進而得到

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \cdot G \circ \theta_T] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \cdot G \circ \theta_n] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \ \mathbb{E}_{X_n}[G]].$$

接著，我們將上式對 $n \in \mathbb{N}_0$ 取合，便可以得到式 (7.11)。 □

系理 7.2.9 ： 令 T 是個滿足 $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$ 的停止時間，假設存在 $y \in E$ 使得 $\mathbb{P}_x(X_T = y) = 1$，則在機率測度 $\mathbb{P}_x$ 之下，$\theta_T(\omega)$ 與 $\mathcal{F}_T$ 獨立，且有著與 $\mathbb{P}_y$ 相同的分佈。

證明：這是定理 7.2.7 的直接應用：

$$\mathbb{E}_x[F \cdot G(\theta_T(\omega))] = \mathbb{E}_x[F \ \mathbb{E}_{X_T}[G]] = \mathbb{E}_x[F \ \mathbb{E}_y[G]] = \mathbb{E}_x[F]\,\mathbb{E}_y[G].$$ □