

布朗運動

第一節 隨機漫步的收斂

在物理上理解布朗運動的方式，是將他看作一顆非常細小的粒子，在受到其他粒子碰撞後得到的軌跡，這樣的軌跡非常不規律且無法預測，且在每個時間點，都有可能會被碰撞而改變方向。以數學的角度來看，我們可以用一顆在 \mathbb{Z}^d 上做隨機漫步的粒子來模擬，他經過適當的尺度縮放及時間變換後得到的軌跡便會是布朗運動。

更確切的說，我們考慮在 \mathbb{Z}^d 上從 0 出發的隨機漫步 $(S_n)_{n \geq 0}$ ：

$$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad \forall n \geq 0,$$

其中 $(Y_n)_{n \geq 1}$ 為取值在 \mathbb{Z}^d 中的 i.i.d. 隨機變數，他們共同的分佈為 μ 並滿足下列性質：

(1) 置中且在 L^2 之中：

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} x \mu(x) = 0 \quad \text{且} \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^2 \mu(x) < \infty.$$

(2) 方向均勻性：存在 $\sigma > 0$ 使得對於所有 $1 \leq i, j \leq d$ ，我們有

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} x_i x_j \mu(x) = \sigma^2 \delta_{i,j}.$$

從定理 4.5.4，我們可以得知，經過適當縮放的隨機漫步 $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ 會分佈收斂至 d 維度的高斯分佈，其共變異數矩陣為 $\sigma^2 \text{Id}$ 。我們可以輕易驗證，在 \mathbb{Z}^d 上的對稱簡單隨機漫步會滿足以上的性質。

我們有興趣的是此隨機漫步在時空上全域的行為，也就是說，在時間夠大的情況下，此隨機漫步軌跡函數 $n \mapsto S_n$ 的表現。因此我們引進下列尺度變換：

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall n \geq 1.$$

也就是說，在新的時間尺度 t 下，我們可以觀察到原本隨機漫步在時間 $[nt]$ 的行為，但由於中央極限定理告訴我們，當 n 夠大時， $S_{[nt]}$ 的表現會是 \sqrt{n} 數量級的，因此必須除掉 \sqrt{n} 才有可能得到一個不平凡的極限。

命題 9.1.1：對於任意正整數 $p \geq 1$ 及實數 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ ，我們有下列收斂：

$$S_{t_1}^{(n)}, \dots, S_{t_p}^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} (U_{t_1}, \dots, U_{t_p}), \quad (9.1)$$

其中極限分佈是被下列性質所刻劃的：

- (1) 隨機變數序列 $(U_{t_j} - U_{t_{j-1}})_{1 \leq j \leq p}$ 是獨立的 ($U_0 = 0$) ；
- (2) 對任意 $1 \leq j \leq p$ ， $U_{t_j} - U_{t_{j-1}}$ 是個置中高斯向量，且其共變異矩陣寫作 $\sigma^2(t_j - t_{j-1})\text{Id}$ 。

註解 9.1.2 :

(1) 若定義

$$p_a(x) = \frac{1}{(2\pi a)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2a}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

則 $U_{t_j} - U_{t_{j-1}}$ 的密度函數是 $p_{\sigma^2(t_j - t_{j-1})}(x)$ ，因此上述極限分佈 $(U_{t_1}, \dots, U_{t_p})$ 的密度函數是可以這樣表示的：

$$f(y_1, \dots, y_p) = \prod_{j=1}^p p_{\sigma^2(t_j - t_{j-1})}(y_j - y_{j-1}).$$

(2) 式 (9.1) 中的收斂是整個隨機過程 $(S_t^{(n)})_{t \geq 0}$ 有限維度的分佈收斂，但並不代表整個隨機過程的分佈收斂。如下列收斂，無法由有限維度的分佈收斂所推得：

$$\sup_{t \geq 0} S_t^{(n)} = \sup_{k \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_{\geq 0}} S_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} \sup_{t \geq 0} U_t.$$

最主要的原因是，在已知所有有限維度分佈的情況之下，我們無法得知極限路徑（無限維度分佈）的規律性。稍後在 **第 9.2 節** 之中，我們會構造軌跡連續的布朗運動，然後 Donsker 定理（這門課不討論）會告訴我們在適當的拓撲空間中，我們可以討論隨機漫步軌跡收斂至布朗運動。

證明：根據 Lévy 連續定理（定理 4.4.15），我們只需要證明對於所有 $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^d$ ，下列收斂會成立即可：

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^p \xi_j \cdot S_{t_j}^{(n)} \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^p \xi_j \cdot U_{t_j} \right) \right].$$

也就是說，對於所有的 $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}^d$ ，下列收斂要成立：

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^p \eta_j \cdot (S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)}) \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^p \eta_j \cdot (U_{t_j} - U_{t_{j-1}}) \right) \right]. \quad (9.2)$$

我們針對上式的左邊做計算。首先，我們有

$$S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=\lfloor nt_{j-1} \rfloor + 1}^{\lfloor nt_j \rfloor} Y_k,$$

也就是說，隨機變數序列 $(S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)})_{1 \leq j \leq p}$ 是獨立的。此外，給定 j 時，我們有

$$S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)} \stackrel{(d)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt_j] - [nt_{j-1}]} = \sqrt{\frac{[nt_j] - [nt_{j-1}]}{n}} \frac{S_{[nt_j] - [nt_{j-1}]}}{\sqrt{[nt_j] - [nt_{j-1}]}}.$$

根據中央極限定理，上述隨機變數會分佈收斂至 $\sqrt{t_j - t_{j-1}}N$ ，其中 N 是個共變異矩陣為 $\sigma^2 \text{Id}$ 的高斯向量。因此對每個 $1 \leq j \leq p$ ，我們有下列收斂

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(i \eta_j \cdot (S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)}) \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\exp(i \sqrt{t_j - t_{j-1}} \eta_j \cdot N)] = \exp \left(- \frac{\sigma^2 |\eta_j|^2 (t_j - t_{j-1})}{2} \right).$$

上式中的最後一個等式是根據高斯分佈的 Laplace 變換計算（引理 2.4.14）而得到的。最後，我們用 $(S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)})_{1 \leq j \leq p}$ 的獨立性，得到式 (9.2) 而完成證明。 \square

定義 9.1.3：給定取值在 \mathbb{R}^d 中，定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數序列 $(B_t)_{t \geq 0}$ 。若 $(B_t)_{t \geq 0}$ 滿足：

(BM1) $B_0 = 0$ a.s. 且對於所有正整數 $p \geq 1$ 及實數 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$ ，隨機變數序列 $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{1 \leq j \leq p}$ 是獨立的且對於所有 $1 \leq j \leq p$ ， $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ 是個置中且變異數矩陣為 $(t_j - t_{j-1})\text{Id}$ 的高斯向量；

(BM2) 對於所有 $\omega \in \Omega$ ，函數 $t \mapsto B_t(\omega)$ 是連續的，

則我稱 $(B_t)_{t \geq 0}$ 為 d 維度由 0 出發的標準布朗運動 (standard Brownian motion)。

註解 9.1.4：

- (1) 大部分的時候，我們會直接將標準布朗運動稱作布朗運動。
- (2) 在下面的第 9.2 節中，我們會構造標準布朗運動，進而得到存在性，因此命題 9.1.1 的敘述可以重新解釋為，對於任意的 $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ ，我們有分佈收斂

$$(S_{t_1}^{(n)}, \dots, S_{t_p}^{(n)}) \stackrel{(d)}{\longrightarrow} (\sigma B_{t_1}, \dots, \sigma B_{t_p}).$$

這告訴我們，隨機漫步在經過正確的時空尺度變換後會收斂至布朗運動；從物理的觀點來理解，可以將此現象視為微觀的粒子碰撞現象及巨觀的隨機運動軌跡。

- (3) 如同上面所看到的，隨機向量 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})$ 的分佈可以由下列性質所描繪：

$$\mathbb{P} \left((B_{t_1}, \dots, B_{t_p}) \in A \right) = \int_A \prod_{j=1}^p p_{t_j - t_{j-1}}(y_{t_j} - y_{t_{j-1}}) \prod_{j=1}^p dy_j, \quad \forall A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^p) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes p}. \quad (9.3)$$

第二節 布朗運動的構造

在此章節中，我們想要把布朗運動當作一個隨機的連續函數來構造，更確切的說，我們想要建構一個合適的機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 讓我們可以在上面定義取值在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上隨機變數。接著，因為我們的布朗運動是個取值在 $C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 中的隨機過程，我們可以考慮前述構造 i.i.d. 定義在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的隨機變數，將他們黏在一起，並且對 d 維每個座標都做相同操作，即可得到我們要的布朗運動。

第一小節 Lévy 的構造

我們要介紹的是 Lévy 提出的構造方式：想法是先在 $[0, 1]$ 上找出合適的遞增集合 \mathcal{D}_n 使得 $\cup \mathcal{D}_n$ 是個在 $[0, 1]$ 中的稠密集合，接著在 \mathcal{D}_n 上構造好滿足性質 (BM1) 的隨機過程，並且以線性內插法將此隨機過程拓展到 $[0, 1] \setminus \mathcal{D}_n$ 上的點，最後證明這樣的構造方式在 n 趨近無窮大時，會在 $[0, 1]$ 上均勻收斂，因此極限也會滿足性質 (BM2)。

在詳細敘述上述 Lévy 的構造前，由於我們會使用數學歸納法來構造，我們先來證明下面的引理，這也是 Lévy 構造的精髓所在。

引理 9.2.1：給定 S 、 T 及 Z 三個常態分佈隨機變數 $\mathcal{N}(0, s)$ 、 $\mathcal{N}(0, t)$ 及 $\mathcal{N}(0, 1)$ ，我們假設 S 、 $T - S$ 及 Z 獨立。定義

$$U = \frac{S + T}{2} + \frac{\sqrt{t - s}}{2} Z,$$

則 S 、 $U - S$ 及 $T - U$ 為獨立的常態分佈隨機變數 $\mathcal{N}(0, s)$ 、 $\mathcal{N}(0, u - s)$ 及 $\mathcal{N}(0, t - u)$ ，其中 $u = \frac{s+t}{2}$ 。

證明：根據定義，我們知道 $(S, T - S, Z)$ 的共變異數矩陣寫作

$$K_{(S, T-S, Z)} = \text{Diag}(s, t - s, 1).$$

此外，若定義矩陣

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{t-s}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{t-s}}{2} \end{pmatrix},$$

則我們有 $(S, U - S, T - U)^T = A(S, T - S, Z)^T$ 。根據習題 2.21，我們得知

$$K_{(S, U-S, T-U)} = AK_{(S, T-S, Z)}A^T = \text{Diag}(s, \frac{t-s}{2}, \frac{t-s}{2}).$$

由於 $(S, U - S, T - U)$ 是個高斯向量且其共變異數矩陣為對角矩陣，命題 3.4.1 告訴我們獨立向量中的元素是獨立的。□

定理 9.2.2：標準布朗運動存在，也就是說，我們可以找到合適的機率空間及隨機過程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 使得定義 9.1.3 中的兩條件皆滿足。

證明：我們先定義下列二元集合：

$$\forall n \geq 0, \quad \mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\}.$$

再來我們將對於所有 n ，構造在 $[0, 1]$ 上的隨機連續函數，使得他在 \mathcal{D}_n 上的邊緣分佈會滿足定義 9.1.3 中所要求的，最後再證明這樣構造出來的隨機函數，會均勻收斂至一個隨機連續函數，就是我們的布朗運動。

我們記 $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_n$ 並考慮機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 使得我們可以在上面定義 i.i.d. 的標準常態分佈序列 $(Z_d)_{d \in \mathcal{D}}$ 。我們以數學歸納法的方式來構造隨機過程序列 $(B_d)_{d \in \mathcal{D}}$ 使得下列性質能被滿足：

- (a) 對於任意在 \mathcal{D}_n 中的元素 $s < t$ ，隨機變數 $B_t - B_s$ 的分佈為 $\mathcal{N}(0, t - s)$ 且與 B_s 獨立；
- (b) 對於任意非負整數 $n \geq 0$ ，隨機過程 $(B_d)_{d \in \mathcal{D}_n}$ 與 $(Z_t)_{t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n}$ 互為獨立。

我們的構造如下：

- (1) 我們定義 $B_0 = 0$ 及 $B_1 = Z_1$ ，顯然性質 (a) 及 (b) 成立。
- (2) 給定 $n \geq 1$ 並且假設 B_d 在 $d \in \mathcal{D}_{n-1}$ 上有定義且上述性質 (a) 及 (b) 成立，對於任意 $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ ，我們定義

$$B_d = \frac{1}{2}(B_{d-2^{-n}} + B_{d+2^{-n}}) + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}.$$

我們需要驗證，在遞迴構造 (2) 中，性質 (a) 及 (b) 仍然有被滿足，這是引理 9.2.1 的直接結果。

我們現在已經在二元數 \mathcal{D} 上面定義了隨機過程，在其他非二元數的點上，我們就以線性內插的方式定義。正確來說，我們定義

$$F_0(t) = \begin{cases} 0 & t = 0, \\ Z_1 & t = 1, \end{cases}$$

並將 $F_0(t)$ 在 $t \in (0, 1)$ 上定義為在 $t = 0$ 及 $t = 1$ 之間做線性內插；接著定義

$$\forall n \geq 1, \quad F_n(t) = \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}, \\ 0 & t \in \mathcal{D}_{n-1}, \end{cases}$$

並將 $F_n(t)$ 在 $t \notin \mathcal{D}_n$ 上定義為在 \mathcal{D}_n 中最接近的相鄰兩點上所取的值的線性內插。以上函數皆在 $[0, 1]$ 上連續，且對於所有 $n \geq 0$ 及 $d \in \mathcal{D}_n$ ，我們有

$$B_d = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d).$$

我們希望證明 $\sum_{n \geq 0} F_n$ 會在 $[0, 1]$ 上均勻收斂，因此我們需要對 Z_d 做尾端估計。根據習題 2.14，我們知道對於 $c > 1$ 及夠大的 n ，下列不等式成立：

$$\mathbb{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right).$$

也就是說，我們有

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\exists d \in \mathcal{D}_n : |Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathbb{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n \geq 0} (2^n + 1) \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right),$$

其中右方只要 $c > \sqrt{2 \ln 2}$ 時便會收斂，因此從 Borel–Cantelli 引理得知，隨在隨機變數 $N < \infty$ a.s. 使得對於所有 $n \geq N$ 及 $d \in \mathcal{D}_n$ ，我們有 $|Z_d| < c\sqrt{n}$ ，也就是說，對於所有 $n \geq N$ ，我們有

$$\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n} 2^{-(n+1)/2},$$

因此 $\sum_{n \geq 0} F_n$ 的確會在 $[0, 1]$ 上均勻收斂至一（隨機）連續函數，我們將其定義做 B 。

我們可以輕易檢查 $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ 在稠密集 \mathcal{D} 上滿足定義 9.1.3 中的性質 (1)，因此透過適當逼近，此性質也會在 $[0, 1]$ 上成立；另外根據構造，性質 (2) 顯然成立。因此我們構造出了在時間 $[0, 1]$ 上的布朗運動，若想要將時間拓展到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上，我們可以考慮 i.i.d. 的布朗運動序列 $(B^{(k)})_{k \geq 0}$ ，其中每個隨機變數 $B^{(k)}$ 皆是取值在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 中的隨機函數，我們將他們全部黏接在一起，得到的隨機過程便是時間在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的布朗運動。若要得到 d 維度的構造，我們可以考慮 d 個 i.i.d. 布朗運動作為分量，完成我們的構造。 \square

註解 9.2.3： 這個構造方式可以使用比較代數的方法來理解。

- (1) 我們可以考慮定義在一個機率空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，可數無窮多個隨機變數 $(Z_n)_{n \geq 0}$ 構成的 i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ 序列。機率空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是個希爾伯特空間，且隨機變數 $(Z_n)_{n \geq 0}$ 構成正規序列。此外， $L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 也是個希爾伯特空間，且 $h_0 \equiv 1$ 與下列函數會構成他的正規基底：

$$\forall n \geq 0, \quad \forall k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad h_n^k = 2^{n/2} \mathbf{1}_{[2k/2^{n+1}, (2k+1)/2^{n+1})} - 2^{n/2} \mathbf{1}_{[(2k+1)/2^{n+1}, (2k+2)/2^{n+1})}.$$

由於 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及 $L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 兩個希爾伯特空間皆是無窮維度的，我們可以定義一個從 $L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 出發，映射至 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 子空間的線性等距變換。

首先，我們將 $(Z_n)_{n \geq 0}$ 中的元素重新排序為 $Z_0, (Z_n^k)_{n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n - 1}$ ，設 $\Phi(h_0) = Z_0$ 並對於所有 $n \geq 0$ 及 $0 \leq k \leq 2^n - 1$ ，設 $\Phi(h_n^k) = Z_n^k$ 。這讓我們將 Φ 的定義自然拓展到整個空間：對於所有 $f \in L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ ，我們有

$$\Phi(f) = \left(\int_0^1 f(t) h_0(t) dt \right) Z_0 + \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \left(\int_0^1 f(t) h_n^k(t) dt \right) Z_n^k.$$

且我們可以驗證：

$$\mathbb{E}[\Phi(f)\Phi(g)] = \|fg\|_2, \quad \forall f, g \in L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda).$$

再來，對於所有 $t \in [0, 1]$ 定義 $B_t = \Phi(\mathbb{1}_{[0,t]})$ 。這個定義讓我們可以對隨機過程 $B := (B_t)_{t \geq 0}$ 輕易驗證性質 (BM1)。同時，我們也可以檢驗隨機過程 B 與定理 9.2.2 中 Lévy 的構造相同，因此我們得到連續性質 (BM2)。若不使用此方法，我們也可以利用習題 9.4 來探討隨機過程 B 的規律性，也會給出他的連續性。

(2) 第一個布朗運動的構造是在 1923 年由 Norbert Wiener 在「Differential Space」中給出，寫作

$$B_t = Z_0 t + \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} Z_n \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

若我們使用上述描述的線性等距變換的角度來理解，此構造對應於在 $L^2([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上另一個正規基底的選擇，也就是由三角函數所構成的：

$$\{1\} \cup \{t \mapsto \sqrt{2} \cos(\pi n t)\}_{n \geq 1}.$$

第二小節 Wiener 過程

令 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 為由 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 至 \mathbb{R}^d 中的連續函數構成的空間。在此空間上，我們配置 σ 代數 \mathcal{C} 定義為使所有座標函數 $w \mapsto w(t)$ ，對於所有 $t \geq 0$ 皆為可測的最小 σ 代數。

引理 9.2.4： σ 代數 \mathcal{C} 與 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 之上，由在所有緊緻集上均勻收斂的拓撲所給出的布雷爾 σ 代數相同。

證明：首先，我們知道由在所有緊緻集上均勻收斂的拓撲可以被下列距離所描述：

$$d(w, w') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{0 \leq t \leq n} (|w(t) - w'(t)| \wedge 1).$$

我們將由 d 定義的布雷爾 σ 代數記作 \mathcal{B} 。

一方面，我們注意到，由於座標函數 $w \mapsto w(t)$ 為由 $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), d)$ 映射至 \mathbb{R}^d 的連續函數，所以會對布雷爾 σ 代數 \mathcal{B} 可測，因此我們會有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 。

另一方面，賦距空間 $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d), d)$ 是可分 (separable) 的，因此此空間中任意開集皆可以寫作開球的可數聯集。因此若要證明 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ ，我們只需要證明任意 \mathcal{B} 的開球皆會在 \mathcal{C} 中，換句話說也就是對任意給定的 $w_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ ，函數 $w \mapsto d(w_0, w)$ 是 \mathcal{C} 可測的。若我們將定義距離 d 的 \sup 重新寫作：

$$\sup_{t \in [0, n]} (|w(t) - w_0(t)| \wedge 1) = \sup_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} (|w(t) - w_0(t)| \wedge 1)$$

則顯然我們有 \mathcal{C} 可測的性質。 □

定義 9.2.5 : 令 $(B_t)_{t \geq 0}$ 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上 d 維的標準布朗運動（出發點為 0）。我們將 d 維的 Wiener 測度 (Wiener's measure) 定義為 \mathbb{P} 在下列函數下的影像測度

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d) \\ \omega &\longmapsto (B_t(\omega))_{t \geq 0} \end{aligned}$$

這會是個在 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 上的機率測度，且我們將他記作 $\mathbb{P}_0 := \Phi_* \mathbb{P} = \mathbb{P} \circ \Phi^{-1}$ 。

註解 9.2.6 :

- (1) 從引理 7.2.2 我們知道 Φ 是可測的，因為 Φ 與任意座標函數 $w \mapsto w(t)$ 的合成為 $\omega \mapsto B_t(\omega)$ 是個可測函數。
- (2) \mathbb{P}_0 是定義良好的，因為他並不取決於標準布朗運動 B 的選擇。若給定 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$ ，則對於任意 \mathbb{R}^d 的布雷爾集合 A_0, A_1, \dots, A_p ，從式 (9.3) 我們得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_0(\{w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d) : w(t_0) \in A_0, \dots, w(t_p) \in A_p\}) \\ &= \mathbb{P}(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_p} \in A_p) \\ &= \mathbb{1}_{A_0}(0) \int_{A_1 \times \dots \times A_p} \prod_{j=1}^p p_{t_j - t_{j-1}}(y_{t_j} - y_{t_{j-1}}) \prod_{j=1}^p dy_j. \end{aligned} \quad (9.4)$$

顯然，對任意標準布朗運動，上式的結果皆相同。接著使用單調類引理，也就是說，在 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 上的機率測度是被他在圓柱事件上的機率所決定，也就是說下列的事件集合

$$\{w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d) : w(t_0) \in A_0, \dots, w(t_p) \in A_p\}.$$

因此這告訴我們， \mathbb{P}_0 有唯一性，且不取決於我們考慮的標準布朗運動 B ，換句話說，所有的標準布朗運動皆有相同的分佈，也就是 Wiener 測度。

- (3) Wiener 測度之於 $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 如同勒貝格測度之於 $[0, 1]$ 。
- (4) 若 $x \in \mathbb{R}^d$ ，我們可以將 $\mathbb{P}_x(dw)$ 記作 $\mathbb{P}_0(dw)$ 在位移 $w \mapsto x + w$ 之下的影像測度，這會是由 x 出發的標準布朗運動的分佈。

我們以下列方式來構造正則布朗運動 (canonical Brownian motion)。考慮樣本空間 $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$ 且在上面配置 σ 代數 \mathcal{C} 以及機率測度 \mathbb{P}_0 。我們定義

$$B_t(w) = w(t), \quad \forall w \in \Omega, \quad \forall t \geq 0. \quad (9.5)$$

我們可以檢查，定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P}_0)$ 上的隨機過程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是個由 0 出發的標準布朗運動：性質 (BM2) 顯然成立；性質 (BM1) 則是由式 (9.4) 中的計算所給出。相同的，在機率測度 \mathbb{P}_x 之下，定義在式 (9.5) 中隨機過程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 會是個由 x 出發的標準布朗運動。

第三小節 軌跡的規律性

由於布朗運動是個連續函數，他在每個緊緻區間上會是均勻連續的。我們可以考慮線段 $[0, 1]$ 並探討布朗運動在此線段上的規律性。首先，我們定義（全域）連續性尺度的概念：若（隨機）連續函數 φ 滿足

$$\lim_{h \downarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad \text{以及} \quad \limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\varphi(h)} \leq 1,$$

則稱 φ 為連續性尺度 (modulus of continuity)。

下面定理告訴我們，布朗運動有個非隨機的連續性尺度。

定理 9.2.7：存在常數 $C > 0$ 使得幾乎必然，對於所有夠小的 h 以及所有 $0 \leq t \leq 1-h$ ，我們有不等式

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C \sqrt{h \ln(1/h)}.$$

註解 9.2.8：

- (1) 此定理間接告訴我們，對於所有的 $\gamma < \frac{1}{2}$ ，布朗運動的軌跡是 γ -Hölder 連續的。
- (2) 此定理給出的全域連續性尺度數量級是最好的數量級，因為 Lévy 的（全域）連續性尺度定理告訴我們，下列等式幾乎必然成立：

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1.$$

我們在這門課程中不會證明此結果。

- (3) 關於區域連續性尺度的結果，請參考習題 9.10。

證明：我們使用在定理 9.2.2 中構造布朗運動時所引進的記號。

首先注意到，每個 F_n 皆是片段線性函數，因此片段可微，微分幾乎處處存在；根據相仿的計算，我們知道對任意 $c > \sqrt{2 \ln 2}$ ，存在（隨機）正整數 N 使得

$$\forall n \geq N, \quad \|F'_n\|_\infty \leq \frac{2 \|F_n\|_\infty}{2^{-n+1}} \leq c \sqrt{n} 2^{(n-1)/2}.$$

接著，對於任意的 $t, t+h \in [0, 1]$ ，考慮正整數 $l > N$ 並使用均值定理 (mean-value theorem)：

$$\begin{aligned} |B_{t+h} - B_t| &\leq \sum_{n \geq 0} |F_n(t+h) - F_n(t)| \\ &\leq \sum_{n=0}^l h \|F'_n\|_\infty + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2 \|F_n\|_\infty \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} h \|F'_n\|_\infty + \sum_{n=N}^l ch\sqrt{n}2^{(n-1)/2} + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2 \|F_n\|_\infty.$$

在上式中，我們可以取夠小的 h 使得第一項會比 $\sqrt{h \ln(1/h)}$ 來得小；接著我們取 $l > N$ 使得 $2^{-l} < h \leq 2^{-l+1}$ ，這會告訴我們第二項和第三項皆會被常數乘上 $\sqrt{h \ln(1/h)}$ 所控制住，得證。
□

定理 9.2.9：幾乎必然，布朗運動的軌跡在任何點都不會是 Lipschitz 連續的，因此在任何點皆不可微分。

證明：固定常數 $M < \infty$ ，對於所有 $n \geq 1$ ，令

$$A_n = \{\omega : \exists s \in [0, 1], |t - s| \leq \frac{3}{n} \Rightarrow |B_t - B_s| \leq M|t - s|\}.$$

對於所有 $0 \leq k \leq n - 3$ ，定義

$$Y_{k,n} = \max \left\{ |B_{(k+j+1)/n} - B_{(k+j)/n}| : j = 0, 1, 2 \right\},$$

$$C_n = \{\exists k : Y_{k,n} \leq \frac{5M}{n}\}.$$

根據定義，我們可以驗證，對於任意 $\omega \in A_n$ ，選擇任意相對應的 $s = s(\omega) \in [0, 1]$ ，再選擇 $0 \leq k \leq n - 3$ 使得 $\frac{k}{n} \leq s < \frac{k+1}{n}$ （若 $s \geq \frac{n-2}{n}$ ，我們取 $k = n - 2$ ），則根據三角不等式我們有

$$|B_{(k+j+1)/n} - B_{(k+j)/n}| \leq |B_{(k+j+1)/n} - B_s| + |B_s - B_{(k+j)/n}| \leq \frac{5M}{n},$$

也就是說 $\omega \in C_n$ 。因此我們得到 $A_n \subseteq C_n$ 。所以我們有

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C_n) \leq n \mathbb{P}(|B_1| \leq \frac{5M}{\sqrt{n}})^3 \leq n(\frac{5M}{\sqrt{n}})^3 = n^{-1/2}(5M)^3.$$

由於 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是個遞增事件序列，且上式機率的上界在 n 趨近於無窮時會趨近於 0，因此我們得知對於所有的 n ，我們皆有 $\mathbb{P}(A_n) = 0$ 。因此這告訴我們，對於所有 $n \geq 1$ ，我們有 $\mathbb{P}(A_n^c) = 1$ ，也就是說，下列性質幾乎必然成立：

$$\forall s \in [0, 1], \quad \limsup_{t \rightarrow s} \frac{|B_t - B_s|}{|t - s|} \geq M.$$

由於上式對於所有 $M > 0$ 成立，我們得到定理所描述的性質。 □

問題 9.2.10：如何修改定理 9.2.9 的證明，進而推得下列性質。

- (1) 對於任意函數 $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ，我們定義上右微分 (upper right derivative) 及下右微分 (lower

right derivative) :

$$\forall t \in [0, 1), \quad D^* f(t) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$D_* f(t) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

試證對布朗運動來說，幾乎必然，對於所有 $t \in [0, 1)$ ，我們有

$$D^* B_t = +\infty \quad \text{或} \quad D_* B_t = -\infty.$$

(2) 證明對於任意 $k \geq 3$ ，對所有 $\gamma > \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$ ，布朗運動的軌跡幾乎必然不會是 γ -Hölder 連續的。

問題 9.2.11：我們可以定義下列隨機集合

$$\mathcal{H}_\gamma(\omega) = \{t \geq 0 : s \mapsto B_s(\omega) \text{ 在 } t \text{ 是 } \gamma\text{-Hölder 連續的}\}.$$

- (1) 證明對於所有 $\gamma < \frac{1}{2}$ ，我們有 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_\gamma = [0, \infty)) = 1$ 。
- (2) 證明對於所有 $\gamma > \frac{1}{2}$ ，我們有 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_\gamma = \emptyset) = 1$ 。
- (3) 證明對於所有 $t \geq 0$ ，我們有 $\mathbb{P}(t \in \mathcal{H}_{1/2}) = 0$ 。
- (4) Burgess Davis 在 1983 年證明了 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_{1/2} \neq \emptyset) = 1$ ，請解釋為何與 (3) 沒有矛盾？