

第一章：測度論中的重要概念

習題 1.1：令 E 為一集合，並定義 $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ 或 } A^c \text{ 為可數集}\}$ 。試證 $\mathcal{A}$ 為 E 之上的 σ 代數。

習題 1.2：在一個空間 E 上，給定遞增的 σ 代數序列 $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ ，並定義 $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$ 。

- (1) 證明 $\mathcal{A}$ 是個代數（參照註解 1.1.2）。
- (2) $\mathcal{A}$ 會是個 σ 代數嗎？如果是，請證明；如果不是，請舉出反例。

習題 1.3 【問題 1.1.7】：證明下列三種不同類型區間構成的集合所生成的 σ 代數皆為 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ：

- (1) $\mathcal{I} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$,
- (2) $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
- (3) $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$.

習題 1.4 【問題 1.1.9】：證明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

習題 1.5 【命題 1.1.11】：令 $(E, \mathcal{A}, \mu)$ 為測度空間，利用定義 1.1.10 中測度的定義，證明下列性質：

- (1) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ ， $A \subseteq B$ ， $\mu(A) \leq \mu(B)$ 且 $\mu(A) < \infty$ ，則有

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

- (2) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ ，則

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

- (3) 【下連續性】令 $(A_n)_{n \geq 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞增序列（也就是說對於所有 n ，我們有 $A_n \subseteq A_{n+1}$ ），則

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mu(A_n).$$

- (4) 【上連續性】令 $(B_n)_{n \geq 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的遞減序列（也就是說對於所有 n ，我們有 $B_{n+1} \subseteq B_n$ ）。若存在 n_0 使得 $\mu(B_{n_0}) < \infty$ ，則

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \mu(B_n).$$

(5) 若 $(A_n)_{n \geq 1}$ 為取值在 $\mathcal{A}$ 中的序列，則

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

習題 1.6 【問題 1.1.21】：請解釋為什麼在系理 1.1.19 中，有限測度或是 σ 有限測度的假設是重要的。換句話說，是否能夠找到無限測度 μ 及 ν ，使得對於所有 $A \in \mathcal{C}$ ，我們有 $\mu(A) = \nu(A)$ ，但卻會有 $\mu \neq \nu$ ？

習題 1.7 【命題 1.2.2】：令 $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ 及 $(G, \mathcal{G})$ 為三個可測空間。若函數 $f: E \rightarrow F$ 及 $g: F \rightarrow G$ 兩者皆為可測函數，證明 $g \circ f$ 也是個可測函數。

習題 1.8 【命題 1.2.3】：令 $(E, \mathcal{A})$ 及 $(F, \mathcal{B})$ 為兩個可測空間，令 $f: E \rightarrow F$ 為一函數。假設存在子集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ 且對於所有 $B \in \mathcal{C}$ ，我們有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ，證明 f 為可測函數。

習題 1.9 【命題 1.2.5】：試證下列性質：

- (1) 對於 $i = 1, 2$ ，令 $f_i: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F_i, \mathcal{B}_i)$ 並將 $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F_1 \times F_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ 定義做 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x \in E$ 。若且唯若 f_1 及 f_2 皆為可測函數，則 f 為可測函數。
- (2) 若 $f, g: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 兩者皆為可測函數，則下列函數皆為可測函數： $f + g$, fg , $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \sup(-f, 0)$ 。

習題 1.10 【命題 1.2.6】：若 (f_n) 為取值在 $\mathbb{R}$ 之中的可測函數序列，試證下列函數也是可測的

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup f_n, \quad \liminf f_n.$$

習題 1.11：令 (f_n) 為值域在 $\mathbb{R}$ 中的可測函數序列，試問下列集合是否可測？

$$A = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \text{ 存在} \}.$$

習題 1.12：給定一個事件序列 $(A_n)_{n \geq 1}$ ，我們定義下列概念

(i) 我們稱下列集合為上極限 (upper limit)：

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

(ii) 我們稱下列集合為下極限 (lower limit)：

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

(iii) 若 (A_n) 的上下極限相等，則其上下極限亦可被稱做極限 (limit)，並記作 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 。

(iv) 若 (A_n) 的上下極限不相等，則稱 (A_n) 之極限不存在。

試證下列性質：

(1) $\limsup A_n = \{\omega \mid \omega \in A_n \text{ i.o.}\}$ ，其中 i.o. 意為 infinitely often，表示存在無限多個 n 使得 $\omega \in A_n$ 。

(2) $\liminf A_n = \{\omega \mid \omega \in A_n \text{ a.a.}\}$ ，其中 a.a. 意為 almost all，表示除了有限多個 n 之外，我們皆有 $\omega \in A_n$ 。

(3) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$ 。

習題 1.13： 令 $(E, \mathcal{A}, \mu)$ 為測度空間，若 μ 為有限測度，試證 μ 的原子最多為可數；換句話說，證明

$$\{x \in E : \mu(x) > 0\}$$

至多為可數集合。若 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 為可測函數，證明最多存在可數多的 $t \in \mathbb{R}$ ，使得

$$\mu(\{x \in E : f(x) = t\}) > 0.$$

習題 1.14： 令 $(E, \mathcal{A}, \mu)$ 為一測度空間，及 $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ 為定義在 $(E, \mathcal{A})$ 上的非負可積函數。試證對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆存在 $\delta > 0$ 使得下列敘述成立：

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta \implies \int_A f \, d\mu < \varepsilon.$$

習題 1.15： 令 F 為一分佈函數，證明其不連續點構成的集合最多為可數集。

習題 1.16： 請解釋為什麼在勒貝格控制收斂定理（定理 1.2.21）中，(2) 中的條件是重要的。換句話說，找出函數序列 (f_n) 滿足敘述除了 (2) 之外的所有條件，使得結果不成立。

習題 1.17： 定義下列數列

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \, dt.$$

請問序列 $(u_n)_{n \geq 1}$ 是否會收斂？請仔細解釋。如果會的話，求其極限。