

第二章：機率論基礎

習題 2.1： 請描述不同機率試驗中的樣本空間。

- (1) 投擲一顆正反兩面硬幣，直到出現反面為止。
- (2) 在一副四種花色、十三個數字的撲克牌組中，抽出五張牌（不考慮順序）。
- (3) 在單為圓盤中，從原點出發、且在碰到圓盤邊界便停止的隨機運動軌跡。

在 (1) 中，假設硬幣為公正，及在 (2) 中，假設撲克牌為均勻抽排，描述所相對應的機率測度。

習題 2.2 【Bertrand 悖論】： 法國數學家 Joseph Bertrand (1822-1900) 在 1889 出版的「機率計算」(Calcul des probabilités) 一書之中，提出了下列問題：給定一個正三角形及其外接圓，隨機取圓上一弦，試問此弦長度大於正三角形的邊長為何？Bertrand 同時提出了三種計算方式，卻得到三個不同答案。

- (1) 弦的兩個端點為圓上均勻隨機選擇的兩個點。
- (2) 在圓內均勻隨機選擇一點，畫出過此點的弦，使得弦的中點為此隨機點。
- (3) 事先在圓上均勻隨機選擇一點，畫出過此點及圓心的半徑，在此半徑上均勻隨機選擇一點，並畫出過此點且與此半徑垂直的弦。

請給出在以上三種不同狀況（隨機試驗）下的

- (a) 機率空間；
- (b) 描述弦長的隨機變數及其密度函數；
- (c) 弦長大於正三角形邊長的機率。

習題 2.3 : 在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中，若對於任意 $A \in \mathcal{A}$ 滿足 $\mathbb{P}(A) > 0$ ，我們可以找到 $B \in \mathcal{A}$ ，使得 $B \subseteq A$ 且 $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$ ，則我們說 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 是無原子的 (atomless)；反之，則說 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 是有原子的 (atomic)。

(1) 這裡我們假設可測空間 $(\Omega, \mathcal{A})$ 為 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 。證明若且唯若 $\mathbb{P}$ 是無原子機率測度，則 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 也是無原子機率空間。（可以參考定義 1.1.12）

(2) 分別給出無原子機率空間及有原子機率空間的例子。

給定無原子機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ，並固定 $A \in \mathcal{A}$ 滿足 $\mathbb{P}(A) > 0$ 。

(3) 證明對於所有 $\varepsilon > 0$ ，我們可以找到 $B \in \mathcal{A}$ 且 $B \subseteq A$ 使得 $0 < \mathbb{P}(B) < \varepsilon$ 。

(4) 證明若 $0 < a < \mathbb{P}(A)$ ，則存在 $B \in \mathcal{A}$ 且 $B \subseteq A$ 使得 $\mathbb{P}(B) = a$ 。

習題 2.4 : 固定機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 。考慮 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ 滿足下列條件：

(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$ ；

(b) 若 $A \in \mathcal{C}$ ，則 $A^c \in \mathcal{C}$ ；

(c) 若 $A, B \in \mathcal{C}$ ，則 $A \cap B \in \mathcal{C}$ 。

我們稱這樣的 $\mathcal{C}$ 為集合代數 (algebra of sets)。此外，我們也假設 $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{C})$ 。

(1) 證明對於任何 $B \in \mathcal{A}$ ，我們有 $\inf\{\mathbb{P}(A \Delta B) : A \in \mathcal{C}\} = 0$ 。

(2) 給定有界的隨機變數 X 及 $\varepsilon > 0$ ，證明存在簡單函數 $Y = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}$ ，其中 $A_k \in \mathcal{C}$ ，使得 $\mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon$ 。

習題 2.5 : 令 X, Y 及 Z 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的實隨機變數。

(1) 假設 X 與 Y （相對於機率測度 $\mathbb{P}$ ）幾乎處處相等，證明 X 與 Y 有相同的分佈。試問其逆命題是否成立？

(2) 假設 X 與 Y 有相同的分佈。

(a) 令 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為伯雷爾函數，證明 $f(X)$ 與 $f(Y)$ 有著相同的分佈。

(b) 證明 XZ 與 YZ 未必有相同的分佈。

習題 2.6 : 令 $X \sim \text{Unif}([0, 1])$ 為 $[0, 1]$ 上的均勻隨機變數。

(1) 令 $Y = -\ln(1 - X)$ 並求 Y 的分佈。

(2) 令 $Z = \tan(\pi X - \frac{\pi}{2})$ 並求 Z 的分佈。

習題 2.7 【問題 2.1.21】：試著構造兩個二維的實隨機變數 $X = (X_1, X_2)$ 及 $X' = (X'_1, X'_2)$ 使得對於 $j = 1, 2$ ， X_j 及 X'_j 有著相同的邊緣分佈，但 X 及 X' 的分佈卻不相同。

習題 2.8：給定機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 以及定義在此空間上的二維實隨機變數 (X, Y) 。使用註解 2.1.16 中提到的方式，來求隨機變數的分佈。

(1) 假設 (X, Y) 的分佈為

$$\lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) dx dy.$$

求隨機變數 $U = \min(X, Y)$ 的分佈。

(2) 假設 (X, Y) 的分佈為

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

求隨機變數 $\frac{X}{Y}$ 的分佈。

習題 2.9：令 X 為取值在 $[0, 1)$ 上的隨機變數，其分佈 $\mathbb{P}_X$ 為在 $[0, 1)$ 上的勒貝格測度。我們以遞迴方式來定義隨機變數序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ ：

$$\begin{aligned} X_1 &:= \lfloor 2X \rfloor, \\ X_{n+1} &:= \lfloor 2^{n+1}X - \sum_{k=1}^n 2^{n+1-k} X_k \rfloor, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

(1) 驗證幾乎必然所有的 X_n 取值皆在集合 $\{0, 1\}$ 中，也就是說

$$\mathbb{P}(\forall n \geq 1, X_n \in \{0, 1\}) = 1.$$

(提示：證明序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ 為 X 的二進位展開 (dyadic expansion)。)

(2) 請描述由 X_1 生成的 σ 代數 $\sigma(X_1)$ 。（寫出 σ 代數中的所有元素）

(3) 請描述由 X_1 及 X_2 生成的 σ 代數 $\sigma(X_1, X_2)$ 。這與只由 X_2 生成的 σ 代數 $\sigma(X_2)$ 相同嗎？你可以嘗試把這兩個 σ 代數中的元素都寫下來。

(4) 固定正整數 $n \geq 1$ ，請找出由 $X_1, \dots, X_n$ 生成的 σ 代數（不用寫出裡面所有的元素）。請問此 σ 代數中有多少個元素？

習題 2.10：求第 2.3 節中不同隨機分佈的期望值及變異數。

習題 2.11：給定任意 $p \in (0, 1)$ ，若 $X \sim \text{Geo}(p)$ ，則對於所有整數 $m, n \geq 0$ ，證明

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m + n \mid X \geq m).$$

我們稱此為幾何分佈的無記憶性質 (memoryless property)。

習題 2.12 : 對任何 $0 \leq k \leq n$, 證明

$$\lim_{\substack{N, K \rightarrow \infty \\ K/N \rightarrow p}} f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

其中 f_X 是 $X \sim \text{Hypergeo}(N, K, n)$ 的質量函數。請詮釋此結果。

習題 2.13 : 考慮非負實數序列 $(p_n)_{n \geq 1}$ 及隨機變數序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ 使得對於所有 $n \geq 1$, 隨機變數 X_n 滿足二項式分佈 $\text{Bin}(n, p_n)$ 。假設當 n 趨近無窮大時, 我們有 $np_n \rightarrow \lambda$, 證明

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

習題 2.14 : 令 X 為分佈為 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的隨機變數。利用兩種方法證明下列不等式

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \max\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{t}, 1\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

- (1) 使用分部積分法。
- (2) 使用 X 的動差生成函數 $\mathbb{E}[e^{sX}]$ 。

習題 2.15 : 對於任意 $u > 0$, 柯西分佈 (Cauchy distribution) 的密度函數寫作

$$c_u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{u}{u^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (1) 驗證對於所有 $u > 0$, c_u 定義一個機率分佈。
- (2) 證明其期望值不存在。
- (3) 證明 $c_u * c_v = c_{u+v}$ 。

習題 2.16 : 令 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 及 $X := Z^2$, 證明 $X \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

習題 2.17：令 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 為標準常態分佈的隨機變數。

- (1) 求他的動差生成函數 $M(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ 。
- (2) 使用數學歸納法，證明對於所有非負整數 $k \geq 0$ ，存在多項式 P_k 滿足下列條件：
 - (a) $M^{(k)}(t) = P_k(t)e^{t^2/2}$ ；
 - (b) $\deg(P_k) = k$ ；
 - (c) 當 k 為奇數時， P_k 只包含奇數次方的項；當 k 為偶數時， P_k 只包含偶數次方的項；
 - (d) $P_{k+1}(t) = P'_k(t) + tP_k(t)$ 。
- (3) 證明當 k 為奇數時， $\mathbb{E}[X^k] = 0$ 。（請提出兩種方法：一種使用動差生成函數，一種使用積分。）
- (4) 對所有非負整數 $k \geq 0$ ，計算 $\mathbb{E}[X^k]$ 。
- (5) 使用變數變換及 Γ 函數的性質，得到與上題相同的結果。

習題 2.18 【高斯積分的估計】：令 f 為標準常態分佈的密度函數，也就是說

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

我們把 f 的分佈函數記作 F ，也就是說

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

- (1) 證明當 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有漸進行為

$$1 - F(x) \sim \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

（提示：考慮左右兩側的微分。）

- (2) 當 $x > 1$ 時，證明下列不等式

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)f(x) < 1 - F(x) < \frac{f(x)}{x}.$$

（提示：再次考慮左右兩側的微分。）

- (3) 更一般來說，證明對於所有整數 $k \geq 0$ ，我們有漸進式

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= f(x) \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{x^{2j+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right) \right) \\ &= f(x) \left(\sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{2j}{j} j! + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right) \right). \end{aligned}$$

(4) 證明對於所有 $a > 0$ ，在 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有下列極限

$$\frac{1 - F\left(x + \frac{a}{x}\right)}{1 - F(x)} \rightarrow e^{-a}.$$

(5) 證明對於所有 $b > 0$ ，在 $x \rightarrow +\infty$ 時，我們有下列極限

$$\frac{1 - F(x + b)}{1 - F(x)} \rightarrow 0.$$

習題 2.19： 在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上，我們給定 n 維實隨機變數 $(X_1, \dots, X_n)$ 使得其分佈寫作

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

(1) 對於所有排列 (permutation) $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ，令 $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ 。利用 $(A_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$ 構造在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數 $(Y_1, \dots, Y_n)$ ，使得下列敘述幾乎必然為真：

$$Y_1 < \dots < Y_n \quad \text{且} \quad \{Y_1, \dots, Y_n\} = \{X_1, \dots, X_n\}.$$

(2) 給出下列兩隨機變數向量的分佈： $(Y_1, \dots, Y_n)$ 以及 $(\frac{Y_1}{Y_2}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n})$ 。

習題 2.20 【問題 2.4.9】： 試證明當 X 是個 d 維的實隨機變數時，其共變異數矩陣 K_X 是個半正定 (positive semi-definite) 對稱矩陣，換句話說，證明對於所有的 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ ，我們有 $\lambda K_X \lambda^T \geq 0$ 。

習題 2.21 【問題 2.4.10】： 若 A 是個 $n \times d$ 維的矩陣，且 X 為 d 維實隨機變數，定義 $Y = AX$ ，試證明 $K_Y = AK_X A^T$ 。

習題 2.22： 考慮密度函數（對於勒貝格測度）如下的機率分佈：

$$p_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} \exp\left(-\frac{\ln(y)^2}{2}\right), \quad y > 0.$$

令 Y 是個密度函數由 p_0 給定的隨機變數

(1) 令 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。找出可測函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $Y \stackrel{(d)}{=} f(X)$ 。

(2) 對於所有非負整數 $n \geq 0$ ，計算 Y 的 n 階動差。

(3) 令

$$q(y) = \sin(2\pi \ln(y)) p_0(y).$$

對於所有非負整數 $n \geq 0$ ，計算 $\int_{\mathbb{R}_{>0}} y^n q(y) dy$ 。

(4) 對於所有 $a \in \mathbb{R}$ ，令

$$p_a(y) = p_0(y) + a q(y).$$

什麼情況下， p_a 會是個機率密度函數？

(5) 從上述問題，我們可以得到什麼結論？

習題 2.23：給定滿足下列條件的實數序列 $(\mu_k)_{k \geq 0}$ ：

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k} = r < \infty.$$

(1) 假設存在分佈函數 F 使得其動差由 $(\mu_k)_{k \geq 0}$ 給出。對於所有 $k \geq 0$ ，令 $\nu_k = \int |x|^k dF(x)$ 。證明對於所有 $k \geq 0$ ，我們有 $\nu_{2k+1}^2 \leq \mu_{2k} \mu_{2k+2}$ ，因此由此可以推得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_k^{1/k}}{k} = r.$$

(2) 令 X 為分佈函數為 F 的隨機變數，我們將其特徵函數記作 Ψ_X 。證明對於所有 $x \in \mathbb{R}$ ， $t \in \mathbb{R}$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ ，我們有

$$\left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right| \leq \frac{|tx|^n}{n!}.$$

進而推得

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left| \Psi_X(\xi + t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \Psi_X^{(k)}(\xi) \right| \leq \frac{|t|^n}{n!} \nu_n.$$

(3) 給定 $\xi \in \mathbb{R}$ ，該如何選擇 t ，我們才有下列的等式呢？

$$\Psi_X(\xi + t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Psi_X^{(k)}(\xi).$$

(4) 解釋我們在這裡證明出了什麼，並參考習題 2.22 以做總結。

習題 2.24 【動差方法】： 令 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 為機率空間。

(1) 考慮有限集合 I 且對於所有 $i \in I$ ，取可測事件 $A_i \in \mathcal{A}$ 。證明下列不等式成立：

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

(2) 令 X 為在 $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中，且期望值為 $\mu := \mathbb{E}[X] < \infty$ 的隨機變數，證明

$$\mathbb{P}(X \leq \mu) > 0 \quad \text{且} \quad \mathbb{P}(X \geq \mu) > 0.$$

(3) 令 X 為在 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中，非常數且取值為非負整數的隨機變數，證明

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

習題 2.25： 對任意加法群 $(G, +)$ 的子集合 A ，若對所有 $a, b \in A$ ， $a + b \notin A$ ，則我們說 A 是個無和集合 (sum-free set)。給定對任意一個由非零整數構成的集合 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ，我們想要利用在習題 2.24 引入的動差方法，證明存在 $A \subseteq B$ ，且 $|A| > \frac{n}{3}$ ，使得 A 是個無和集合。

(1) 對於任意正整數 k ，證明 $C_k := \{k+1, \dots, 2k+1\}$ 在環群 $\mathbb{Z}/(3k+2)\mathbb{Z}$ 中是個無和集合。

(2) 令 $p = 3k+2$ 為滿足 $p > 2 \max\{|b_i| : 1 \leq i \leq n\}$ 的質數。令 X 為在 $\{1, \dots, p-1\}$ 之上的均勻隨機變數，令 $0 \leq D_i < p$ 使得 $D_i \equiv Xb_i \pmod{p}$ 等 n 個隨機變數。試證所有的 D_i 皆有相同的分佈。求此分佈並證明 $\mathbb{P}(D_i \in C_k) > \frac{1}{3}$ 。

(3) 總結。

習題 2.26 【問題 2.4.26】： 給定隨機變數 X ，則下列三敘述等價：

(1) X 是個次高斯分佈；

(2) 存在 $C, c > 0$ 使得對於所有 $t \in \mathbb{R}$ ，我們有 $\mathbb{E}[e^{tX}] \leq C \exp(ct^2)$ ；

(3) 存在 $C > 0$ 使得對於所有 $k \geq 1$ ，我們有 $\mathbb{E}[|X|^k] \leq (Ck)^{k/2}$ 。

習題 2.27 【問題 2.4.27】： 令 X 為實隨機變數且 $k > 0$ 。若 X 在 L^k 中，證明當 $\lambda \rightarrow \infty$ 時，我們有

$$\lambda^k \mathbb{P}(|X| > \lambda) \rightarrow 0.$$