

Chapter 3: Independence of Random Variables

Exercise 3.1 (Question 3.1.2) : Given n events $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Are $A_1, \dots, A_n$ independent events if only one of the following conditions holds?

- $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n)$;
- for any pair $1 \leq i < j \leq n$, we have, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$.

Exercise 3.2 (Question 3.1.15) : Construct two random variables X and Y such that $\text{Cov}(X, Y) = 0$ without X and Y being independent. In Exercise 3.20, we will see a specific condition under which $\text{Cov}(X, Y) = 0$ implies the independence between X and Y .

Exercise 3.3 : Let X and Y be two independent standard normal random variables. Show that $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ are $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ also independent with standard normal distribution.

Exercise 3.4 : Let X and Y be bounded random variables. Show that X and Y are independent if and only if

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k] \mathbb{E}[Y^\ell].$$

Exercise 3.5 : Let U be an exponential random variable with parameter 1 and V be a uniform random variable on $[0, 1]$. Assume that these two random variables are independent. Prove that $X = \sqrt{U} \cos(2\pi V)$ and $Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$ are also independent.

Exercise 3.6 : Let X and Y be random variables with normal distribution with $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Are they independent? If we add the condition “the random variable $aX + bY$ is also a normal distribution for all $a, b \in \mathbb{R}$ ”, please answer to the same question.

Exercise 3.7 (Question 3.1.17) : Let $X_1, \dots, X_n$ be real-valued random variables. The following properties are equivalent.

- $X_1, \dots, X_n$ are independent random variables.
- For any $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, we have $\mathbb{P}(X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq a_i)$.
- If $f_1, \dots, f_n$ are continuous and compactly supported (緊緻支撐) functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}_{\geq 0}$, then

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [f_i(X_i)].$$

- The characteristic function of X writes,

$$\Phi_X(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\xi_i).$$

第三章：隨機變數的獨立性

習題 3.1 【問題 3.1.2】：給定 n 個事件 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ，試問若只有下列其中一個條件成立，則 $A_1, \dots, A_n$ 是否會是獨立事件？

- $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_n)$ ；
- 對於任何數對 $1 \leq i < j \leq n$ ，我們有 $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$ 。

習題 3.2 【問題 3.1.15】：構造兩個隨機變數 X 及 Y 使得 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 但 X 與 Y 並不獨立。在習題 3.20 中，我們會看到在某特定的條件下， $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 蘊含 X 與 Y 獨立。

習題 3.3：令 X 及 Y 兩個獨立標準常態分佈，試證 $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ 及 $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ 也為獨立隨機變數，且他們分佈也是標準常態分佈。

習題 3.4：令 X 及 Y 兩個有界的隨機變數，試證若且唯若 X 及 Y 獨立，則

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k] \mathbb{E}[Y^\ell].$$

習題 3.5：令 U 為參數為 1 的指數隨機變數，令 V 為在 $[0, 1]$ 區間上的均勻隨機變數，假設兩者互相獨立。試證 $X = \sqrt{U} \cos(2\pi V)$ 及 $Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$ 互相獨立。

習題 3.6：如隨機變數 X 及 Y 皆為常態分佈，且 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ，試問他們是否獨立？若我們加上條件「對於所有 $a, b \in \mathbb{R}$ ，隨機變數 $aX + bY$ 也是常態分佈」，請回答相同問題。

習題 3.7 【問題 3.1.17】：令 $X_1, \dots, X_n$ 為實隨機變數，我們有下列等價關係：

- $X_1, \dots, X_n$ 為獨立隨機變數。
- 對於任意 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ，我們有 $\mathbb{P}(X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq a_i)$ 。
- 若 $f_1, \dots, f_n$ 為緊緻支撐 (compactly supported)，由 $\mathbb{R}$ 映射到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的連續函數，則

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [f_i(X_i)].$$

- X 的特徵函數可以寫作

$$\Phi_X(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\xi_i).$$

Exercise 3.8 (Question 3.1.19) : Let $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ be independent σ -algebras and $n_0 = 0 < n_1 < \dots < n_p = n$. Then, the following σ -algebras are independent,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \mathcal{B}_1 \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_1} \stackrel{(\text{def})}{=} \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1}), \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{B}_{n_1+1} \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{D}_p &= \mathcal{B}_{n_{p-1}+1} \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_p}.\end{aligned}$$

Exercise 3.9 (Question 3.2.5) : Explain why it is necessary to assume that $(A_n)_{n \geq 1}$ is an independent sequence of events in (2) of Lemma 3.2.4.

Exercise 3.10 : Let $\alpha > 0$ and a sequence of independent random variables $(Z_n)_{n \geq 1}$ defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Assume that for all $n \geq 1$, the distribution of Z_n is the following Bernoulli distribution,

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha},$$

Show that Z_n converges to 0 in L^1 but we have,

$$\text{a.s.,} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \leq 1, \\ 0 & \text{if } \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercise 3.11 (Proposition 3.3.2) : If $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ is a sequence of i.i.d. random variables where each term follows the Poisson distribution of parameter λ , then $X_1 + \dots + X_n$ is a Poisson distribution of parameter $n\lambda$.

Exercise 3.12 (Proposition 3.3.3) : If $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ is a sequence of independent random variables such that for all $1 \leq k \leq n$, X_k has the Gaussian distribution of parameter $(0, \sigma_k^2)$, then $X_1 + \dots + X_n$ has the Gaussian distribution of parameter $(0, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

Exercise 3.13 : We use the notations from Exercise 2.15. Let $u > 0$. Assume that $X_1, \dots, X_n$ are i.i.d. Cauchy random variables with density function c_u , show that $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ has the same density function c_u .

Exercise 3.14 (Gamma distribution) : Let $(X_n)_{n \geq 1}$ be an i.i.d. sequence of exponential random variables of parameter $\lambda > 0$. Given two parameters $k, \theta > 0$, if the random variable X has its values in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ and the density function,

$$\gamma_{k,\theta}(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} \mathbf{1}_{x \geq 0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

we call it the *Gamma distribution* (伽瑪分佈) of parameter (k, θ) , denoted $X \sim \Gamma(k, \theta)$.

- (1) Given $k, \theta > 0$, compute the expectation and the variance of $\Gamma(k, \theta)$.
- (2) Show that $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda^{-1})$.

習題 3.8 【問題 3.1.19】 : 令 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ 為獨立 σ 代數。對於 $n_0 = 0 < n_1 < \dots < n_p = n$ ，下列 σ 代數是獨立的：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \mathcal{B}_1 \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_1} \stackrel{(\text{def})}{=} \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1}), \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{B}_{n_1+1} \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{D}_p &= \mathcal{B}_{n_{p-1}+1} \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_p}.\end{aligned}$$

習題 3.9 【問題 3.2.5】 : 解釋為什麼在引理 3.2.4 的 (2) 中，我們必須假設 $(A_n)_{n \geq 1}$ 為獨立事件。

習題 3.10 : 令 $\alpha > 0$ 以及 $(Z_n)_{n \geq 1}$ 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的獨立隨機變數序列。假設對於 $n \geq 1$ ， Z_n 的分佈是個伯努力分佈

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{且} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha},$$

證明 Z_n 在 L^1 中收斂至 0，但我們有

$$\text{a.s.,} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{若 } \alpha \leq 1, \\ 0 & \text{若 } \alpha > 1. \end{cases}$$

習題 3.11 【命題 3.3.2】 : 若 $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ 為 i.i.d. 隨機變數序列，且各項皆為參數為 λ 的帕松分佈，則 $X_1 + \dots + X_n$ 為參數為 $n\lambda$ 的帕松分佈。

習題 3.12 【命題 3.3.3】 : 若 $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ 為獨立隨機變數序列，且對於所有 $1 \leq k \leq n$ ， X_k 的分佈為參數為 $(0, \sigma_k^2)$ 的高斯分佈，則 $X_1 + \dots + X_n$ 為參數為 $(0, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$ 的高斯分佈。

習題 3.13 : 這裡我們使用習題 2.15 中的記號。令 $u > 0$ 。假設 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d. 柯西隨機變數，且密度函數皆為 c_u ，試證 $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ 的密度函數也是 c_u 。

習題 3.14 【伽瑪分佈】 : 令 $(X_n)_{n \geq 1}$ 為 i.i.d. 參數為 $\lambda > 0$ 的指數隨機變數序列。給定兩個參數 $k, \theta > 0$ ，若隨機變數 X 的值域為 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 且其密度函數寫作：

$$\gamma_{k,\theta}(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} \mathbf{1}_{x \geq 0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

我們稱之為參數 (k, θ) 的伽瑪分佈 (Gamma distribution)，並記作 $X \sim \Gamma(k, \theta)$ 。

- (1) 給定 $k, \theta > 0$ ，求 $\Gamma(k, \theta)$ 的期望值以及變異數。
- (2) 證明 $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda^{-1})$ 。

Exercise 3.15 : Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. standard Gaussian distributions. Show that the density function of $\chi_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$ is

$$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \mathbb{1}_{x>0}.$$

It is called the χ^2 distribution (χ^2 分佈) with n degrees of freedom. What is the relation of this distribution with the Gamma distribution (Exercise 3.14)?

Exercise 3.16 : Let $X_1, \dots, X_n$ be random variables defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Assume that they are independent and have exponential distributions of parameters $c_1, \dots, c_n$. Let $Y = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$. Prove the following statements.

- (1) Y is a random variable with exponential distribution of parameter $c_1 + \dots + c_n$.
- (2) There exists a $\mathcal{A}$ -measurable function $N : \Omega \rightarrow \{1, \dots, n\}$ such that,

$$\mathbb{P}\text{-a.s.}, \quad X_N = Y \quad \text{and} \quad X_N < \min\{X_k : k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{N\}\}.$$

- (3) The random variable N satisfies: for all $k \in \{1, \dots, n\}$, we have,

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{c_k}{c_1 + \dots + c_n}.$$

- (4) N and Y are independent random variables.

Exercise 3.17 (Poisson process) : Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space and $(X_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of i.i.d. random variables with exponential distribution of parameter 1. Let $T_0 = 0$ and for all $n \geq 1$, let

$$T_n = X_1 + \dots + X_n.$$

For all $t \geq 0$, let

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

- (1) Suppose $n \geq 1$, determine the distribution of the n -tuple $(T_1, \dots, T_n)$.
- (2) For any $t > 0$, determine the distribution of N_t .
- (3) Given $n \geq 1$ and $t > 0$, we define a new probability measure $\mathbb{Q}^{n,t}$ on Ω ,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)}.$$

Determine the distribution of the n -tuple $(T_1, \dots, T_n)$ under the probability measure $\mathbb{Q}^{n,t}$.

習題 3.15 : 令 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d. 標準高斯分佈，證明 $\chi_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$ 的密度為

$$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \mathbb{1}_{x>0}.$$

此分佈稱作自由度為 n 的 χ^2 分佈 (χ^2 distribution)。此分佈與伽瑪分佈 (習題 3.14) 的關係為何？

習題 3.16 : 令 $X_1, \dots, X_n$ 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數。假設他們分別是參數為 $c_1, \dots, c_n$ 且獨立的指數隨機變數，令 $Y = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$ 。試證下列敘述：

- (1) Y 是個參數為 $c_1 + \dots + c_n$ 的指數隨機變數。
- (2) 存在一個對 $\mathcal{A}$ 可測的函數 $N : \Omega \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 使得

$$\mathbb{P}\text{-a.s.}, \quad X_N = Y \quad \text{且} \quad X_N < \min\{X_k : k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{N\}\}.$$

- (3) 隨機變數 N 的分佈滿足：對於所有 $k \in \{1, \dots, n\}$ ，我們有

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{c_k}{c_1 + \dots + c_n}.$$

- (4) N 及 Y 為獨立隨機變數。

習題 3.17 【帕松過程】 : 令 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 為機率空間， $(X_n)_{n \geq 1}$ 為 i.i.d. 隨機變數序列，並假設他們皆是參數為 1 的指數分佈。令 $T_0 = 0$ 及對於所有 $n \geq 1$ ，令

$$T_n = X_1 + \dots + X_n.$$

對於所有 $t \geq 0$ ，令

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

- (1) 令 $n \geq 1$ ，求 n 元組 $(T_1, \dots, T_n)$ 的分佈。
- (2) 對於任意 $t > 0$ ，求 N_t 的分佈。
- (3) 給定 $n \geq 1$ 及 $t > 0$ ，我們在 Ω 上定義新的機率測度 $\mathbb{Q}^{n,t}$ ：

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)}.$$

求在機率測度 $\mathbb{Q}^{n,t}$ 之下， n 元組 $(T_1, \dots, T_n)$ 的分佈。

Exercise 3.18 : We are given n independent random variables $X_1, \dots, X_n$ on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Assume that they are all follow the uniform distribution on $[0, 1]$. Define $m = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ and $M = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Determine the density functions of m and M , compute their expectations and variances.

Exercise 3.19 : Let $X = (X_1, \dots, X_d)$ be a d -dimensional real-valued random variable. We want to show that the following three conditions are equivalent. Moreover, when one of the conditions is satisfied, we say that X has a multivariate normal distribution (多元常態分佈).

- (a) There exist a d -dimensional real-valued random variable $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ such that the components are i.i.d. standard normal distributions, a square matrix A of size $d \times d$ and a vector $B \in \mathbb{R}^d$ such that $X \stackrel{(d)}{=} AZ + B$.
- (b) For any $\alpha \in \mathbb{R}^d$, the random variable $\alpha^T X$ also has a normal distribution.
- (c) There exist a semi-definite symmetric matrix Σ of size $d \times d$ and a vector $B \in \mathbb{R}^d$ such that the characteristic function of X writes,

$$\Phi_X(\xi) = \mathbb{E} [e^{i\xi \cdot X}] = \exp(i\xi^T B - \frac{1}{2}\xi^T \Sigma \xi).$$

Exercise 3.20 : Let (X, Y) be a pair of random variables with *bivariate normal distribution* (二元常態分佈). Prove that X and Y are independent if and only if $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

習題 3.18 : 在機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上，我們給定 n 個獨立的隨機變數 $X_1, \dots, X_n$ 。假設他們皆為在 $[0, 1]$ 上的均勻分佈，定義 $m = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ 以及 $M = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ ，求 m 及 M 的密度函數，並計算他們的期望值以及變異數。

習題 3.19 : 令 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 為 d 維實隨機變數。我們這裡要證明下列三個條件是等價的，而且當其中一個條件成立時，我們稱 X 為多元常態分佈 (multivariate normal distribution)。

- (a) 存在 d 維實隨機變數 $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ ，其中分量為 i.i.d. 標準常態分佈；存在 $d \times d$ 的方形矩陣 A 以及向量 $B \in \mathbb{R}^d$ ，使得 $X \stackrel{(d)}{=} AZ + B$ 。
- (b) 對於任意 $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ， $\alpha^T X$ 仍然是常態分佈。
- (c) 存在 $d \times d$ 的半正定對稱矩陣 Σ 以及向量 $B \in \mathbb{R}^d$ 使得我們可以將 X 的特徵函數寫作

$$\Phi_X(\xi) = \mathbb{E} [e^{i\xi \cdot X}] = \exp(i\xi^T B - \frac{1}{2}\xi^T \Sigma \xi).$$

習題 3.20 : 令 (X, Y) 是分佈為二元常態分佈 (bivariate normal distribution) 的隨機變數對。試證若且唯若 X 與 Y 獨立，則 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 。