第四章：隨機變數的收斂

習題 4.1： 令 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 為機率空間，$(X_n)_{n\geqslant 1}$ 為實隨機變數序列，X 為實隨機變數，並假設對於機率測度 $\mathbb{P}$，X_n 機率收斂至 X。若 $\mathbb{Q}$ 是在 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上，且對於 $\mathbb{P}$ 是絕對連續的機率測度，證明對於機率測度 $\mathbb{Q}$，X_n 也機率收斂至 X。

習題 4.2： 令 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 為機率空間，假設 Ω 是可數集合，且 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$，證明對於值域為任意賦距空間 (E, d) 的隨機變數序列來說，「殆必收斂」以及「機率收斂」是等價的。

習題 4.3： 令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 為獨立隨機變數序列，且滿足下列分佈

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{X_1} = \delta_0, \\ \forall n \geqslant 2, \qquad & \mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2n\ln(n+1)}(\delta_n + \delta_{-n}) + \Big(1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\Big)\delta_0. \end{aligned}$$

令 $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$。

(1) 證明 Y_n 機率收斂至 0。

(2) 證明 Y_n 殆必發散。

習題 4.4： 固定機率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 及實數 $p \geqslant 1$。給定定義在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 及 X。我們要討論機率收斂、殆必收斂及 L^p 收斂三者的關係：下列敘述若正確，請簡單證明；敘述若錯誤，請找出反例。

(1) 若 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$，則 $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$。

(2) 若 $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$，則 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。

(3) 若 $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$，則存在子序列 $(n_k)_{k\geqslant 1}$ 使得 $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。

(4) 若 $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$，則 $X_n \xrightarrow{L^p} X$。

(5) 若 $X_n \xrightarrow{L^p} X$，則 $X_n \xrightarrow{(\mathbb{P})} X$。

(6) 若 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$，則 $X_n \xrightarrow{L^p} X$。

(7) 若 $X_n \xrightarrow{L^p} X$，則 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。

習題 4.5： 固定正整數 $n \geqslant 1$ 並令 $(X_k)_{k\geqslant 1}$ 為 i.i.d. 取值在 $\{1,\dots,n\}$ 上的均勻隨機變數數列。令

$$T_n := \inf\{m \geqslant 1 : \{X_1,\dots,X_m\} = \{1,\dots,n\}\}.$$

(1) 對於所有 $1 \leqslant k \leqslant n$，令 $\tau_k^n := \inf\{m \geqslant 1 : |\{X_1,\dots,X_m\}| = k\}$。證明隨機變數序列 $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leqslant k\leqslant n}$ 是獨立的，並求其各項的分佈。

(2) 由上題推得 $T_n/(n\ln n)$ 會機率收斂至 1。

習題 4.6【問題 4.2.3】： 給定 i.i.d. 實隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$，並且以定義 4.2.1 的方式定義 σ 代數 $\mathcal{B}_k$ 及 $\mathcal{B}_\infty$。試證明下列性質：

(1) 若 Y 是個對於 $\mathcal{B}_\infty$ 可測的實隨機變數，則它殆必為常數。

(2) 若 $\frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)$ 殆必收斂，從上題推得則其極限必須殆必為常數。

習題 4.7： 令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 為定義在機率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 上的 i.i.d. 隨機變數序列，並假設存在隨機變數 Y 使得

$$\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} Y.$$

(1) 證明 $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$。

(2) 證明對於任意定義在 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 上的隨機變數 Z，我們有等價關係：

$$Z \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|Z| \geqslant n) < \infty.$$

(3) 由此推得 $X_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$。

習題 4.8： 考慮 i.i.d. 定義在機率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 上的實數隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$，並假設他們的分佈滿足

$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

(1) 證明對於所有 $u \in \mathbb{R}$，我們有 $\mathbb{E}[e^{uX_1}] \leqslant e^{u^2/2}$。

(2) 令 $a_1,\dots,a_n$ 為實數且滿足 $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$，並且令 $S = \sum_{k=1}^n a_k X_k$。證明對於所有 $u \in \mathbb{R}$，我們有 $\mathbb{E}[e^{uS}] \leqslant e^{u^2/2}$。由此推得

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \mathbb{P}(|S| \geqslant t) \leqslant 2\, e^{-t^2/2}.$$

（提示：考慮 $S \geqslant 0$ 及 $S \leqslant 0$ 兩種情況並使用動差生成函數。）

(3) 使用上題，證明對於任意實數 $a_1,\dots,a_n$ 及任何正實數 $p>0$，我們有

$$\|S\|_p := \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^n a_k X_k\right|^p\right]^{1/p} \leqslant C_p\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}.$$

（提示：使用富比尼定理重新表示期望值。）

(4) 對於所有 $n\geqslant 1$，設 $S_n = X_1+\cdots+X_n$。證明對於任意 $\alpha>1$，我們有

$$\frac{S_n}{\sqrt{n(\ln n)^\alpha}} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

（提示：使用 (2) 的結果。）

習題 4.9 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 為 i.i.d. 非負隨機變數序列。

(1) 除了在某特定情況之外（請描述此情況），證明 $\sum_{n\geqslant 0} X_n = \infty$ a.s.。

(2) 令 X 為非負隨機變數。證明對於所有 $\alpha>0$，我們有下列等價關係：

$$\mathbb{E}[X]<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(X\geqslant \alpha n)<\infty.$$

(3) 從而證明我們有下列二分法：

$$\text{a.s.,}\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{若 } \mathbb{E}[X_1]<\infty, \\ \infty & \text{若 } \mathbb{E}[X_1]=\infty. \end{cases}$$

(4) 【不可積情況下的大數法則】令 (Y_n) 為 i.i.d. 隨機變數序列。對於所有 $n\geqslant 0$，令 $S_n = Y_1+\cdots+Y_n$。證明若 Y_1 不可積，則 $(\frac{S_n}{n})_{n\geqslant 1}$ 殆必發散。

習題 4.10 【問題 4.4.5 】**：** 令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 及 X 為值域為 $\mathbb{Z}^d$ 的隨機變數。試證：若且唯若 X_n 分佈收斂至 X，則

$$\forall x\in\mathbb{Z}^d,\qquad \mathbb{P}(X_n=x)\longrightarrow \mathbb{P}(X=x).$$

習題 4.11 【問題 4.4.6 】**：** 假設對於所有 $n\geqslant 1$，(X_n) 是有密度函數的隨機變數，記作 $\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) = p_n(x)\,\mathrm{d}x$。假設

(1) $p_n(x)\longrightarrow p(x), \qquad \mathrm{d}x\text{-a.s.}$,

(2) 存在非負函數 q 使得 $\int_{\mathbb{R}^d} q(x)\,\mathrm{d}x<\infty$ 且

$$\forall n,\qquad p_n(x)\leqslant q(x),\qquad \mathrm{d}x\text{-a.s.}.$$

證明 p 是個在 $\mathbb{R}^d$ 上機率測度的密度函數，而且 X_n 分佈收斂至 $p(x)\,\mathrm{d}x$。

習題 4.12 【問題 4.4.7】：若 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 分佈收斂至 X，是否對於任意 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，我們有下列收斂？

$$\mathbb{P}(X_n\in B)\longrightarrow\mathbb{P}(X\in B).$$

習題 4.13 【問題 4.4.9】：考慮實隨機變數 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 及 X，將他們的分佈函數寫作 $(F_{X_n})_{n\geqslant 1}$ 以及 F_X。若且唯若隨機數列序列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 分佈收斂至 X，則對於所有 F_X 的連續點 x，分佈函數 $F_{X_n}(x)$ 收斂至 $F(x)$。

習題 4.14 【問題 4.4.14】：給定在 $\mathbb{R}^d$ 上的機率測度序列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$。若對於所有 $\varepsilon>0$，存在緊緻集合 $K_\varepsilon\subseteq\mathbb{R}^d$ 使得

$$\mu_n(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon,$$

則我們說 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 是個緊密 (tight) 的序列。給定在 $\mathbb{R}^d$ 上的測度 μ，證明下列性質等價：

(1) μ_n 會弱收斂至 μ。

(2) μ_n 會淡收斂至 μ 且 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 是緊密的。

習題 4.15 【命題 4.4.11】：證明若 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 分佈收斂至 X，且 X 殆必為常數，則 (X_n) 也機率收斂至 X。

習題 4.16：令 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 為機率空間，$(X_n)_{n\geqslant 1}$ 及 $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ 兩實隨機變數序列，X 及 Y 兩實隨機變數。假設 $X_n\xrightarrow{(d)}X$ 以及 $Y_n\xrightarrow{(d)}Y$。

(1) 假設對於所有 $n\geqslant 1$，隨機變數 X_n 及 Y_n 是獨立的，以及假設 X 及 Y 也是獨立的，證明 $(X_n,Y_n)\xrightarrow{(d)}(X,Y)$。

(2) 一般情況下，(X_n,Y_n) 是否會分佈收斂至 (X,Y)？

(3) 【Slutsky 引理】若 Y 殆必為常數，證明 (X_n,Y_n) 分佈收斂至 (X,Y)。

習題 4.17：令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 為定義在機率空間 $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 上的 i.i.d. 隨機變數，並將他們各項的分佈記作 μ。對於所有 $n\geqslant 1$，令 $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$。

(1) 若 μ 為在 $[0,1]$ 上的均勻分佈，證明當 $n\to\infty$ 時，$(n(1-M_n))_{n\geqslant 1}$ 會分佈收斂，並求他的極限分佈。

(2) 若 μ 為柯西分佈 Cauchy$(0,1)$，證明當 $n\to\infty$ 時，$\frac{n}{M_n}$ 會分佈收斂，並求他的極限分佈。（提示：當 $x\to\infty$ 時，我們有 $\arctan(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$。）

習題 4.18 ： 這裡我們嘗試在比較簡單的例子中，用比較基礎的工具來證明中央極限定理以及大偏差 (large deviations) 的結果。考慮 i.i.d. 的隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$，並假設他們皆為參數為 $\frac{1}{2}$，取值為 ± 1 的伯努力分佈，也就是我們有

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

對於所有 $n \geqslant 1$，令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$。

(1) 證明當 n 很大的時候，我們有下列趨近式：

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-n-k-1/2}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)^{-n+k-1/2}.$$

(2) 若 $2k/\sqrt{2n} \longrightarrow x$，證明

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, e^{-x^2/2}.$$

(3) 證明中央極限定理：對於任意 $a < b$，我們有

$$\mathbb{P}(a\sqrt{2n} \leqslant S_{2n} \leqslant b\sqrt{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(a \leqslant \chi \leqslant b),$$

其中 χ 是個 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈。

(4) 若 $k/n \longrightarrow x$，求 $\frac{1}{2n}\ln \mathbb{P}(S_{2n} = 2k)$ 的漸進展開式至 $o(1)$ 項。並給出在 n 夠大的情況下，聯繫 $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k)$ 以及 $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k+2)$ 的不等式。

(5) 證明下列結果：對於 $a \in (0,1)$，

$$\frac{1}{2n}\ln \mathbb{P}(S_{2n} \geqslant 2na) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma(a),$$

其中 $\gamma(a) = \frac{1}{2}\big[(1+a)\ln(1+a) + (1-a)\ln(1-a)\big]$。此結果稱作大偏差，因為此式子可以用來理解尾端機率的漸進行為，會是以負指數的方式遞減。

習題 4.19 ： 令 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 為機率空間。

(1) 若 X 是個定義在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 之上，平方可積的隨機變數，證明對任意 $a > 0$，我們有

$$\mathbb{E}[|X - \inf(X,a)|] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}(X \geqslant a)}.$$

令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 是個在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的 i.i.d. 隨機變數序列，且皆為參數為 1 的帕松分佈。對於所有 $n \geqslant 1$，令

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \qquad 且 \qquad Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n).$$

(2) 對於所有 $n \geqslant 1$，求 S_n 的分佈，計算 $\mathbb{E}[Y_n^2]$ 以及證明對於任意 $a > 0$，

$$\mathbb{P}(Y_n^- \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a^2}.$$

(3) 若 Y 是個 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈，證明隨機變數序列 $(Y_n^-)_{n\geqslant 1}$ 分佈收斂至 Y^-。

(4) 證明 $\mathbb{E}[Y_n^-]$ 收斂至 $\mathbb{E}[Y^-]$。

(5) 由上推導出 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n, \quad \text{當 } n \to \infty.$$