

Chapter 5: Conditional Expectations

Exercise 5.1 : Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space, $\mathcal{G}$ be a sub- σ -algebra of $\mathcal{F}$ and a non-negative random variable X defined on Ω . Prove that $\{\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] > 0\}$ is the smallest $\mathcal{G}$ -measurable set containing $\{X > 0\}$. Here, the inclusion is defined up to a set of zero measure.

Exercise 5.2 : Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. Given a sequence $(X_n)_{n \geq 1}$ of non-negative random variables and a sequence $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ of sub- σ -algebras of $\mathcal{F}$. Suppose that $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n]$ converges in probability to 0.

- (1) Prove that X_n also converges in probability to 0.
- (2) Does the converse hold? If yes, prove it, otherwise, find a counter-example.

Exercise 5.3 : Given random variables X and Y defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a sub- σ -algebra $\mathcal{G}$ of $\mathcal{F}$. We say that X and Y are independent knowing $\mathcal{G}$ if for all non-negative measurable functions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we have,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}] \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}].$$

- (1) What does it mean if $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? And if $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
- (2) Show that the above definition is equivalent to any of the two following properties.
 - (a) For any non-negative $\mathcal{G}$ -measurable random variable Z and any non-negative measurable functions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we have,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}]].$$

- (b) For any non-negative measurable function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we have,

$$\mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}].$$

Exercise 5.4 : Below we want to extend some properties of the expectation to the conditional expectation.

- (1) Prove that for any non-negative random variable X , the following equality holds almost surely,

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t | \mathcal{G}) dt.$$

- (2) (Markov's inequality) For any random variable $X \in L^p$ and $a > 0$, the following inequality holds almost surely,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a | \mathcal{G}) \leq a^{-p} \mathbb{E}[|X|^p | \mathcal{G}].$$

- (3) How to extend the Chebyshev's inequality and the Hölder's inequality?

第五章：條件期望值

習題 5.1 : 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間， $\mathcal{G}$ 為 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數，以及定義在 Ω 上的非負隨機變數 X 。證明 $\{\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] > 0\}$ 是包含 $\{X > 0\}$ 中，最小的 $\mathcal{G}$ 可測集合。這裡所謂的包含關係，是把測度為零的可測集合遺忘掉之後的包含關係。

習題 5.2 : 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間。給定非負隨機變數序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ 以及 $\mathcal{F}$ 中的子 σ 代數序列 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 。假設 $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n]$ 會機率收斂至 0。

- (1) 證明 X_n 也會機率收斂至 0。
- (2) 逆命題是否成立？若成立，請證明，若不成立，請找出反例。

習題 5.3 : 給定定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的隨機變數 X 及 Y 以及 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數 $\mathcal{G}$ 。若對於所有非負可測函數 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，我們有

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}] \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}].$$

則我們說 X 與 Y 在已知 $\mathcal{G}$ 的情況下是獨立的。

- (1) 若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ ，代表什麼？若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ ，又代表什麼？
- (2) 證明此定義與下列任意性質之一等價：
 - (a) 對於任意非負 $\mathcal{G}$ 可測的隨機變數 Z 以及任意非負可測函數 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，我們有

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}]].$$

- (b) 對於任意非負可測函數 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，我們有

$$\mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y) | \mathcal{G}].$$

習題 5.4 : 這裡我們將期望值的性質推廣到條件期望值上。

- (1) 證明對於任意非負隨機變數 X ，下列等式幾乎必然成立：

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t | \mathcal{G}) dt.$$

- (2) 【馬可夫不等式】對於任意隨機變數 $X \in L^p$ ， $a > 0$ ，下列不等式幾乎必然成立：

$$\mathbb{P}(|X| \geq a | \mathcal{G}) \leq a^{-p} \mathbb{E}[|X|^p | \mathcal{G}].$$

- (3) 如何推廣柴比雪夫不等式以及赫爾得不等式呢？

Exercise 5.5 : Given a square-integrable random variable X and two sub- σ -algebras $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. First, explain using the properties of the conditional expectation why the following inequality needs to hold,

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2])^2] \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1])^2],$$

before giving a proof.

Exercise 5.6 : Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$ be a sequence consisting of sub- σ -algebras of $\mathcal{F}$. Assume that $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ and that the sequence $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$ is non-increasing. Consider $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and prove the following statements.

- (1) The random variables $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}]$ are orthogonal in L^2 .
- (2) The following series of random variables converges in L^2 ,

$$\sum_{n \geq 0} (\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}]).$$

- (3) Let $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$. Show that $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ converges to $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty]$ in L^2 .

Exercise 5.7 : Given two non-negative random variables X and Y and assume $\mathbb{E}[X | Y] = Y$ and $\mathbb{E}[Y | X] = X$.

- (1) Show that if X and Y are both in L^2 , then $X = Y$ a.s.
- (2) Show that for any non-negative random variable Z and a non-negative real number a , we have,

$$\mathbb{E}[Z | Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a, \quad \text{a.s.}$$

- (3) Show that for any $a \geq 0$, the couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ satisfies the same assumption. Deduce $X = Y$ a.s.

Exercise 5.8 : Let (X, Y) be a random variable with values in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Assume that its density function (with respect to the Lebesgue measure) exists and satisfies $p(x, y) > 0$.

- (1) Given a Borel function $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ such that $h(X, Y)$ is integrable. Determine $\mathbb{E}[h(X, Y) | Y]$.
- (2) Suppose $n = m = 1$. Assume that Y is a Gamma distribution with parameters $(2, \lambda)$ (see Exercise 3.14 for the definition and properties) and that the conditional expectation of X knowing Y is the uniform distribution on $[0, Y]$. Show that X and $Y - X$ are independent and they both follow the exponential distribution of parameter λ .

習題 5.5 : 給定平方可積的隨機變數 X 以及兩個子 σ 代數 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ ，首先利用條件期望值的特性解釋

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2])^2] \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1])^2],$$

為何必須成立且證明。

習題 5.6 : 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間以及 $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$ 為由 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數構成的序列。假設 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ 以及序列 $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$ 非遞增。考慮 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 並證明下列敘述。

- (1) 隨機變數 $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}]$ 在 L^2 中互相正交。
- (2) 下列隨機變數級數在 L^2 中收斂：

$$\sum_{n \geq 0} (\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}]).$$

- (3) 令 $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ ，證明 $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ 在 L^2 中收斂至 $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty]$ 。

習題 5.7 : 給定兩個非負隨機變數 X 及 Y 並假設 $\mathbb{E}[X | Y] = Y$ 以及 $\mathbb{E}[Y | X] = X$ 。

- (1) 證明若 X 及 Y 皆在 L^2 中，則 $X = Y$ a.s.。
- (2) 證明對於任意非負隨機變數 Z 以及非負實數 a ，我們有

$$\mathbb{E}[Z | Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a, \quad \text{a.s.}$$

- (3) 證明對於任意 $a \geq 0$ ，數對 $(X \wedge a, Y \wedge a)$ 滿足原題目相同條件，並由此證明 $X = Y$ a.s.。

習題 5.8 : 令 (X, Y) 為值域為 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的隨機變數。假設其密度函數（對於勒貝格測度）存在並寫作 $p(x, y) > 0$ 。

- (1) 給定布雷爾函數 $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $h(X, Y)$ 可積。求 $\mathbb{E}[h(X, Y) | Y]$ 。
- (2) 假設 $n = m = 1$ 。假設 Y 是個參數為 $(2, \lambda)$ 的伽瑪分佈（回顧習題 3.14 中的定義及性質）且 X 對 Y 的條件期望值是個在 $[0, Y]$ 上的均勻分佈，證明 X 以及 $Y - X$ 為獨立且參數皆為 λ 的指數分佈。

Exercise 5.9 : Given two positive real numbers a, b and a random variable (X, Y) with values in $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfying,

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy.$$

- (1) Given a measurable function $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $h(Y)$ is integrable. Determine $\mathbb{E}[h(Y) | X]$.
- (2) Determine $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$.
- (3) Determine $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=n} | Y]$.
- (4) Determine $\mathbb{E}[X | Y]$.

Exercise 5.10 : Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. random variables with exponential distribution of parameter λ . We denote $T = X_1 + \dots + X_n$. Determine $\mathbb{E}[h(X_1) | T]$ for all Borel function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. How to interpret the result when $h = Id$?

習題 5.9 : 給定兩個正實數 a, b ，值域為 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的隨機變數 (X, Y) 且分佈滿足

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy.$$

- (1) 給定可測函數 $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $h(Y)$ 可積，求 $\mathbb{E}[h(Y) | X]$ 。
- (2) 求 $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$ 。
- (3) 求 $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=n} | Y]$ 。
- (4) 求 $\mathbb{E}[X | Y]$ 。

習題 5.10 : 令 $X_1, \dots, X_n$ 為 i.i.d. 參數為 λ 的指數隨機變數。我們記 $T = X_1 + \dots + X_n$ 。對於所有伯雷爾函數 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，求 $\mathbb{E}[h(X_1) | T]$ 。如何詮釋當 $h = Id$ 時的結果？