第五章 ：條件期望值

習題 5.1 ： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間，$\mathcal{G}$ 為 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數，以及定義在 Ω 上的非負隨機變數 X。證明 $\{\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] > 0\}$ 是包含 $\{X > 0\}$ 中，最小的 $\mathcal{G}$ 可測集合。這裡所謂的包含關係，是把測度為零的可測集合遺忘掉之後的包含關係。

習題 5.2 ： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間。給定非負隨機變數序列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 以及 $\mathcal{F}$ 中的子 σ 代數序列 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$。假設 $\mathbb{E}[X_n \,|\, \mathcal{F}_n]$ 會機率收斂至 0。

(1) 證明 X_n 也會機率收斂至 0。

(2) 逆命題是否成立？若成立，請證明，若不成立，請找出反例。

習題 5.3 ： 給定定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的隨機變數 X 及 Y 以及 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數 $\mathcal{G}$。若對於所有非負可測函數 $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，我們有

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y) \,|\, \mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X) \,|\, \mathcal{G}]\; \mathbb{E}[g(Y) \,|\, \mathcal{G}].$$

則我們說 X 與 Y 在已知 $\mathcal{G}$ 的情況下是獨立的。

(1) 若 $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$，代表什麼？若 $\mathcal{G} = \mathcal{F}$，又代表什麼？

(2) 證明此定義與下列任意性質之一等價：

  (a) 對於任意非負 $\mathcal{G}$ 可測的隨機變數 Z 以及任意非負可測函數 $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，我們有

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\; \mathbb{E}[g(Y) \,|\, \mathcal{G}]].$$

  (b) 對於任意非負可測函數 $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，我們有

$$\mathbb{E}[g(Y) \,|\, \mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y) \,|\, \mathcal{G}].$$

習題 5.4 ： 這裡我們將期望值的性質推廣到條件期望值上。

(1) 證明對於任意非負隨機變數 X，下列等式幾乎必然成立：

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t \,|\, \mathcal{G})\, \mathrm{d}t.$$

(2) 【馬可夫不等式】對於任意隨機變數 $X \in L^p$，$a > 0$，下列不等式幾乎必然成立：

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a \,|\, \mathcal{G}) \leqslant a^{-p}\, \mathbb{E}[|X|^p \,|\, \mathcal{G}].$$

(3) 如何推廣柴比雪夫不等式以及赫爾得不等式呢？

習題 5.5 ： 給定平方可積的隨機變數 X 以及兩個子 σ 代數 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$，首先利用條件期望值的特性解釋

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_2])^2] \leqslant \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_1])^2],$$

為何必須成立且證明。

習題 5.6 ： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間以及 $(\mathcal{F})_{n\geqslant 0}$ 為由 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代數構成的序列。假設 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ 以及序列 $(\mathcal{F})_{n\geqslant 0}$ 非遞增。考慮 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 並證明下列敘述。

(1) 隨機變數 $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_{n+1}]$ 在 L^2 中互相正交。

(2) 下列隨機變數級數在 L^2 中收斂：

$$\sum_{n\geqslant 0} (\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_{n+1}]).$$

(3) 令 $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n$，證明 $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n]$ 在 L^2 中收斂至 $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_\infty]$。

習題 5.7 ： 給定兩個非負隨機變數 X 及 Y 並假設 $\mathbb{E}[X \,|\, Y] = Y$ 以及 $\mathbb{E}[Y \,|\, X] = X$。

(1) 證明若 X 及 Y 皆在 L^2 中，則 $X = Y$ a.s.。

(2) 證明對於任意非負隨機變數 Z 以及非負實數 a，我們有

$$\mathbb{E}[Z \,|\, Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a, \quad \text{a.s.}.$$

(3) 證明對於任意 $a \geqslant 0$，數對 $(X \wedge a, Y \wedge a)$ 滿足原題目相同條件，並由此證明 $X = Y$ a.s.。

習題 5.8 ： 令 (X, Y) 為值域為 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 的隨機變數。假設其密度函數（對於勒貝格測度）存在並寫作 $p(x, y) > 0$。

(1) 給定布雷爾函數 $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ 使得 $h(X, Y)$ 可積。求 $\mathbb{E}[h(X, Y) \,|\, Y]$。

(2) 假設 $n = m = 1$。假設 Y 是個參數為 $(2, \lambda)$ 的伽瑪分佈（回顧習題 3.14 中的定義及性質）且 X 對 Y 的條件期望值是個在 $[0, Y]$ 上的均勻分佈，證明 X 以及 $Y - X$ 為獨立且參數皆為 λ 的指數分佈。

習題 5.9 ： 給定兩個正實數 a,b，值域為 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的隨機變數 (X,Y) 且分佈滿足

$$\mathbb{P}(X=n,Y\leqslant t)=b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}e^{-(a+b)y}\,\mathrm{d}y.$$

(1) 給定可測函數 $h:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\longrightarrow\mathbb{R}$ 使得 $h(Y)$ 可積，求 $\mathbb{E}[h(Y)\,|\,X]$。

(2) 求 $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$。

(3) 求 $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=n}\,|\,Y]$。

(4) 求 $\mathbb{E}[X\,|\,Y]$。

習題 5.10 ： 令 $X_1,\ldots,X_n$ 為 i.i.d. 參數為 λ 的指數隨機變數。我們記 $T=X_1+\cdots+X_n$。對於所有伯雷爾函數 $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，求 $\mathbb{E}[h(X_1)\,|\,T]$。如何詮釋當 $h=Id$ 時的結果？