第六章 ：離散時間鞅

習題 6.1 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 為 i.i.d. 且定義在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的隨機變數，分佈滿足 $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$。令 $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 以及對於所有 $n \geqslant 1$，$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$。設

$$\forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(1) 證明 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅。

(2) 證明 $(S_n^2 - n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅。

(3) 證明 $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅。

(4) 令 P 為雙變數多項式。證明若且唯若 $(P(S_n, n))_{n\geqslant 0}$ 是個適應濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅，則對於所有 $s \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我們有

$$P(s+1, n+1) + P(s-1, n+1) = 2P(s, n).$$

(5) 給定 $\lambda \in \mathbb{R}$。求 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $(\exp(\lambda S_n - \xi n))_{n\geqslant 0}$ 是個適應濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅。

習題 6.2 ： 請找出符合敘述的例子。

(1) 在 L^1 中無界的鞅。

(2) 會 a.s. 收斂但在 L^1 中無界的鞅。

(3) 會 a.s. 收斂至 $+\infty$ 的鞅。

(4) (X_n) 是個下鞅但 (X_n^2) 是個上鞅。

習題 6.3 ： 令 T 是個對於濾鏈 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的停止時間。假設存在 $\varepsilon > 0$ 及正整數 $N \geqslant 1$ 使得

$$\mathbb{P}(T \leqslant n + N \,|\, \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \quad \text{a.s.}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

證明 T 殆必有限且 $\mathbb{E}[T] < \infty$。

習題 6.4 【問題 6.2.7】 **：** 檢查 $\mathcal{F}_T$ 為 σ 代數且當 $T = n$ 為常數停止時間時，$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$。

習題 6.5 【問題 6.2.11】： 考慮 $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ 為 i.i.d. 隨機變數序列，使得 $\mathbb{P}(Y_1=1)=\mathbb{P}(Y_1=-1)=\frac{1}{2}$。定義 $X_0=0$ 以及對於所有 $n\geqslant 1$，$X_n=Y_1+\cdots+Y_n$，也就是說 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個從 0 出發，在 $\mathbb{Z}$ 上且分佈對稱的隨機漫步。設

$$T=\inf\{n\geqslant 0 : X_n=1\}.$$

(1) 使用命題 4.2.4 來證明 $T<\infty$ a.s.。

(2) 證明 $\mathbb{E}[X_T]=1$ 且 $\mathbb{E}[X_0]=0$。

(3) 解釋。

習題 6.6 【問題 6.3.2】： 給定一個適應過程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，則對於所有 $k\geqslant 1$，$S_k(X)$ 及 $T_k(X)$ 為值域為 $\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ 的隨機變數。驗證下列兩點：

(1) 對於所有 $k\geqslant 1$，$S_k(X)$ 及 $T_k(X)$ 為停止時間。

(2) $N_n([a,b],X)$ 是 $\mathcal{F}_n$ 可測的。

習題 6.7 ： 給定非負上鞅 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，試證明 X_n 會 a.s. 收斂，將其極限記為 X，並證明其滿足 $\mathbb{E}[X]\leqslant\mathbb{E}[X_0]$。

習題 6.8 ： 令 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 是個獨立的隨機變數序列。定義

$$\forall n\geqslant 1,\quad \mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\ldots,X_n),\qquad \mathcal{F}_\infty=\sigma\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}\mathcal{F}_n\Big),$$
$$\forall n\geqslant 1,\quad \mathcal{F}^n=\sigma(X_n,X_{n+1},\ldots),\qquad \mathcal{F}^\infty=\bigcap_{n\geqslant 1}\mathcal{F}^n.$$

給定 $A\in\mathcal{F}^\infty$，對所有 $n\geqslant 1$，定義 $M_n=\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\,|\,\mathcal{F}_n]$。利用 $(M_n)_{n\geqslant 1}$ 來證明 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 1。

習題 6.9 ： 令 $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ 為 i.i.d. 非負隨機變數序列且滿足 $\mathbb{E}[Y_n]=1$，$\mathbb{P}(Y_n=1)<1$。

(1) 證明 $X_n=\prod_{0\leqslant m\leqslant n}Y_m$ 是個鞅。

(2) 證明 X_n 會 a.s. 收斂至 0。

(3) 證明 $\frac{1}{n}\ln X_n$ 會 a.s. 收斂至 $c<0$。

習題 6.10【Polya 球箱】：在初始時間 $n=0$ 時，考慮裝有 a 顆白球以及 $b=N-a$ 顆黑球的箱子。我們均勻隨機從箱中抽取一顆球，然後放入兩顆相同顏色的球，得到的是箱子在時間 $n=1$ 的組態。我們重複此動作至任意時間。

對於 $n\geqslant 0$，我們記 Y_n 為在時間 n 時，箱子中白球的數量，以及 $X_n=\frac{Y_n}{N+n}$ 為箱子中白球的比例，且令 $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_0,Y_1,\ldots,Y_n)$。

(1) 求 $\mathbb{P}(Y_{n+1}=Y_n+1\,|\,\mathcal{F}_n)$ 以及 $\mathbb{P}(Y_{n+1}=Y_n\,|\,\mathcal{F}_n)$。證明 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是個會 a.s. 收斂的鞅，將其極限記作 U，證明對於所有整數 $k\geqslant 1$，我們有 $\mathbb{E}[X_n^k]$ 收斂至 $\mathbb{E}[U^k]$。

(2) 證明當 $a=b=1$ 時，對於所有 $n\geqslant 0$，Y_n 是在 $\{1,\ldots,n+1\}$ 上的隨機變數。求 U 的分佈。

(3) 接著考慮一般的情況：對於所有 $k\geqslant 1$ 以及 $n\geqslant 0$，令

$$Z_n=\frac{Y_n(Y_n+1)\ldots(Y_n+k-1)}{(N+n)\cdots(N+n+k-1)}.$$

證明 $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 是個適應 $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的鞅，並求 $\mathbb{E}[U^k]$。

(4) 定義 $\beta(a,b)$ 分佈的密度函數為

$$B(a,b)^{-1}u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(u),$$

其中 $B(a,b)$ 定義及性質如下：

$$B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

證明 $U\sim\beta(a,b)$。