第八章 ：遍歷定理

習題 8.1 ： 給定週期為 $p \geqslant 1$ 的實數序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$ 並定義離散機率測度

$$\mathbb{P} := \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \delta_{(x_{n+k})_{n\geqslant 0}}.$$

證明 $\mathbb{P}$ 是推移算子 θ 的不變測度。

習題 8.2 ： 利用 Kolmogorov 拓延定理（定理 3.1.25），解釋如何將給定的平穩序列 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，拓延成下標在 $\mathbb{Z}$ 上的平穩序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。

習題 8.3 【問題 8.1.9】： 驗證定義 8.1.8 中定義的不變集合 $\mathcal{I}$ 的確是個 σ 代數。

習題 8.4 ： 給定正整數 $n \geqslant 2$。請證明下列敘述或找出反例。

(1) 若 φ 有遍歷性，是否 φ^n 也有遍歷性？若 φ^n 有遍歷性，是否 φ 也有遍歷性？

(2) 同上題，但將「遍歷性」改作「測度守恆變換」。

習題 8.5 【問題 8.1.11】： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 為機率空間，φ 是個在他上面的測度守恆函數。

(1) 給定隨機變數 $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$。若且唯若 $X \circ \varphi = X$，則 X 會對 $\mathcal{I}$ 可測。

(2) 若且唯若所有 $\mathcal{I}$ 可測的隨機變數 $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 皆 $\mathbb{P}$-a.s. 為常數，則 φ 有遍歷性。

習題 8.6 【伯努力系統】： 給定正整數 $N \geqslant 1$，及 $p_1, \dots, p_N \geqslant 0$ 使得 $\sum_k p_k = 1$。令 $E = \{1, \dots, N\}$ 為離散狀態空間，$\Omega = E^{\mathbb{Z}}$ 為樣本空間，$\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)^{\mathbb{Z}}$，其中 $\mathcal{P}(E)$ 為所有由 E 的子集合構成的集合。定義推移算子 θ 為 $\theta((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ 及機率測度 $\mathbb{P}$ 滿足

$$\mathbb{P}(x_k = n_k, \dots, x_l = n_l) = \prod_{i=k}^{l} p_{n_i}, \qquad \forall k \leqslant l, \quad \forall n_k, \dots, n_l \in E.$$

(1) 解釋為何機率測度 $\mathbb{P}$ 是定義良好的。

(2) 證明 θ 是個在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的測度守恆變換。

(3) 證明 θ 具有混合性。

(4) 若我們將狀態空間更改為 $\Omega = E^{\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$，請解釋如何修改上面證明或反證上面三個問題。

習題 8.7 ： 給定兩個函數 $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$，若存在雙射 (bijective) 函數 $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ 使得

$$h \circ f = g \circ h, \tag{8.1}$$

我們說 f 與 g 互為共軛 (conjugated)。

(1) 若 f 與 g 共軛且 h 滿足式 (8.1)，證明對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $h \circ f^n = g^n \circ h$。

考慮帳篷函數 (tent map)：

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{對於 } x < 1/2, \\ 2 - 2x & \text{對於 } x \geqslant 1/2, \end{cases}$$

並定義單峰函數 (logistic map)：

$$f(x) = 4x(1-x).$$

(2) 證明對勒貝格測度 λ 來說，g 是個測度守恆變換。

(3) 證明單峰函數與帳篷函數是共軛的。提示：可以考慮 $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$。

(4) 定義測度 μ 如下：

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

證明 f 對於 μ 是個測度守恆變換。

習題 8.8 【問題 8.1.14】**：** 請找出滿足 $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{T}$ 的例子。

習題 8.9 【問題 8.2.3】**：** 我們沿用定理 8.2.1 中的記號，若假設 $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，試證 L^p 收斂的遍歷定理。

習題 8.10 【Wiener 極大不等式】**：** 令 φ 為在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的測度守恆變換，X 為在 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的可積隨機變數。對於所有 $n \geqslant 0$，定義

$$X_n(\omega) = X(\varphi^n(\omega)), \qquad S_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega),$$

$$A_n(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{n}, \qquad D_n = \max\{A_1, \ldots, A_n\}.$$

證明對於所有 $\alpha > 0$，我們有

$$\mathbb{P}(D_n > \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\alpha}.$$

習題 8.11 【正規數】：對於任意 $x \in [0,1]$，我們可以找到唯一的序列 $(a_n(x))_{n\geqslant 0}$ 使得

(a) 對於所有 $n \geqslant 0$，我們有 $a_n(x) \in \{0,1\}$ 且 $a_n(x)$ 不收斂於 1；

(b) 我們有 $x = \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k} a_k(x)$。

我們稱 $(a_n(x))_{n\geqslant 0}$ 為 x 的二元展開式 (binary expansion)。給定實數 $x \in [0,1]$，若二元展開式中 0 出現的頻率滿足

$$\frac{1}{n}\operatorname{Card}\{1 \leqslant k \leqslant n : a_k(x) = 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

則我們說 x 是個正規數 (normal number)。證明 $\lambda(\mathrm{d}x)$-a.s.，實數 $x \in [0,1]$ 是個正規數。

習題 8.12 ：考慮單位圓 $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ 以及定義在上面的均勻分佈 μ。對於任意 $\beta \in \mathbb{R}$，我們可以定義旋轉算子

$$\theta_\beta : e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha} \mapsto e^{2\pi\,\mathrm{i}(\alpha+\beta)}.$$

(1) 證明若 β 為有理數，則 θ_β 不具有遍歷性。

(2) 假設 β 為無理數並考慮 $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}(\mathbb{S}^1), \mu)$，使用 f 的傅立葉級數的唯一性來證明 θ_β 具有遍歷性。（提示：使用習題 8.5 。）

接著，我們嘗試用比較直接的方法，來證明當 β 為無理數時，θ_β 具有遍歷性。首先，我們知道下列性質成立：給定 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$，對於任意 $\varepsilon > 0$，我們可以找到可數互斥區間 $(J_k)_{k\geqslant 0}$，使得

$$\mu(A\Delta J) < \varepsilon, \qquad J = \bigsqcup_{k\geqslant 0} J_k.$$

給定無理數 β。

(3) 證明數列 $(x_n = n\beta \mod 1)_{n\geqslant 0}$ 在 $[0,1)$ 上是稠密的。

(4) 給定 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ 滿足 $\mu(A) > 0$。證明對於所有 $\delta > 0$，存在 $\mathbb{S}^1$ 上的區間 J 使得 $\mu(A \cap J) > (1-\delta)\mu(J)$。

(5) 由此推得對於所有 $A \in \mathcal{I}_{\theta_\beta}$，若 $\mu(A) > 0$，則 $\mu(A) = 1$。

習題 8.13 ：令 $U \subset \mathbb{R}$ 為開集及 $f : U \longrightarrow U$ 為局部 $\mathcal{C}^1$ 微分同胚 (diffeomorphism)。給定在 U 上的非負連續函數 $\rho : U \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，我們使用 Radon-Nikodym 微分來定義在 U 上的測度 μ：

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \rho.$$

證明若且唯若

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{\det Df(x)} = \rho(y), \quad \forall y \in U,$$

則 μ 對於 f 來說是個不變測度。

習題 8.14 ： 令 $E=[0,1)$。考慮機率空間 $(E,\mathcal{B}(E),\mu)$。令 $B\in\mathcal{B}(E)$ 滿足 $\mu(B)>0$，並假設存在由 E 的子區間構成的集合 $\mathcal{C}$ 使得：

(1) 對於所有 $\varepsilon>0$ 及 $A\in\mathcal{B}(E)$ 皆存在由 $\mathcal{C}$ 中元素構成的可數互斥聯集 $J=\sqcup_{k\geqslant 0}J_k$ 使得 $\mu(A\Delta J)<\varepsilon)$；

(2) 存在 $\gamma>0$ 使得對於所有 $C\in\mathcal{C}$，我們有 $\mu(C\cap B)\geqslant\gamma\mu(C)$。

證明 $\mu(B)=1$。

習題 8.15 【連分數】： 對於任意 $x\in(0,1)$，我們定義

$$A(x)=\lfloor\tfrac{1}{x}\rfloor \quad \text{且} \quad T(x)=\tfrac{1}{x}-A(x).$$

給定 $x\in(0,1)$，對於所有 $n\geqslant 1$，我們定義 $a_n=a_n(x):=A(T^{n-1}(x))$，我們得到的是 x 的連分數表示式：

$$x=\cfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\dots}}. \tag{8.2}$$

(1) 我們先來討論連分數的性質，並證明式 (8.2) 會收斂。首先，對於任意正整數 $n\geqslant 1$ 及正實數 $a_1,\dots,a_n>0$，我們定義

$$[a_1,\dots,a_n]:=\cfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\dots+\frac{1}{a_n}}}.$$

給定 $x\in(0,1)$。

(a) 假設對於正整數 $n\geqslant 1$，下列成立

$$T^k(x)\neq 0,\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

試證

$$x=[a_1+T(x)]=[a_1,a_2+T^2(x)]=\dots=[a_1,\dots,a_{n-1},a_n+T^n(x)].$$

(b) 證明若且唯若 x 為有理數，則存在 $n\geqslant 1$ 使得 $T^n(x)=0$。

假設 x 為無理數，我們定義

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)}:=[a_1(x),\dots,a_n(x)],\qquad \forall n\geqslant 1, \tag{8.3}$$

其中 $p_k(x)$ 與 $q_k(x)$ 為互質的正整數。

(c) 證明下列遞迴關係：

$$\begin{aligned}\forall n\geqslant 1,\quad & p_{n+1}(x)=q_n(Tx),\\ & q_{n+1}(x)=a_1(x)q_n(Tx)+p_n(Tx).\end{aligned}$$

給定正整數序列 $(a_n)_{n\geqslant 1}$，我們定義下列矩陣及整數 $r_n, s_n, p_n, q_n \in \mathbb{Z}$：

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \qquad A_n &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ M_n &:= A_1 \dots A_n = \begin{pmatrix} r_n & p_n \\ s_n & q_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

對於任意矩陣 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，我們定義莫比烏斯變換 (Möbius transformation)：

$$M(x) = \frac{rx+p}{sx+q}, \qquad M = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

其中我們將 M 視為由 $\mathbb{R}$ 映射至 $\mathbb{R}$ 的函數。

(d) 對於所有 $n \geqslant 1$，證明 p_n 及 q_n 互質以及下列遞迴關係：

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1}, & p_0 &= 0, \\ q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1}, & q_0 &= 1. \end{aligned}$$

(e) 對於所有 $n \geqslant 1$，證明 $A_1 \dots A_n = (A_n \dots A_1)^T$ 並推得

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = [a_n, \dots, a_1].$$

(f) 證明在給定無理數 $x \in (0,1)$ 時，由式 (8.3) 所定義出來的數對 $(p_n(x), q_n(x))$ 及由 $(a_n = a_n(x))_{n\geqslant 1}$ 在式 (8.4) 中定義出來的數對 (p_n, q_n) 相同。

(g) 證明對於所有 $n \geqslant 1$，我們有 $x = M_n(T^n(x))$ 以及

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n T^n(x)}{q_n(q_n + T^n(x)q_{n-1})}.$$

由此推得 $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\geqslant 0}$ 及 $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\geqslant 0}$ 分別為遞增及遞減數列，且皆收斂至 x。

(2) 接著，我們要討論在 $(0,1)$ 上的實數在變換 T 之下的行為。

(a) 證明勒貝格測度 λ 對 T 並不是個不變測度。提示：可以證明 $\lambda(T^{-1}(0,\frac{1}{2})) = 2 - \ln 4$。

定義在 $(0,1)$ 上的機率測度

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2}\int_B \frac{\mathrm{d}x}{1+x}, \qquad \forall B \in \mathcal{B}((0,1)).$$

我們想要了解 T 對於測度 μ 的性質。

(b) 利用習題 8.13 ，證明 T 對於 μ 是個測度守恆變換。

接著，對於所有正整數 $n \geqslant 1$ 及正整數 $a_1, \dots, a_n \geqslant 1$，我們定義

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \{x \in [0,1) : a_1(x) = a_1, \dots, a_n(x) = a_n\}.$$

我們也以第 (1) 題方式，來定義互質的正整數 p_k 與 q_k（式 (8.3)）、矩陣 A_n 及 M_n（式 (8.4)）與相對應的莫比烏斯變換（式 (8.5)）。在下面，我們固定 $n \geqslant 1$ 及 $a_1, \ldots, a_n \geqslant 1$。

(c) 證明 $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ 是個在 $[0, 1)$ 中的區間，且其兩端點為
$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{以及} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}.$$
何者是左端點，何者是右端點？計算 $\lambda(\Delta(a_1, \ldots, a_n))$。

(d) 利用 (1) (e) 小題，證明 $\mu(\Delta(a_n, \ldots, a_1)) = \mu(\Delta(a_1, \ldots, a_n))$。

(e) 給定 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$，記 $I = [\alpha, \beta)$。證明根據 n 的奇偶性，我們有
$$T^{-n}(I) \cap \Delta(a_1, \ldots, a_n) = [M_n(\alpha), M_n(\beta)) \quad \text{或} \quad (M_n(\beta), M_n(\alpha)].$$

(f) 從上題推得
$$\frac{\lambda(T^{-n}(I) \cap \Delta_n)}{\lambda(I)\lambda(\Delta_n)} = \frac{q_n(q_{n-1} + q_n)}{(q_{n-1}\beta + q_n)(q_{n-1}\alpha + q_n)} \in (\tfrac{1}{2}, 2).$$

(g) 證明對於任意 $B \in \mathcal{B}([0, 1))$，我們有
$$\mu(T^{-n}(B) \cap \Delta_n) \geqslant \frac{\ln 2}{4}\mu(B)\mu(\Delta_n)$$

(h) 使用習題 8.14 證明 T 對於 μ 具有遍歷性。

(i) 證明存在常數 $K > 0$ 使得下列收斂 $\lambda(\mathrm{d}x)$-a.s. 成立：
$$\Big(\prod_{k=1}^{n} a_k(x)\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} K.$$
此常數稱作 Khintchine 常數，並計算他的值。

(3) 最後（非習題），利用我們在前兩小題得到性質，可以證明下列由 Paul Lévy 在 1929 年得到的結果：$\lambda(\mathrm{d}x)$-a.s.，我們有
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \ln 2},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(\Delta_n) = -\frac{\pi^2}{6 \ln 2},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Big|x - \frac{p_n}{q_n}\Big| = -\frac{\pi^2}{6 \ln 2}.$$

習題 8.16 【首次通過滲透模型】：考慮 $d \geqslant 1$ 維度的網格 $\mathbb{Z}^d$，將其頂點集記作 V，邊集記作 E。我們給定 i.i.d. 非負可積的隨機變數序列 $(\tau(e))_{e\in E}$，並對於任意邊 $e = \{x, y\}$，我們記 $\tau(x, y) = \tau(y, x) = \tau(e)$。給定 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 及連接他們的路徑 $\gamma : x_0 = x, \dots, x_n = y$ 滿足對於所有 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，我們有 $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$，我們定義路徑旅行時間

$$\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(x_i, x_{i+1}).$$

給定 $x, y \in \mathbb{Z}^d$，我們可以定義首次通行時間 (first-passage time)

$$T(x, y) = \inf\{\tau(\gamma) : \gamma \text{ 是條連接 } x \text{ 至 } y \text{ 的路徑}\}.$$

(1) 給定 $x \in \mathbb{Q}^d$，證明下列極限會 a.s. 收斂及在 L^1 中收斂：

$$\mu(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{T(0, \lfloor nx \rfloor)}{n}.$$

(2) 證明對於所有 $x, y \in \mathbb{Q}^d$，我們有 $\mu(x + y) \leqslant \mu(x) + \mu(y)$。

(3) 證明對於所有 $c \in \mathbb{Q}$ 及 $x \in \mathbb{Q}^d$，我們有 $\mu(cx) = |c|\mu(x)$。