第九章 ：布朗運動

習題 9.1 ： 令 B 為一維的標準布朗運動。固定 $t > s \geqslant 0$ 並求 $\mathbb{P}(B_s > 0, B_t > 0)$。

習題 9.2 【時間反轉】： 令 $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ 為在時間 $[0,1]$ 上的一維布朗運動。定義隨機過程 B' 為對於所有 $t \in [0,1]$，我們設 $B'_t = B_1 - B_{1-t}$。證明 B 與 B' 有相同的分佈（在函數空間 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中）。

習題 9.3 ： 令 B 為一維的標準布朗運動。定義隨機過程 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$，定義做

$$\forall t \geqslant 0, \qquad W_t = \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s.$$

固定 $t > 0$，求 $\mathbb{E}[W_t]$ 及 $\mathbb{E}[W_t^2]$ 以及 W_t 的分佈。

習題 9.4 ： 給定隨機過程 $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$。假設存在 $\alpha, \beta > 0$ 及 $K > 0$ 使得

$$\mathbb{E}[|X_s - X_t|^\beta] \leqslant K|t-s|^{1+\alpha}, \qquad \forall s,t \in [0,1].$$

回顧我們在定理 9.2.2 中二元集合的定義

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{D}_n, \qquad \mathcal{D}_n = \{\tfrac{k}{2^n} : 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}.$$

給定 $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$。定義下列事件

$$\forall n \geqslant 1, \qquad G_n = \{|X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n}| \leqslant 2^{-\gamma n} \text{ 對於所有 } 0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1\}.$$

(1) 證明存在 $\lambda > 0$ 使得 $\mathbb{P}(G_n^c) \leqslant K2^{-n\lambda}$。

(2) 固定正整數 $N \geqslant 1$，令 $H_N = \cap_{n=N}^\infty G_n$，求證在 H_N 之上，對於所有 $q, r \in \mathcal{D}$ 滿足 $|q - r| < 2^{-N}$，我們有

$$|X_q - X_r| \leqslant \frac{3}{1-2^{-\gamma}}|q-r|^\gamma.$$

(3) 由上個小題推得下列敘述：幾乎必然存在常數 $C(\omega)$ 使得

$$|X_q - X_r| \leqslant C|q-r|^\gamma, \qquad \forall q, r \in \mathcal{D}.$$

(4) 證明布朗運動對於所有 $\gamma < \frac{1}{2}$ 皆是 γ–Hölder 連續的。

習題 9.5 ： 令 $S_1 = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} B_t$。證明我們有下列的分佈收斂：

$$\Big(\int_0^t e^{B_s} \,\mathrm{d}s\Big)^{1/\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{S_1}.$$

習題 9.6 【布朗運動不是有限變異函數】：給定函數 $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$，若對於任意閉區間 $[a,b]$，任意正整數 $p\geqslant 1$ 及任意子分割 (subdivirion) $a=t_0<t_1<\cdots<t_p=b$，下列和為有界

$$\sum_{i=0}^{p-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$$

則我們說 f 是個有限變異函數 (function with finite variation)。考慮一維的標準布朗運動，實數 $b>a\geqslant 0$ 並令

$$\forall n\geqslant 0,\qquad X_n=\sum_{k=1}^{2^n}(B_{a+k(b-a)2^{-n}}-B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2.$$

計算隨機變數 X_n 的期望值及變異數並求序列 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的 a.s. 極限，接著由此推得函數 $t\mapsto B_t$ 在任意非空區間上，皆不是個有限變異函數。

習題 9.7 【問題 9.2.10】：如何修改定理 9.2.9 的證明，進而推得下列性質。

(1) 對於任意函數 $f:[0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$，我們定義上右微分 (upper right derivative) 及下右微分 (lower right derivative)：

$$\forall t\in[0,1),\qquad D^*f(t)=\limsup_{h\downarrow 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$
$$D_*f(t)=\liminf_{h\downarrow 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

試證對布朗運動來說，幾乎必然，對於所有 $t\in[0,1)$，我們有

$$D^*B_t=+\infty\qquad\text{或}\qquad D_*B_t=-\infty.$$

(2) 證明對於任意 $k\geqslant 3$，對所有 $\gamma>\frac{1}{2}+\frac{1}{k}$，布朗運動的軌跡幾乎必然不會是 γ–Hölder 連續的。

習題 9.8 【問題 9.2.11】：我們可以定義下列隨機集合

$$\mathcal{H}_\gamma(\omega)=\{t\geqslant 0: s\mapsto B_s(\omega)\text{ 在 }t\text{ 是 }\gamma\text{–Hölder 連續的}\}.$$

(1) 證明對於所有 $\gamma<\frac{1}{2}$，我們有 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_\gamma=[0,\infty))=1$。

(2) 證明對於所有 $\gamma>\frac{1}{2}$，我們有 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_\gamma=\varnothing)=1$。

(3) 證明對於所有 $t\geqslant 0$，我們有 $\mathbb{P}(t\in\mathcal{H}_{1/2})=0$。

(4) Burgess Davis 在 1983 年證明了 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_{1/2}\neq\varnothing)=1$，請解釋為何與 (3) 沒有矛盾？

習題 9.9 【時間倒轉】：若 B 是個一維由 0 出發的標準布朗運動，證明定義如下的隨機過程也是個有相同性質的布朗運動：

$$X_0 = 0 \qquad \text{以及} \qquad X_t = tB_{1/t}, \quad \forall t > 0.$$

習題 9.10 【對數迭代律】：令 B 為一維的標準布朗運動，我們的目的是證明下列結果

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1 \quad \text{a.s.}, \qquad h(t) = \sqrt{2t\ln\ln(t)}. \tag{9.1}$$

對於所有 $t \geqslant 0$，我們定義 $S_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$。

(1) 證明對於所有 $t > 0$，我們有

$$\mathbb{P}(S_t > u\sqrt{t}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-u^2/2}}{u}, \quad u \to +\infty.$$

(2) 令實數 r 及 c 滿足 $1 < r < c^2$，觀察

$$\mathbb{P}(S_{r^n} > ch(r^{n-1})), \quad n \to \infty$$

的行為，並推得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leqslant 1.$$

(3) 證明幾乎必然存在無窮多個 n 使得

$$B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geqslant \sqrt{\frac{r-1}{r}}h(r^n).$$

由此推得式 (9.1)。

(4) 證明 $B_t/h(t)$ 的 a.s. 極限不存在，但會機率收斂，求其機率收斂的極限。想想看此結果與大數法則還有中央極限定理的關係，並針對此結果做評論。

(5) 證明下列關於布朗運動局部連續性尺度的結果：

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \limsup_{h\downarrow 0} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}} = 1 \quad \text{a.s.}$$